ISSN 2075-9827 **http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp**
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 199–207 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №2, С.199–207
doi:10.15330/cmp.5.2.199-207

Волошин Г.А.[1], Маслюченко В.К.[2]

ТОПОЛОГІЗАЦІЯ ПРОСТОРУ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Тут ми вводимо локально опуклу топологію $\mathcal{T}$ пошарової рівномірної збіжності на просторі $S = CC[0,1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, доводимо, що простір $(S, \mathcal{T})$ повний, неметризовний і що простір P всіх многочленів від двох змінних на $[0,1]^2$ всюди щільний в S, отже, S — сепарабельний.

Ключові слова і фрази: нарізно неперервні функції, поліноми від двох змінних, топологія пошарової рівномірної збіжності, повнота, гаусдорфовість, метризовність, сепарабельність.

[1] Bukovinian State Financial and Economics University, 1 Stern str., 58000, Chernivtsi, Ukraine
[2] Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: galja.vlshin@gmail.com (Волошин Г.А.)

1. Топологія пошарової рівномірної збіжності. Розглянемо простір $S = CC[0,1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, заданих на квадраті $Q = [0,1]^2$, який є лінійним підпростором простору $\mathbb{R}^Q$ всіх дійснозначних функцій на Q. Для функції $f : Q \to \mathbb{R}$ і точки $p = (x, y) \in Q$ покладемо, як звичайно, $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Нехай $\|\cdot\|_\infty$ — це рівномірна норма на просторі $C[0,1]$ всіх неперервних функцій $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, яка визначається формулою

$$\|g\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |g(x)|.$$

Введемо на просторі S природну сім'ю переднорм, покладаючи

$$\|f\|^x = \|f^x\|_\infty \text{ для кожного } x \in [0,1] \quad \text{і} \quad \|f\|_y = \|f_y\|_\infty \text{ для кожного } y \in [0,1]$$

для довільної функції $f \in S$. Нехай

$$\mathcal{P}_X = \{\|\cdot\|^x : 0 \le x \le 1\}, \quad \mathcal{P}_Y = \{\|\cdot\|_y : 0 \le y \le 1\} \quad \text{і} \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}_X \cup \mathcal{P}_Y.$$

Розглянемо на просторі S локально опуклу топологію $\mathcal{T}$, що породжена сукупністю переднорм $\mathcal{P}$. Як це випливає з загальних побудов [4, с. 27], базу околів нуля топології $\mathcal{T}$ будуть утворювати кулі

$$B_{\tau,\sigma,\varepsilon} = B_{x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m;\varepsilon} = \{f \in S : \max\{\|f\|^{x_1}, \ldots, \|f\|^{x_n}, \|f\|_{y_1}, \ldots, \|f\|_{y_m}\} \le \varepsilon\},$$

де $\tau = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\sigma = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — довільні скінченні підмножини відрізка $[0,1]$ і ε — довільне додатне число (якщо $\tau = \sigma = \varnothing$, то ми вважаємо, що $B_{\tau,\sigma,\varepsilon} = S$ для кожного $\varepsilon > 0$). Легко зрозуміти, що сітка $(f_\kappa)_{\kappa \in K}$ елементів f_κ з S буде збігатися до функції f з S

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 65D15.

тоді і тільки тоді, коли всі x-розрізи f_κ^x рівномірно на $[0,1]$ збігаються до x-розрізу f^x, а всі y-розрізи $(f_\kappa)_y$ рівномірно на $[0,1]$ збігаються до y-розрізу f_y, тобто

$$(\forall x \in [0,1])(f_\kappa^x \rightrightarrows f^x \text{ на } [0,1]) \quad \text{і} \quad (\forall y \in [0,1])((f_\kappa)_y \rightrightarrows f_y \text{ на } [0,1]).$$

Тому топологію $\mathcal{T}$ на S ми будемо називати *топологією пошарової рівномірної збіжності*.

В цій статті ми вивчимо деякі властивості локально опуклого простору $S = (S, \mathcal{T})$, доведемо, що він повний, неметризовний і що його лінійний підпростір $P = P[0,1]^2$ всіх многочленів

$$g(x,y) = \sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k} x^j y^k$$

від двох змінних на квадраті Q і простір $C = C[0,1]^2$ всіх сукупно неперервних функцій $h : Q \to \mathbb{R}$ всюди щільні в S, звідки отримаємо, що простір S сепарабельний. Це лише перші кроки у вивченні нового топологічного векторного простору S, і дослідження його подальших властивостей (бочковість, борнологічність, тощо) стане предметом найближчого майбутнього.

