ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 187–195
doi:10.15330/cmp.5.2.187-195

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №2, С.187–195

Бубняк М.М.

ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ 1-ПЕРІОДИЧНОГО ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Встановлено оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду при умовах: якщо один елемент дробу належить комплексній площині з розрізом $(-\infty; -1/4]$, а сума модулів інших елементів обмежена деяким числом; а також, якщо елементи належать відповідним параболічним областям чи об'єднанню цих областей, а модулі елементів, починаючи з другого, обмежені.

Ключові слова і фрази: 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду, ознака Ворпіцького, об'єднання параболічних областей.

Ternopil National Economic University, 11 Lvivska str., 46020, Ternopil, Ukraine
E-mail: maria.bubnyak@gmail.com

Вступ

Теорема Ворпіцького та параболічні теореми [10, 12, 14] належать до класичних ознак збіжності неперервного дробу

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1}, \tag{1}$$

де $a_n \in \mathbb{C}$. У монографії [12, с.151] для дробу (1) встановлена оцінка швидкості узагальненої збіжності при належному виборі послідовності параболічних областей елементів. Новий підхід до дослідження класичних ознак збіжності дробу (1) на основі дробово-лінійних відображень запропоновано в [6].

Для гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД) вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1} = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i(2)}}{1 + \ddots}}, \qquad a_{i(k)} \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

де $i(k) = i_1, \ldots, i_k$ — мультиіндекс ($1 \le i_j \le N$), N — натуральне число, Д. Боднаром [7, с.93] доведено багатовимірний аналог теореми Ворпіцького, встановлено оцінку швидкості збіжності ГЛД (2) та аналоги параболічних теорем [7, с.111]. Т. Антонова [1] встановила багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів. Р. Дмитришин [9] дослідив збіжність багатовимірних g-дробів у параболічній

УДК 515.12+512.58
2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

області та встановив оцінку швидкості збіжності цих дробів у деякій обмеженій області, яка міститься в параболі.

Х. Кучмінська одержала ряд аналогів [11, теореми 6.10-6.12, 6.15] цих ознак для двовимірних неперервних дробів вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{i,i}}{\Phi_i},\quad \Phi_i=1+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j+i,j}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i,i+j}}{1},\qquad a_{i,j}\in\mathbb{C}. \tag{3}$$

О. Сусь встановила аналог ознаки Ворпіцького для дробу (3).

Для ГЛД спеціального вигляду

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{1}=1+\sum_{i_1=1}^{i_0}\cfrac{a_{i(1)}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\cfrac{a_{i(2)}}{1+\ddots}},\qquad a_{i(k)}\in\mathbb{C}, \tag{4}$$

де $1\le i_k\le i_{k-1}$, $i_0=N$, О. Баран [5] довела збіжність та встановила оцінку швидкості збіжності дробу (4), якщо всі його елементи задовольняють умови $|a_{i(k)}|\le\frac{t(1-t)}{i_{k-1}}$ $\big(t\in[0;1/2]\big)$. У роботах [2, 3, 4] Т. Антонова дослідила кругові та параболічні області збіжності дробу (4) та встановила оцінки швидкості збіжності при певних додаткових умовах на елементи цього дробу.

1 Основні результати

Об'єктом наших досліджень є 1-періодичний ГЛД спеціального вигляду, який отримуємо з (4), якщо покласти: $a_{i(k)}=c_{i_k}$ $(1\le i_k\le i_{k-1},\ k\ge 1)$, тобто

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}=\left(1+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{c_{i_1}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\cfrac{c_{i_2}}{1+\ddots}}\right)^{-1}, \tag{5}$$

де c_j — комплексні числа ($j=\overline{1,N}$), N — фіксоване натуральне число.