2. Повнота простору S. Нагадаємо [4, с. 61], що фундаментальна сітка в топологічному векторному просторі (коротко: ТВП) T — це така сітка $(t_\kappa)_{\kappa \in K}$, що для кожного околу нуля U в T існує такий елемент $\kappa_0 \in K$, що для всіх таких κ' і κ'' з K, що $\kappa' \geq \kappa_0$ і $\kappa'' \geq \kappa_0$, маємо $t_{\kappa'} - t_{\kappa''} \in U$. ТВП T називається *повним*, якщо в ньому кожна фундаментальна сітка $(t_\kappa)_{\kappa \in K}$ є збіжною, тобто існує такий елемент $t \in T$, що для кожного околу нуля U існує таке $\kappa_0 \in K$, що для довільних $\kappa \geq \kappa_0$ різниця $t_\kappa - t$ належить U.

Теорема 1. *ТВП S з топологією пошарової рівномірної збіжності $\mathcal{T}$ є повним.*

Доведення. Нехай $(f_\kappa)_{\kappa \in K}$ — фундаментальна сітка в S. Тоді [4, с. 62]

$$(\forall x \in [0,1])(\|f_{\kappa'} - f_{\kappa''}\|^x \to 0) \quad \text{і} \quad (\forall y \in [0,1])(\|f_{\kappa'} - f_{\kappa''}\|_y \to 0).$$

З повноти простору $C_u[0,1] = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ випливає, що для кожного $x \in [0,1]$ існує така функція $f^x \in C[0,1]$, що $f_\kappa^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$, і для кожного $y \in [0,1]$ існує така функція $f_y \in C[0,1]$, що $(f_\kappa)_y \rightrightarrows f_y$ на $[0,1]$. Зокрема, для довільних точок x і y з $[0,1]$ будемо мати

$$f^x(y) = \lim f_\kappa^x(y) = \lim f_\kappa(x,y) = \lim (f_\kappa)_y(x) = f_y(x).$$

Тому формулою

$$f(x,y) = f^x(y) = f_y(x)$$

визначається функція $f : Q \to \mathbb{R}$, у якої f^x — це її вертикальні x-розрізи $f(x,\cdot)$ для кожного $x \in [0,1]$, а f_y — це її горизонтальні y-розрізи $f(\cdot,y)$ для кожного $y \in [0,1]$. За побудовою функції f^x і f_y неперервні, отже, f — це нарізно неперервна функція, тобто $f \in S$. Оскільки

$$\|f_\kappa - f\|^x = \|f_\kappa^x - f^x\|_\infty \to 0 \quad \text{і} \quad \|f_\kappa - f\|_y = \|(f_\kappa)_y - f_y\|_\infty \to 0$$

для довільних x і y з $[0,1]$, то $f_\kappa \to f$ в S і, таким чином, фундаментальна сітка $(f_\kappa)_{\kappa \in K}$ збігається в S, що і дає повноту простору S. ☐

3. Гаусдорфовість і неметризовність простору S. Нагадаємо [4, с. 57], що ТВП T буде метризовним тоді і тільки тоді, коли він гаусдорфовий і в ньому існує не більш ніж зліченна база околів нуля. Гаусдорфовість полінормованого простору (T, P) рівносильна тому, що для кожної ненульової точки t_0 з T існує така переднорма $p_0 \in P$, що $p_0(t_0) > 0$ [4, с. 29].

Ми будемо використовувати поняття хреста $xp(E)$ підмножини E добутку $X \times Y$. Визначимо проекції $pr_X : X \times Y \to X$ і $pr_Y : X \times Y \to Y$, поклавши $pr_X(x, y) = x$ і $pr_Y(x, y) = y$ для довільної точки $(x, y) \in X \times Y$. Нехай $A = pr_X(E)$ і $B = pr_Y(E)$. *Хрестом множини* E в $X \times Y$ називається множина $xp(E) = (A \times Y) \cup (X \times B)$.