Означення 1. *Підхідним дробом n-го порядку 1-періодичного ГЛД* (5) *називають вираз*

$$F_n=\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1},\qquad n\ge 1;\ F_0=1.$$

Означення 2. *Вираз вигляду*

$$R_n^{(q)}=1+\mathop{D}_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{j_{k-1}}\frac{c_{j_k}}{1}=1+\sum_{j_1=1}^{j_0}\cfrac{c_{j_1}}{1+\sum\limits_{j_2=1}^{j_1}\cfrac{c_{j_2}}{1+\ddots\sum\limits_{j_{n-1}=1}^{j_{n-2}}\cfrac{c_{j_{n-1}}}{1+\sum\limits_{j_n=1}^{j_{n-1}}\cfrac{c_{j_n}}{1}}}}$$

назвемо n-тим залишком q-го порядку 1-періодичного ГЛД (5), $q=\overline{1,N}$, $n\ge 1$, $j_0=q$, $R_0^{(q)}=1$, $R_n^{(0)}=1$.

Повторюючи схему доведення теореми 4.1 [13, с.47], в якій встановлено оцінку швидкості збіжності зворотного гранично-періодичного дробу, отримуємо для 1-періодичного неперервного дробу наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай елементи c_n неперервного дробу*

$$1+\underset{n=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{c_n}{1} \tag{6}$$

однакові ($c_n = c$) і $c \in G$, де $G = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\arg\left(z+\frac{1}{4}\right)\right| < \pi\right\}$. Тоді справджується оцінка різниці двох підхідних дробів

$$|f_n - f_m| \le Mp^{m+1}, \qquad n > m \ge 0,$$

де $M = \dfrac{2|x|}{1-p}$, $p = \left|\dfrac{y}{x}\right|$, $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$ — притягувальна та відповідно відштовхувальна точки дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1+\frac{c}{\omega}$.

Твердження 2. *Нехай для залишків дробу* (5) *виконуються нерівності*

$$|R_n^{(q)}| \ge g_n > 0, \qquad n \ge 0;\ q = \overline{2,N};\ g_{-1} = 1. \tag{7}$$

Тоді при $n > m \ge 0$ справджується оцінка

$$|F_n - F_m| \le \frac{1}{g_n \cdot g_m}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{C^k}{\prod_{r=1}^{k} g_{n-r}\cdot g_{m-r}}\left|R_{n-k}^{(1)} - R_{m-k}^{(1)}\right| + \frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} g_{n-r}\cdot g_{m-r}}\right], \tag{8}$$

де

$$C = \sum_{j=2}^{N}|c_j|. \tag{9}$$

Доведення. Враховуючи, що $F_n = \left(R_n^{(N)}\right)^{-1}$, $n \ge 0$, $R_n^{(q)} = R_n^{(1)} + \sum_{j=2}^{q}\dfrac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}}$, $n \ge 1$, $R_k^{(q)} - R_l^{(q)} = R_k^{(1)} - R_l^{(1)} + \sum_{j=2}^{q}\dfrac{c_j}{R_{k-1}^{(j)}\cdot R_{l-1}^{(j)}}\left(R_{l-1}^{(j)} - R_{k-1}^{(j)}\right)$, $n \ge k > l \ge 0$, $q = \overline{2,N}$, і умови (7), маємо

$$\begin{aligned}|F_n - F_m| &= \left|\frac{1}{R_n^{(N)}\cdot R_m^{(N)}}\left[R_m^{(1)} - R_n^{(1)} + \sum_{j_1=2}^{N}\frac{c_{j_1}}{R_{n-1}^{(j_1)}\cdot R_{m-1}^{(j_1)}}\left(R_{n-1}^{(j_1)} - R_{m-1}^{(j_1)}\right)\right]\right|\\ &\le \frac{1}{g_n\cdot g_m}\Bigg[\left|R_m^{(1)} - R_n^{(1)}\right| + \frac{\sum_{j_1=2}^{N}|c_{j_1}|}{g_{n-1}\cdot g_{m-1}}\left|R_{n-1}^{(1)} - R_{m-1}^{(1)}\right|\\ &\quad + \frac{\sum_{j_1=2}^{N}\sum_{j_2=2}^{j_1}|c_{j_1}||c_{j_2}|\left|R_{m-2}^{(j_2)} - R_{n-2}^{(j_2)}\right|}{g_{n-1}g_{n-2}\cdot g_{m-1}g_{m-2}}\Bigg].\end{aligned}$$