Теорема 2. *Топологічний векторний простір S є гаусдорфовим.*

Доведення. Нехай f_0 — ненульова функція з S. Тоді існує така точка $(x_0, y_0) \in Q$, що $f(x_0, y_0) \neq 0$. В такому разі $\|f_0\|^{x_0} \geq |f(x_0, y_0)| > 0$ та $\|f_0\|_{y_0} \geq |f(x_0, y_0)| > 0$, що і дає нам гаусдорфовість S. □

Теорема 3. *Топологічний векторний простір S неметризовний.*

Доведення. Розглянемо довільну послідовність куль $B_n = B_{\tau_n, \sigma_n, \varepsilon_n}$ у просторі S, де τ_n і σ_n — скінченні підмножини відрізка $[0, 1]$, а $\varepsilon_n > 0$, і покажемо, що система $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ не є базою околів нуля в S. Справді, множини $\tau = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tau_n$ і $\sigma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ не більш, ніж зліченні, а відрізок $[0, 1]$ за теоремою Кантора незліченний. Тому існують точки $x_0 \in [0, 1] \backslash \tau$ і $y_0 \in [0, 1] \backslash \sigma$. Розглянемо кулю

$$B = B_{x_0; y_0; 1} = \left\{ f \in S : \max\{\|f\|^{x_0}, \|f\|_{y_0}\} \leq 1 \right\}$$

і покажемо, що $B_n \nsubseteq B$ для кожного n. Справді, розглянемо хрест $E = xp(\tau_n \times \sigma_n) = (\tau_n \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \sigma_n)$ добутку $\tau_n \times \sigma_n$, точку $p_0 = (x_0, y_0)$ і покладемо $F = E \cup \{p_0\}$. Множина F, очевидно, замкнена в квадраті Q. Визначимо функцію $f_0 : F \to \mathbb{R}$, покладаючи $f_0(p) = 0$, якщо $p \in E$ і $f_0(p_0) = 2$. Оскільки $p_0 \notin E$, адже і $x_0 \notin \tau_n$, і $y_0 \notin \sigma_n$, то така функція коректно визначена і неперервна. За теоремою Тітце-Урисона [2, с. 116] існує така неперервна функція $f : Q \to \mathbb{R}$, що $f|_F = f_0$. Для цієї функції $\|f\|^x = 0$ і $\|f\|_y = 0$ для кожного $x \in \tau_n$ і $y \in \sigma_n$, отже, $f \in B_n$. Але

$$\|f\|^{x_0} \geq |f(x_0, y_0)| = 2 \quad \text{i} \quad \|f\|_{y_0} \geq |f(x_0, y_0)| = 2,$$

тому $f \notin B$.

Таким чином, $B_n \nsubseteq B$ для кожного n. Тому система $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ не утворює бази околів нуля в S. Звідси негайно випливає, що не більш, ніж зліченної бази околів нуля в S не існує, отже, S — неметризовний простір. □

Нехай A і B — довільні підмножини відрізка $[0, 1]$ і $\mathcal{T}_{A,B}$ — локально опукла топологія на S, яка породжена сукупністю переднорм $\mathcal{P}_{A,B} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B$, де $\mathcal{P}_A = \{\|\cdot\|^x : x \in A\}$ і $\mathcal{P}_B = \{\|\cdot\|_y \in B\}$.

Теорема 4. *Нехай A, B, C, D — підмножини відрізка $[0, 1]$ і $(A, B) \neq (C, D)$. Тоді $\mathcal{T}_{A,B} \neq \mathcal{T}_{C,D}$.*

Доведення. Припустимо, наприклад, що існує точка $x_0 \in A \setminus C$. Розглянемо кулю $B_0 = B_{x_0;\varnothing;1}$, яка є околом нуля в топології $\mathcal{T}_{A,B}$ і покажемо, що вона не є околом нуля в топології $\mathcal{T}_{C,D}$. Справді, нехай τ і σ — довільні скінченні підмножини множин C і D відповідно, ε — довільне додатне число і $B = B_{\tau,\sigma,\varepsilon}$ — базисний окіл нуля в топології $\mathcal{T}_{C,D}$. Покажемо, що $B \nsubseteq B_0$. Розглянемо замкнену в квадраті Q множину $F = E \cup (\{x_0\} \times [0,1])$, де $E = xp(\tau \times \sigma)$.

Виберемо яку-небудь точку $y_0 \in [0,1] \setminus \sigma$. Існує така неперервна функція $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, що $g(y_0) = 2$ і $g(y) = 0$ для кожного $y \in \sigma$, адже множина $\sigma \cup \{y_0\}$ скінченна, а тому замкнена в $[0,1]$, і $y_0 \notin \sigma$.

Визначимо функцію $h : F \to \mathbb{R}$, покладаючи $h(p) = 0$ на E і $h(x_0, y) = g(y)$ для кожного y з $[0,1]$. Оскільки $x_0 \notin \tau$ і $g(y) = 0$ на σ, то це визначення функції h коректне і h — неперервна функція, адже її звуження $h|_E$ і $h|_{\{x_0\}\times[0,1]}$ на обидві замкнені множини E і $\{x_0\} \times [0,1]$, які в об'єднанні дають F, є неперервними. За теоремою Тітце-Урисона існує така неперервна функція $f : Q \to \mathbb{R}$, що $f|_F = h$. Тоді $f \in B$, бо $f|_E = 0$, отже, $f^x = 0$ і $f_y = 0$ для довільних $x \in \tau$ і $y \in \sigma$, а тому $\|f\|^x = 0 < \varepsilon$ і $\|f\|_y = 0 < \varepsilon$, як тільки $x \in \tau$ і $y \in \sigma$. Але $f \notin B_0$, бо $\|f\|^{x_0} = \|f^{x_0}\|_\infty = \|g\|_\infty \geq |g(y_0)| = 2 > 1$.

Ми показали, що окіл нуля B_0 в топології $\mathcal{T}_{A,B}$ не є околом нуля в топології $\mathcal{T}_{C,D}$, отже, $\mathcal{T}_{A,B} \neq \mathcal{T}_{C,D}$. Так само розглядаються і інші логічно можливі випадки $C \setminus A \neq \varnothing$, $B \setminus D \neq \varnothing$ чи $D \setminus B \neq \varnothing$. □

Наступний результат доповнює теорему 2.

Теорема 5. *Топологічний векторний простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ буде гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли $\overline{A} = [0,1]$ або $\overline{B} = [0,1]$.*

Доведення. Нехай, наприклад, $\overline{A} = [0,1]$ і f — ненульова функція з S. Тоді існує така точка $p_0 = (x_0, y_0) \in Q$, що $f(p_0) \neq 0$. В такому разі і $f_{y_0}(x) \neq 0$ в деякому околі U точки x_0 в $[0,1]$. З умови $\overline{A} = [0,1]$ випливає, що існує така точка $a \in A$, що $a \in U$. Тоді $f^a(y_0) = f_{y_0}(a) \neq 0$, а тому $\|f\|^a = \|f^a\|_\infty \geq |f^a(y_0)| > 0$, що і дає нам гаусдорфовість $(S, \mathcal{T}_{A,B})$.

Навпаки, нехай $\overline{A} \neq [0,1]$ і $\overline{B} \neq [0,1]$. Тоді існує така точка $p_0 = (x_0, y_0) \in Q$, що $x_0 \notin \overline{A}$ і $y_0 \notin \overline{B}$. Розглянемо хрест $E = xp(\overline{A} \times \overline{B})$ добутку $\overline{A} \times \overline{B}$, який є замкненою множиною в Q. Оскільки $x_0 \notin \overline{A}$ і $y_0 \notin \overline{B}$, то точка $p_0 = (x_0, y_0) \notin E$. З повної регулярності квадрата Q випливає, що існує така неперервна функція $f : Q \to [0,1]$, що $f(p_0) = 1$ і $f(p) = 0$ на E. Для кожної точки $x \in A$ чи $y \in B$ будемо мати $\|f\|^x = 0$ і $\|f\|_y = 0$, бо тоді $\{x\} \times [0,1] \subseteq E$ і $[0,1] \times \{y\} \subseteq E$, отже, $f^x = 0$ і $f_y = 0$. Але $f \neq 0$, бо $f(p_0) = 1$. Це і доводить, що простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ не гаусдорфовий. □

Наступний результат розвиває теорему 3.