Через m кроків одержимо оцінку

$$|F_n - F_m| \leq \frac{1}{g_n \cdot g_m}\Bigg[\left|R_m^{(1)} - R_n^{(1)}\right| + \frac{\sum_{j_1=2}^N |c_{j_1}|}{g_{n-1}\cdot g_{m-1}}\left|R_{n-1}^{(1)} - R_{m-1}^{(1)}\right| + \ldots + \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \ldots \sum_{j_m=2}^{j_{m-1}} |c_{j_1}||c_{j_2}|\ldots|c_{j_m}|}{\prod_{r=1}^m g_{m-r}g_{n-r}}\left|R_{n-m}^{(1)} - R_0^{(1)}\right| + \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \ldots \sum_{j_m=2}^{j_{m-1}} \sum_{j_{m+1}=2}^{j_m} |c_{j_1}||c_{j_2}|\ldots|c_{j_m}||c_{j_{m+1}}|}{\prod_{r=1}^{m+1} g_{m-r}\cdot g_{n-r}}\Bigg].$$

Враховуючи рівність (9), при $s = \overline{1, m+1}$ одержимо

$$\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \ldots \sum_{j_s=2}^{j_{s-1}} |c_{j_1}||c_{j_2}|\ldots|c_{j_s}| = \sum_{k_2+\ldots+k_N=s} |c_2|^{k_2}\ldots|c_N|^{k_N} \leq \left(\sum_{j=2}^N |c_j|\right)^s = C^s$$

і оцінку (8). □

Теорема 1. *Нехай елементи c_j дробу (5) задовольняють умови*

$$c_1 \in G = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left|\arg\left(z + \frac{1}{4}\right)\right| < \pi \right\}, \quad \sum_{j=2}^N |c_j| = C \leq \frac{\mu^2}{4},$$

де $\mu = \frac{1}{2}\left(|1+\sqrt{1+4c_1}| - |1-\sqrt{1+4c_1}|\right)$.

Тоді справджуються такі оцінки швидкості збіжності:

1) *якщо* $C < \dfrac{\mu^2}{4}$, *то*

$$|F - F_m| \leq L_1 \frac{p_1^{m+1} - p_2^{m+1}}{p_1 - p_2}, \qquad m > 0,\ p_1 \neq p_2;$$
$$|F - F_m| \leq L_1 (m+1) p^{m+1}, \qquad m > 0,\ p_1 = p_2 = p;$$

2) *якщо* $C = \dfrac{\mu^2}{4}$, *то*

$$|F - F_m| \leq L_2 \frac{1}{m+1}, \qquad m > 0,$$

де $L_1 = \dfrac{4|1+\sqrt{1+4c_1}|}{\mu(1-p_1)(1-p_2)}$, $L_2 = \dfrac{4|1+\sqrt{1+4c_1}|(p_1 + (1-p_1)^2)}{\mu^2(1-p_1)^3}$, $p_1 = \left|\dfrac{1-\sqrt{1+4c_1}}{1+\sqrt{1+4c_1}}\right|$, $p_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4C/\mu^2}}{1+\sqrt{1-4C/\mu^2}}$, *$F$ — значення дробу* (5).