Теорема 6. *Топологічний векторний простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ буде метризовним тоді і тільки тоді, коли обидві множини A і B не більш, ніж зліченні, і $\overline{A} = [0,1]$ або $\overline{B} = [0,1]$.*

Доведення. Достатність. Нехай A і B — не більш ніж зліченні на відрізку $[0,1]$ множини, причому одна з них всюди щільна в $[0,1]$. Сукупність передонорм $\mathcal{P}_{A,B} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B$ буде зліченною, а тому простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ має зліченну базу околів нуля. Крім того, він гаусдорфовий за теоремою 5. Отже, цей простір метризовний.

Необхідність. Якщо $\overline{A} \neq [0,1]$ і $\overline{B} \neq [0,1]$, то простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ не гаусдорфовий, отже, не метризовний. Припустимо, що хоча б одна з множин A чи B, скажімо A, незліченна. Покажемо, що тоді простір $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ не має не більш ніж зліченної бази околів нуля. Для цього розглянемо будь-яку послідовність куль $B_n = B_{\tau_n, \sigma_n, \varepsilon_n}$, де τ_n і σ_n — скінченні підмножини відповідно множин A і B. Множина $\tau = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tau_n$ не більш ніж зліченна, тому існує такий елемент x_0, що $x_0 \in A$ і $x_0 \notin \tau$. Розглянемо окіл нуля $B = B_{\{x_0\};\varnothing;1}$ в $(S, \mathcal{T}_{A,B})$ і покажемо, що $B_n \nsubseteq B$ для кожного n.

Для даного номера n візьмемо будь яку-точку $y_0 \in [0,1] \backslash \sigma_n$ і побудуємо таку неперервну функцію $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, що $g(y_0) = 2$ і $g(y) = 0$ при $y \in \sigma_n$. Як і в доведенні теореми 4, легко побудувати таку неперервну функцію $f : Q \to \mathbb{R}$, що $f(x_0, y) = g(y)$ на $[0,1]$ і $f|_{xp(\tau_n \times \sigma_n)} = 0$. Тоді $f \in B_n \backslash B$ і теорема доведена. □

4. Рівномірне наближення неперервної функції многочленом з даними значеннями. Тепер ми беремо курс на доведення рівності $\overline{P} = S$. Це можна зробити двома способами: складнішим, але цікавішим, бо на цьому шляху нам потрібно довести твердження, які цікаві самі по собі, і простішим, але нуднішим через свою простоту. Історично спочатку виник перший спосіб, який відображений у тезах [3], а потім другий, про який іде мова в тезах [1].

Почнемо з однієї цікавої теореми, яка використовується при доведенні рівності $\overline{P} = S$ першим способом.

Теорема 7. *Нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $x_1, \ldots, x_n$ — різні точки з відрізка $[0,1]$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує такий многочлен $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, де $g(x_k) = f(x_k)$ при $k = 1, \ldots, n$ і $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$.*

Доведення. Розглянемо при $k = 1, \ldots, n$ многочлени

$$\Phi_k(x) = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} (x - x_i) \quad \text{і} \quad \varphi_k(x) = \frac{\Phi_k(x)}{\Phi_k(x_k)},$$

для яких $\varphi_k(x_k) = 1$ і $\varphi_k(x_i) = 0$ при $i \neq k$. Функція

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x)|,$$

зрозуміло, неперервна на $[0,1]$, отже, існує $\|\gamma\|_\infty = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} \gamma(x)$. Оскільки $\|\gamma\|_\infty \geq \gamma(x_k) = 1$ для кожного $k = 1, \ldots, n$, зокрема, $\|\gamma\|_\infty \geq \gamma(x_1) = 1$, то $\|\gamma\|_\infty \geq 1$. Тому ми можемо розглянути число $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2\|\gamma\|_\infty}$, для якого, очевидно, виконується нерівність $0 < \varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

За класичною теоремою Веєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій многочленами існує такий многочлен $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, що $\|p - f\|_\infty \leq \varepsilon_0$. За поправками $\alpha_k = f(x_k) - p(x_k)$ побудуємо многочлен

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x),$$

для якого $q(x_k) = \alpha_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Зауважимо, що

$$|\alpha_k| = |f(x_k) - p(x_k)| \leq \|f - p\|_\infty \leq \varepsilon_0$$

для кожного $k = 1, \dots, n$, тому

$$|q(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||\varphi_k(x)| \leq \varepsilon_0 \gamma(x) \leq \varepsilon_0 \|\gamma\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2\|\gamma\|_\infty} \cdot \|\gamma\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2}$$