Доведення. Встановимо оцінки знизу для $|R_n^{(q)}|$, $n \geq 0$, $q = \overline{1, N}$. Враховуючи, що $c_1 \in G$, при $n \geq 0$ маємо

$$|R_n^{(1)}| = \left|\frac{x_1^{n+2} - y_1^{n+2}}{x_1^{n+1} - y_1^{n+1}}\right| \geq |x_1|(1-p_1) = \frac{1}{2}\left(|1+\sqrt{1+4c_1}| - |1-\sqrt{1+4c_1}|\right) = \mu,$$

де p_1, x_1, y_1 визначені аналогічно, як p, x, y у твердженні 1. Зауважимо, що $\mu = 0$ лише тоді, коли числа $1 + \sqrt{1+4c_1}$ та $1 - \sqrt{1+4c_1}$ є комплексно-спряженими. Цей випадок виключений умовою теореми.

Методом математичної індукції по n доведемо, що для будь-якого фіксованого q, $2 \le q \le N$, справджуються оцінки

$$|R_n^{(q)}| \ge g_n, \qquad n \ge 0, \tag{10}$$

де $g_n = \mu + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n} \dfrac{-C}{\mu}$, $n \ge 0$.

При $n = 0$ одержимо $R_0^{(q)} = 1 \ge \mu = g_0$.

Нехай нерівності (10) виконуються для кожного $n = k$. Тоді при $n = k+1$ маємо

$$|R_{k+1}^{(q)}| = \left| R_{k+1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{q} \frac{c_j}{R_k^{(j)}} \right| \ge \mu - \sum_{j=2}^{q} \frac{|c_j|}{|R_k^{(j)}|} \ge \mu - \frac{\sum_{j=2}^{q} |c_j|}{g_k} \ge \mu - \frac{C}{g_k} = g_{k+1}.$$

Для оцінки швидкості збіжності ГЛД (5) використаємо нерівність (8). Оскільки $c_1 \in G$, то згідно з твердженням 1 маємо $|R_{n-r}^{(1)} - R_{m-r}^{(1)}| \le M_1 p_1^{m-r+1}$, $n > m \ge 0$, $r \ge 0$, де $M_1 = 2|x_1|/(1-p_1)$.

Позначимо $\widehat{f}_n$ — n-тий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу (6) при $c = -C/\mu^2$; $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4C/\mu^2}}{2}$, $y_2 = \frac{1-\sqrt{1-4C/\mu^2}}{2}$ — притягувальна та відштовхувальна точки дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 + \frac{-C/\mu^2}{\omega}$. Тоді маємо $\widehat{f}_n = \dfrac{x_2^{n+2} - y_2^{n+2}}{x_2^{n+1} - y_2^{n+1}}$, $g_n = \mu \cdot \widehat{f}_n$, $n \ge 0$, та $x_2 \cdot y_2 = C/\mu^2$.

1. Оцінимо вирази $\dfrac{C^k}{\prod_{r=1}^{k} g_{n-r} \cdot g_{m-r}}$ зверху при $k = \overline{1, m+1}$. Нехай $1 \le k \le m$, тоді

$$\frac{C^k}{\prod_{r=1}^{k} (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} = \frac{(C/\mu^2)^k}{\prod_{r=1}^{k} \left(\widehat{f}_{n-r} \cdot \widehat{f}_{m-r}\right)} \le \frac{1}{1-p_2} \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^k = M_2^{(1)} p_2^k,$$

де $M_2^{(1)} = \dfrac{1}{1-p_2}$, $p_2 = y_2/x_2$. Аналогічну оцінку отримаємо при $k = m+1$, де $M_2^{(2)} = \dfrac{\mu x_2}{1-p_2}$. Оскільки $\mu \le 1$ і $x_2 \le 1$, то $M_2 = \max\{M_2^{(1)}, M_2^{(2)}\} = \dfrac{1}{1-p_2}$.

Якщо $p_1 \ne p_2$, то

$$|F_n - F_m| \le \frac{4}{\mu^2} \left(\sum_{k=0}^{m} M_1 p_1^{m-k+1} \cdot M_2 p_2^k + M_2 p_2^{m+1} \right) \le L_1 \frac{p_1^{m+1} - p_2^{m+1}}{p_1 - p_2},$$

де $L_1 = \dfrac{4 M_1 M_2}{\mu^2}$.