для кожного x з $[0,1]$, отже, $\|q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Для многочлена $g(x) = p(x) + q(x)$ будемо мати, що $g(x_k) = p(x_k) + q(x_k) = p(x_k) + \alpha_k = f(x_k)$ для кожного $k = 1, \dots, n$, причому

$$\|g - f\|_\infty = \|q + p - f\|_\infty \leq \|q\|_\infty + \|p - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

5. Одна інтерполяційна теорема для многочленів. Далі нам потрібен буде один результат з тез [3]. Ми подамо його з доведенням, оскільки в [3] зроблені лише вказівки.

Теорема 8. *Нехай K — довільне поле, $x_1, \dots, x_n$ — різні точки з K і $y_1, \dots, y_m$ — різні точки з K, $p_1(y), \dots, p_n(y)$ — многочлени з $K[y]$, $q_1(x), \dots, q_m(x)$ — многочлени з $K[x]$, причому*

$$p_k(y_j) = q_j(x_k) \quad \text{для всіх} \quad k = 1, \dots, n \quad \text{і} \quad j = 1, \dots, m.$$

Тоді існує такий многочлен $f(x,y)$ з $K[x,y]$, що $f(x_k, y) = p_k(y)$ і $f(x, y_j) = q_j(x)$ для довільних x і y з K та $k = 1, \dots, n$ і $j = 1, \dots, m$.

Доведення. Крім многочленів $\varphi_k(x)$, породжених точками $x_1, \dots, x_n$, які ми розглядали в доведенні попередньої теореми, і для яких

$$\varphi_k(x_i) = \delta_{k,i} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases}$$

розглянемо і такі ж многочлени $\psi_j(x)$, які породжені вже точками $y_1, \dots, y_m$, і для яких $\psi_j(y_i) = \delta_{j,i}$.

Для многочлена

$$g(x,y) = \sum_{k=1}^{n} p_k(y) \varphi_k(x)$$

будемо мати, що $g(x_k, y) = p_k(y)$ на K для кожного $k = 1, \dots, n$. Розглянемо многочлени

$$\widetilde{q}_j(x) = q_j(x) - g(x, y_j) \qquad \text{і} \qquad h(x,y) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{q}_j(x) \psi_j(y).$$

Зрозуміло, що $h(x, y_j) = \widetilde{q}_j(x)$ на K для кожного $j = 1, \dots, m$.

Нарешті розглянемо многочлен

$$f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$$

і покажемо, що він і є шуканим. Зауважимо спочатку, що

$$\widetilde{q}_j(x_k) = q_j(x_k) - g(x_k, y_j) = q_j(x_k) - p_k(y_j) = 0$$

для довільних j і k, тому

$$h(x_k, y) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{q}_j(x_k) \psi_j(y) = 0$$

для кожного $k = 1, \dots, n$. В такому разі

$$f(x_k, y) = g(x_k, y) + h(x_k, y) = p_k(y) + 0 = p_k(y)$$

на K для кожного $k = 1, \dots, n$. З іншого боку

$$f(x, y_j) = g(x, y_j) + h(x, y_j) = g(x, y_j) + \widetilde{q}_j(x) = q_j(x)$$

на K для кожного $j = 1, \dots, m$. Теорему доведено. □

6. Щільність підпростору многочленів у просторі нарізно неперервних функцій. З теорем 7 і 8 ми виведемо такий результат.

Теорема 9. *Простір $P = P[0,1]^2$ всіх многочленів*

$$g(x, y) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{j,k} x^j y^k$$

від двох змінних x і y з дійсними коефіцієнтами $a_{j,k}$ на квадраті Q всюди щільний у просторі S з топологією пошарової рівномірної збіжності.

Доведення. Нехай $f \in S$ і $B = B_{\tau,\sigma,\varepsilon}$ — довільний базисний окіл нуля в S. Покажемо, що існує такий многочлен $g \in P$, що $g - f \in B$. Нехай $\tau = \{x_1, \dots, x_n\}$ і $\sigma = \{y_1, \dots, y_m\}$, де $x_k \neq x_j$ і $y_k \neq y_j$ при $k \neq j$. За теоремою 7 для кожного $k = 1, \dots, n$ існує такий многочлен $p_k(y)$, що $\|f^{x_k} - p_k\|_\infty \le \varepsilon$ і $p_k(y_j) = f^{x_k}(y_j)$ для кожного $j = 1, \dots, m$, і так само для кожного $j = 1, \dots, m$ існує такий многочлен $q_j(x)$, що $\|f_{y_j} - q_j\|_\infty \le \varepsilon$ і $q_j(x_k) = f_{y_j}(x_k)$ для кожного $k = 1, \dots, n$. Оскільки

$$p_k(y_j) = f^{x_k}(y_j) = f(x_k, y_j) = f_{y_j}(x_k) = q_j(x_k)$$

для довільних j і k, то за теоремою 8 існує такий многочлен $g(x, y)$ з P, що $g(x_k, y) = p_k(y)$ і $g(x, y_j) = q_j(x)$ для всіх x і y з $[0,1]$ і довільних $k = 1, \dots, n$ і $j = 1, \dots, m$. Для цього многочлена будемо мати

$$\|f - g\|^{x_k} = \|f^{x_k} - g^{x_k}\|_\infty = \|f^{x_k} - p_k\|_\infty \le \varepsilon$$

і

$$\|f - g\|_{y_j} = \|f_{y_j} - g_{y_j}\|_\infty = \|f_{y_j} - q_j\|_\infty \le \varepsilon,$$

отже, $g - f \in B$. Це показує, що $f \in \overline{P}$, отже, $\overline{P} = S$. □

7. Інший спосіб доведення рівності $\overline{P} = S$ і сепарабельність простору S. Ми довели рівність $\overline{P} = S$, використавши теорему Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ на відрізку. Але є й інша теорема Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ від двох змінних на квадраті $Q = [0,1]^2$. Саме її ми використаємо при іншому доведенні рівності $\overline{P} = S$.

Почнемо з такого простого спостереження.

Теорема 10. *$\overline{P} = \overline{C}$ у просторі S.*

Доведення. Зрозуміло, що $\overline{P} \subseteq \overline{C}$, бо $P \subseteq C$. Доведемо, що і $\overline{C} \subseteq \overline{P}$. Для функції $\varphi \in C$ ми покладаємо $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{p \in Q} |\varphi(p)|$.

Нехай $f \in \overline{C}$, $x_1, \ldots, x_n$ — різні точки з $[0,1]$, $y_1, \ldots, y_m$ — різні точки з $[0,1]$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує така функція $g \in C$, що $\|f - g\|^{x_k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $k = 1, \ldots, n$ і $\|f - g\|_{y_j} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $j = 1, \ldots, m$. За теоремою Вейєрштрасса для функцій від двох змінних існує такий многочлен $h \in P$, що $\|g - h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$\|f - h\|^{x_k} \leq \|f - g\|^{x_k} + \|g - h\|^{x_k} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g - h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

і

$$\|f - h\|_{y_j} \leq \|f - g\|_{y_j} + \|g - h\|_{y_j} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g - h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це показує, що $f \in \overline{P}$. □

Теорема 11. $\overline{C} = S$.

Доведення. Нехай $f \in S$, τ і σ — скінченні підмножини відрізка [0,1] і $\varepsilon > 0$. Розглянемо хрест

$$E = xp(\tau \times \sigma) = (\tau \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \sigma).$$

Очевидно, що E — це замкнена підмножина квадрата Q. Звуження $f|_E$ буде сукупно неперервною функцією на множині E, бо f — нарізно неперервна функція, а тому всі звуження $f|_{[0,1] \times \{y\}}$ і $f|_{\{x\} \times [0,1]}$ неперервні, крім того, всі множини $\Delta_y = [0,1] \times \{y\}$ і $\Delta^x = \{x\} \times [0,1]$ замкнені в E і E — це скінченне об'єднання множин такого типу, а саме, $E = (\bigcup\limits_{x \in \tau} \Delta^x) \bigcup (\bigcup\limits_{y \in \sigma} \Delta_y)$. За теоремою Тітце-Урисона існує така функція $g \in C$, що $g|_E = f|_E$. Тоді $g^x = f^x$ для всіх $x \in \tau$ і $g_y = f_y$ для всіх $y \in \sigma$, а значить

$$\|g - f\|^x = \|g^x - f^x\|_\infty = 0 < \varepsilon \quad \text{для всіх} \quad x \in \tau$$

і

$$\|g - f\|_y = \|g_y - f_y\|_\infty = 0 < \varepsilon \quad \text{для всіх} \quad y \in \sigma.$$

Звідси випливає, що $f \in \overline{C}$.