Якщо $p_1 = p_2 = p$, то

$$|F_n - F_m| \le \frac{4}{\mu^2} \left(\sum_{k=0}^{m} M_1 p_1^{m-k+1} \cdot M_2 p_2^k + M_2 p_2^{m+1} \right) \le L_1 (m+1) p^{m+1}.$$

2. Нехай $\dfrac{C}{\mu^2}=\dfrac{1}{4}$. Враховуючи, що $\widetilde{f}_n=\dfrac{n+2}{2(n+1)}$ — n-тий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу (6), де $c=-1/4$, при $1\le k\le m$ маємо

$$\frac{C^k}{\prod_{r=1}^{k}\left(g_{n-r}\cdot g_{m-r}\right)}=\frac{(C/\mu^2)^k}{\prod_{r=1}^{k}\left(\widetilde{f}_{n-r}\cdot\widetilde{f}_{m-r}\right)}=\frac{(n-k+1)(m-k+1)}{(n+1)(m+1)}.$$

Аналогічно при $k=m+1$ одержимо

$$\frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1}\left(g_{n-r}\cdot g_{m-r}\right)}=\frac{\mu(C/\mu^2)^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1}\widetilde{f}_{n-r}\cdot\prod_{r=1}^{m}\widetilde{f}_{m-r}}=M_2\frac{n-m}{(n+1)(m+1)},$$

де $M_2=\dfrac{\mu}{2}\le\dfrac{1}{2}$.

Отже, $|F_n-F_m|\le\dfrac{4M_1M_2}{\mu^2}\cdot\dfrac{\sum_{k=0}^{m}p_1^{m-k+1}(n-k+1)(m-k+1)+(n-m)}{(n+1)(m+1)}$.

Перейшовши до границі при $n\to\infty$, отримаємо оцінку з пункту 2 для $|F-F_m|$. □

Теорема 2. *Нехай елементи c_j, $j=\overline{1,N}$, дробу* (5) *задовольняють умову $c_j\in P_j(\gamma)$, де*

$$P_j(\gamma)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|-Re\left(ze^{-\gamma i}\right)\le 2l_j\cos^2\frac{\gamma}{2}\right\},\quad -\pi<\gamma<\pi,\quad l_j=\frac{1}{2N}\left(1-\frac{j}{2N}\right).$$

Тоді

1. *Дріб* (5) *збігається.*
2. *Областю значень дробу* (5) *є круг* $K=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\frac{e^{-i\gamma/2}}{\cos\gamma/2}\right|\le\frac{1}{\cos\gamma/2}\right\}$.
3. *Крім цього, якщо* $|c_j|<\left(1-\frac{j}{2N}\right)^2\cos^2\gamma/2$, $j=\overline{2,N}$, *то справджується оцінка швидкості збіжності*
$$|F-F_m|\le L\cdot C_{m+N-1}^{N-1}\cdot p^{m+1},\qquad m\ge 0,\tag{11}$$
де $L=\dfrac{4M_1}{\cos^2\gamma/2}$; $M_1=\dfrac{|1+\sqrt{1+4c_1}|(1+p_1)}{(1-p_1)^2}$; $p=\max\limits_{j=\overline{1,N}}\{p_j\}$; $p_1=\left|\dfrac{1-\sqrt{1+4c_1}}{1+\sqrt{1+4c_1}}\right|$; $p_j=\dfrac{|c_j|}{\left(1-\frac{j}{2N}\right)^2\cos^2\gamma/2}$, $j=\overline{2,N}$; F — *значення дробу* (5).