З теорем 10 і 11 негайно отримуємо рівність $\overline{P} = S$. □

Теорема 12. *Простір S з топологією пошарової рівномірної збіжності сепарабельний.*

Доведення. Розглянемо множину R всіх многочленів

$$r(x,y) = \sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k} x^j y^k$$

на квадраті Q з раціональними коефіцієнтами $a_{j,k}$. Нескладно переконатися у тому, що множина R злічeнна.

Оскільки $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, то, як легко перевірити, для довільного $\varepsilon > 0$ і кожного многочлена g з P існує такий многочлен $r \in R$, що $\|g - r\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. За теоремою 9 для кожної функції $f \in S$, довільних точок $x_1, \ldots, x_n$ і $y_1, \ldots, y_m$ з $[0,1]$ існує такий многочлен $g \in P$, що

$\|f-g\|^{x_k} \le \frac{\varepsilon}{2}$ і $\|f-g\|_{y_j} \le \frac{\varepsilon}{2}$ для $k = 1, \dots, n$ і $j = 1, \dots, m$. Знайшовши для цього многочлена $g \in P$ відповідний многочлен $r \in R$, ми отримаємо, що

$$\|f-r\|^{x_k} = \|f^{x_k} - r^{x_k}\|_\infty \le \|f^{x_k} - g^{x_k}\|_\infty + \|g^{x_k} - r^{x_k}\|_\infty \le \|f-g\|^{x_k} + \|g-r\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

і аналогічно

$$\|f-r\|_{y_j} \le \|f-g\|_{y_j} + \|g-r\|_\infty \le \varepsilon$$

для довільних $k = 1, \dots, n$ і $j = 1, \dots, m$. Тому $\overline{R} = S$, отже, S — сепарабельний простір. $\square$

Автори висловлюють вдячність А.В. Загороднюку за стимулюючу участь у обговореннях і корисні пропозиції.

References

[1] Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. On sequential closure of polynomials in the space of separately continuous functions. In: Proc. of the Sci. Conf. "Algebra, Topology, Analysis, Stochastics", Mykulychyn, Ukraine, September 20-23, 2012, Ivano-Frankivsk, 2012, 3–5. (in Ukrainian)

[2] Engelking P. General Topology. Mir, Moskow, 1986. (in Russian)

[3] Maslyuchenko V., Voloshyn H. Closure of the set of polynomials in the space of separately continuous functions. In: Proc. of the Intern. Conf. dedicated to the 120th anniversary of S. Banach, Lviv, Ukraine, September 17–21, 2012, Lviv, 2012, 97.

[4] Maslyuchenko V.K. First types of topological vector spaces. Ruta, Chernivtsi, 2002. (in Ukrainian)

Надійшло 03.01.2013

Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *The topologization of the space of separately continuous functions*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 199–207.

Here we introduce locally convex topology $\mathcal{T}$ of the layer uniform convergence on the space $S = CC[0,1]^2$ of all separately continuous functions $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, we prove that the space $(S, \mathcal{T})$ is complete and it is not metrizable one, the space P of all polynomials of two variables on $[0,1]^2$ is everywhere dense in S, and so, S is separable.

Key words and phrases: separately continuous functions, polynomials of two variables, topology of the layer uniform convergence, completeness, Hausdorff property, metrizability, separability.

Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Топологизация пространства раздельно непрерывных функций* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 199–207.

Здесь мы вводим локально выпуклую топологию $\mathcal{T}$ послойной равномерной сходимости на пространстве $S = CC[0,1]^2$ всех раздельно непрерывных функций $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, доказываем, что пространство $(S, \mathcal{T})$ полно, неметризируемо и что пространство P всех многочленов от двух переменных на $[0,1]^2$ всюду плотно в S, следовательно S — сепарабельно.

Ключевые слова и фразы: раздельно непрерывные функции, многочлены от двух переменных, топология послойной равномерной сходимости, полнота, гаусдорфовость, метризуемость, сепарабельность.