Доведення. Пункти 1 та 2 доведені у теоремі 2 [8]. Встановимо оцінки знизу для $|R_n^{(j)}|$, $n\ge 0$; $j=\overline{1,N}$. Оскільки $c_j\in P_j(\gamma)$, $j=\overline{1,N}$, то $R_n^{(j)}\in V_j(\gamma)$, де

$$V_j(\gamma)=\left\{z\in\mathbb{C}:Re\left(ze^{-i\gamma/2}\right)\ge\left(1-\tfrac{j}{2N}\right)\cos\gamma/2\right\}.$$

Отже, $|R_n^{(j)}|\ge\left(1-\frac{j}{2N}\right)\cos\gamma/2$.

Оскільки $R_n^{(j)} \neq 0$, $n \geq 0$; $j = \overline{1,N}$, то для оцінки швидкості збіжності дробу (5) використаємо нерівність

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{\left|R_{n+m}^{(N)}\right| \cdot \left|R_n^{(N)}\right|} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_N=n+1\\ k_j\geqslant 0(j=\overline{1,N})}} \frac{|c_1|^{k_1}|c_2|^{k_2}\dots|c_N|^{k_N}}{\prod\limits_{j=1}^{N}\prod\limits_{r=1}^{k_j}\left(\left|R_{m+s_j-r}^{(j)}\right| \cdot \left|\hat{R}_{s_j-r}^{(j)}\right|\right)}, \tag{12}$$

де $s_j = n - \sum\limits_{l=j+1}^{N} k_l$; $\hat{R}_n^{(q)} = \begin{cases} R_n^{(q)}, & \text{якщо } n \geq 0 \\ 1, & \text{якщо } n = -1 \end{cases}$, яка випливає з формули різниці підхідних дробів F_{n+m} та F_n, $n > 0$, $m > 0$.

Враховуючи твердження 1 і $c_1 \in P_1(\gamma) \subset G$, де $G = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\arg\left(\frac{1}{4} + z\right)\right| < \pi\right\}$, маємо $\dfrac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1}\left|R_{s_1+m-r}^{(1)}\right| \cdot \left|\widehat{R}_{s_1-r}^{(1)}\right|} \leq M_1 p_1^{k_1}$, $1 \leq k_1 \leq n+1$.

Позначимо $\Psi_j = \dfrac{|c_j|}{\left|R_{s_j+m-r}^{(j)}\right| \cdot \left|\widehat{R}_{s_j-r}^{(j)}\right|}$, тоді $\Psi_j \leq \dfrac{|c_j|}{\left(1 - \frac{j}{2N}\right)^2 \cos^2\gamma/2} = p_j < 1$, $j = \overline{2,N}$, $\prod_{j=1}^{k_j}\Psi_j \leq p_j^{k_j}$, $1 \leq k_j \leq m$, і $\prod_{j=1}^{m+1}\Psi_j = \left(1 - \frac{j}{2N}\right)\cos(\gamma/2) \cdot p_j^{m+1}$, $k_j = m+1$. Враховуючи, що $M_2 = \max\{1; (1 - j/(2N))\cos\gamma/2\} = 1$, маємо оцінку

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{\left|R_{n+m}^{(N)}\right| \cdot \left|R_n^{(N)}\right|} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_N=n+1} M_1 p_1^{k_1} p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N} \leq L \cdot C_{n+N-1}^{N-1} \cdot p^{n+1},$$

де $L = \frac{4M_1}{\cos^2\gamma/2}$. Перейшовши до границі при $m \to \infty$, одержимо (11). □

Встановимо оцінку швидкості збіжності в об'єднанні параболічних областей, які побудовані за схемою запропонованою в роботі [8], тобто

$$G_1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\arg(\omega + l_1)| < \pi\} \tag{13}$$

та

$$G_s = G_s(c_1, c_2, \ldots, c_{s-1}) = \bigcup_{\gamma\in[\Gamma_1^{s-1},\Gamma_2^{s-1}]} P_s(\gamma), \tag{14}$$

$$P_s(\gamma) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| - Re(ze^{-\gamma i}) \leq 2l_s \cos^2\frac{\gamma}{2}\right\}, \quad -\pi < \gamma < \pi, \quad l_s = \frac{1}{2N}\left(1 - \frac{s}{2N}\right),$$

де $[\Gamma_1^{s-1}, \Gamma_2^{s-1}] = \bigcap\limits_{j=1}^{s-1}[\gamma_1^j, \gamma_2^j]$, $s = \overline{2,N}$, і $\gamma_1^j = \arccos\left(\frac{A_j+B_j}{C_j}\right)$, якщо виконується умова $\cos\alpha_j \leq 1 - \frac{2l_j}{|c_j|}$, і $\gamma_1^j = -\arccos\left(\frac{A_j+B_j}{C_j}\right)$, якщо ця умова не виконується; $\gamma_2^j = \arccos\left(\frac{A_j-B_j}{C_j}\right)$, $\alpha_j = \arg c_j$, $A_j = (|c_j| - l_j)(l_j + |c_j|\cos\alpha_j)$, $B_j = |c_j||\sin\alpha_j|\sqrt{2|c_j|l_j(1+\cos\alpha_j)}$, $C_j = l_j^2 + |c_j|^2 + 2|c_j|l_j\cos\alpha_j$.

Теорема 3. *Нехай елементи c_j, $j = \overline{1,N}$, дробу* (5) *задовольняють умову $c_j \in G_j$, де G_j визначаються згідно з формулами* (13)–(14). *Тоді*

1. *Дріб* (5) *збігається.*
2. *Областю значень дробу* (5) *є об'єднання кругів $K(\Gamma_1^N) \bigcup K(\Gamma_2^N)$.*
3. *Крім цього, якщо $|c_j| < \nu_j$, $j = \overline{2,N}$, де $\nu_j = \left(1 - \frac{j}{2N}\right)^2 \min^2\{\cos(\Gamma_1^N/2); \cos(\Gamma_2^N/2)\}$, то справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|F - F_m| \leq L \cdot C_{m+N-1}^{N-1} \cdot p^{m+1}, \qquad m \geq 0, \tag{15}$$

де $L = M_1/\nu_N$; $M_1 = \dfrac{|1+\sqrt{1+4c_1}|(1+p_1)}{(1-p_1)^2}$; $p = \max\limits_{j=\overline{1,N}}\{p_j\}$; $p_1 = \left|\dfrac{1-\sqrt{1+4c_1}}{1+\sqrt{1+4c_1}}\right|$; $p_j = |c_j|/\nu_j$ $(j = \overline{2,N})$; F — значення дробу (5).

Доведення. Пункти 1 та 2 доведені в теоремі 3 [8]. Встановимо оцінки знизу для $|R_n^{(j)}|$, $n \geq 0$; $j = \overline{1,N}$. Оскільки $c_j \in G_j$, $j = \overline{1,N}$, то $R_n^{(j)} \in \bigcup\limits_{\gamma \in [\Gamma_1^N; \Gamma_2^N]} V_j(\gamma)$, де

$$V_j(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : Re\left(ze^{-\gamma i/2}\right) \geq \left(1 - \tfrac{j}{2N}\right)\cos\tfrac{\gamma}{2} \right\}.$$

Отже, справджуються оцінки $|R_n^{(j)}| \geq \sqrt{\nu_j}$.

Аналогічно як у попередній теоремі використаємо нерівність (12) для оцінки швидкості збіжності дробу (5). Враховуючи, що $\dfrac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1}\left|R_{s_1+m-r}^{(1)}\right| \cdot \left|\widehat{R}_{s_1-r}^{(1)}\right|} \leq M_1 p_1^{k_1}$, $1 \leq k_1 \leq m+1$, та $\Psi_j \leq \dfrac{|c_j|}{\nu_j} = p_j < 1$, $j = \overline{2,N}$, одержимо оцінку (15). □

Отримані умови збіжності відрізняються від раніше встановлених тим, що маємо значно ширшу область для вибору елемента c_1, яка у випадку неперевного дробу є максимально можливою. Встановлено оцінки швидкості збіжності при додаткових умовах на елементи 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

References

[1] Antonova T.M. *Multidimensional generalization of multiply parabola convergence theorem for continued fractions.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1999, **42** (4), 7–12. (in Ukrainian)

[2] Antonova T.M. *Speed of covergence for branched continued fractions of special form.* Volyn Math. Bull. 1999, **6**, 3–8. (in Ukrainian)

[3] Antonova T.M., Bodnar D.I. *The convergence regions for branched continued fractions of special form.* In: Proc. of the Intern. Conf. on Approximation Theory and its Appl. dedicated to the memory of V.K. Dzyadyk 2000, **31**, 19–32. (in Ukrainian)

[4] Antonova T.M. *On simple circular sets of absolute convergence for branched continued fractions of the special form.* Carpathian Math. Publ. 2012, **4** (2), 165–174. (in Ukrainian)

[5] Baran O. *Analogue of the Worpitzky convergence criterion for branched continued fractions of a special form.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1996, **39** (2), 35–38. (in Ukrainian)

[6] Beardon A.F. *Worpitzky's Theorem on continued fractions.* J. Comput. Appl. Math. 2001, **131** (1–2), 143–148. doi:10.1016/S0377-0427(00)00318-6

[7] Bodnar D.I. Branched continued fractions. Naukova dumka, Kyiv, 1986. (in Russian)

[8] Bodnar D.I., Bubniak M.M. *Some parabolic regions of convergence for 1-periodic branched continued fraction of special form.* Computer-integration technology: education, science, industry 2012, **9**, 4–8. (in Ukrainian)

[9] Dmytryshyn R.I. *The multidimensional generalization of g-fractions and their application.* J. Comput. Appl. Math. 2004, **164–165**, 265–284. doi: 10.1016/S0377-0427(03)00642-3

[10] Jones W.B., Thron W.J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications, Encyclopedia Math. Appl. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1980.

[11] Kuchmins'ka Kh.Yo. Two-dimensional continued fractions. Pidstryhach Institute Appl. Probl. Mech. Math., L'viv, 2010. (in Ukrainian)

[12] Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions. Atlantis Press/World Scientific, Amsterdam-Paris, 2008.

[13] Thron W.J., Waadeland H. *Modifications of continued fractions.* Lecture Notes in Mathematics. Analytic Theory of Continued fractions. 1981, **932**, 38–66.

[14] Wall H.S. Analytic Theory of Continued Fractions. Van Nostrand, New York, 1948.

Надійшло 29.04.2013

Bubniak M.M. *Truncation-error bounds for the 1-periodic branched continued fraction of special form*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 187–195.

Truncation-error bounds for the 1-periodic continued fraction of special form are established at the following conditions: if first element of the fraction belongs to complex plain with the cut $(-\infty; -1/4]$ and the sum of modules of other elements is limited by a certain number; if elements belong to their respective parabolic regions or union of that parabolic regions and all their modules, except of the first one, are limited.

Key words and phrases: 1-periodic branched continued fraction of special form, Worpitsky's criterion, union of parabolic regions.

Бубняк М.М. *Оценки скорости сходимости 1-периодической ветвящейся цепной дроби специального вида* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 187–195.

Установлены оценки сходимости 1-периодической ветвящейся непрерывной дроби специального вида при условиях: если первый элемент дроби принадлежит комплексной плоскости с разрезом $(-\infty; -1/4]$ и сумма модулей остальных элементов ограничена некоторым числом; если элементы принадлежат соответствующим параболическим областям или объединению параболических областей и модули элементов, начиная со второго, ограничены.

Ключевые слова и фразы: 1-периодическая ветвящаяся цепная дробь специального вида, критерий Ворпицкого, объединение параболических областей.