ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 231–241 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №2, С.231–241
doi:10.15330/cmp.5.2.231-241

Довгай Б.В.

ОЦІНКА РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМУ РОЗВ'ЯЗКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ОРЛІЧЕВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Ми розглядаємо гіперболічне рівняння з однорідними початковими і граничними умовами та Орлічевою правою частиною. За умов існування розв'язку у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду отримано оцінку розподілу супремуму розв'язку такої задачі. Наведено приклади строго Орлічевих випадкових полів, що задовольняють ці умови.

Ключові слова і фрази: гіперболічне рівняння, розподіл супремуму, Орлічеве випадкове поле.

Taras Shevchenko National University, 64/13 Volodymyrska str., 01601, Kyiv, Ukraine
E-mail: bogdov@gmail.com

Вступ

У роботі ми розглядаємо першу задачу математичної фізики для гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною. Такі задачі розглянуто в роботах [1]–[10]. В статті [10] були одержані достатні умови існування розв'язку такої задачі у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду в термінах коваріаційної функції строго Орлічевого випадкового поля, що стоїть в правій частині рівняння. В даній роботі за цих умов знаходимо оцінку розподілу супремуму розв'язку. Крім того, тут наведено приклади строго Орлічевих випадкових полів, що задовольняють ці умови.

1 Оцінка розподілу супремуму

Наступна теорема є частинним випадком теореми 2.2 та леми 2.3 з роботи [11].

Теорема 1 ([11]). *Нехай (T,ρ) — метричний (псевдометричний) компактний простір, $N(u)$ — метрична масивність простору (T,ρ), тобто мінімальне число замкнених куль радіуса u, що покривають (T,ρ), $X=\{X(t),t\in T\}$ — сепарабельний випадковий процес із простору $L_U(\Omega)$, де для U виконується g-умова. Нехай існує така функція $\sigma=\left\{\sigma(h), 0\le h\le \sup\limits_{t,s\in T}\rho(t,s)\right\}$, що $\sigma(h)$ монотонно зростає, неперервна та $\sigma(0)=0$ і $\sup\limits_{\rho(t,s)\le h}\|X(t)-X(s)\|_U\le\sigma(h)$. Якщо для деякого $\varepsilon>0$ виконується умова*

$$\int_0^{\varepsilon}\chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du<\infty, \tag{1}$$

УДК 519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60G60, 60G17.

де

$$\chi_U = \begin{cases} n, & n < U(z_0) \\ C_U U^{(-1)}(n), & n \geq U(z_0), \end{cases} \tag{2}$$

$C_U = K(1+U(z_0))\max\{1, A\}$, z_0, K, A *— константи з означення* g*-умови,* $\sigma^{(-1)}(u)$ *— функція, обернена до* $\sigma(h)$*, то з імовірністю одиниця випадкова величина* $\sup_{t\in T}|X(t)|$ *належить простору* $L_U(\Omega)$ *та*

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\|_U \leq \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_0\theta}\chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du = B(t_0,\theta), \tag{3}$$

де t_0 *— довільна точка з* T*,* $w_0 = \sigma\left(\sup_{t\in T}\rho(t_0,t)\right)$*,* $0 < \theta < 1$*. Крім того, для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}. \tag{4}$$

Наслідок 1. *Візьмемо в теоремі 1 простір* $T = \{0 \leq x \leq b,\ c \leq t \leq d\}$ *з метрикою* $\rho((x,t),(y,s)) = \max\{|x-y|,|t-s|\}$*. Тоді умова* (1) *виконується, якщо для деякого* $\varepsilon > 0$ *виконується умова*

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du < \infty, \tag{5}$$

а

$$B(t_0,\theta) \leq \widetilde{B}(t_0,\theta) = \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_0\theta}\chi_U\left(\left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du,$$

та для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{\widetilde{B}(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}. \tag{6}$$

Доведення. Наслідок випливає з того, що в цьому випадку $N(u) \leq \left(\frac{b}{2u}+1\right)\left(\frac{d-c}{2u}+1\right)$. □

Нехай $T > 0$ — деяка стала, функція $q(x)$, $x \in [0,\pi]$, — така неперервно диференційовна функція, що $q(x) \geq 0$, $\xi(x,t)$, $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$, — вибірково неперервне з імовірністю 1 випадкове поле.

Розглянемо першу крайову задачу для неоднорідного гіперболічного рівняння з нульовими початковими та крайовими умовами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\xi(x,t), \quad x \in [0,\pi], \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \tag{8}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0. \tag{9}$$

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля

$$\frac{d^2X}{dx^2} - qX + \lambda X = 0, \tag{10}$$

$$X(0) = X(\pi) = 0. \tag{11}$$

Нехай $X_n(x)$ — ортонормовані з вагою ρ власні функції цієї задачі, а λ_n — відповідні власні значення. Будемо вважати, що λ_n занумеровані в порядку зростання. Завдяки обмеженням на q всі власні значення додатні і нуль не є власним значенням [12].

Позначимо $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, $B(x, y, t, s) = \mathsf{E}\xi(x, t)\xi(y, s)$, $(x, y, t, s) \in [0, \pi]^2 \times [0, T]^2$. Припустимо, що $B(0, y, t, s) = B(\pi, y, t, s) = 0$, $y \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$; $B(x, 0, t, s) = B(x, \pi, t, s) = 0$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$.

Для кожної фіксованої пари $(t, s) \in [0, T]^2$ продовжимо функцію $B(x, y, t, s)$ як функцію від x, y на всю площину $\mathbb{R}^2$ так, щоб вона була періодичною функцією з періодом 2π по x та по y і щоб виконувались тотожності $B(-x, y, t, s) = -B(x, y, t, s) = B(x, -y, t, s)$. Внаслідок нашого припущення таке продовження можливе.

Позначимо

$$B_{i,j}(x, y, t, s) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} B(x, y, t, s), \quad 0 \le i, j \le 2;$$

$$\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B(x, y, t, s) = B(x + \delta_1, y + \delta_2, t, s) - B(x + \delta_1, y, t, s) - B(x, y + \delta_2, t, s) + B(x, y, t, s);$$

$$\Delta_{x,\delta} B(x, y, t, s) = B(x + \delta, y, t, s) - B(x, y, t, s);$$

$$\Delta_{y,\delta} B(x, y, t, s) = B(x, y + \delta, t, s) - B(x, y, t, s);$$

$$\widetilde{B}(x, y, t, s) = B(x, y, t, t) - B(x, y, t, s) - B(x, y, s, t) + B(x, y, s, s).$$

Теорема 2 ([10]). *Нехай у (7) $\xi(x, t)$ — центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g-умову (тобто $\exists z_0 \ge 0\ \exists K > 0\ \exists A > 0\ \forall x \ge z_0\ \forall y \ge z_0$: $U(x)U(y) \le AU(Kxy)$). Нехай $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$, — неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$, така, що функція $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \ge 0$. Припустимо, що при всіх $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$ існує неперервна похідна $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x, y, t, s)$ та для деяких неперервних функцій $\tau(\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 \ge 0$, $\delta_2 \ge 0$, та $\tau(\delta)$, $\delta \ge 0$, таких, що $\tau(\delta_1, \delta_2) > 0$ при $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\tau(0, \delta_2) = \tau(\delta_1, 0) = 0$, $\tau(\delta_1, \delta_2)$ монотонно зростає по δ_1 та δ_2, $\tau(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\tau(0) = 0$, $\tau(\delta)$ монотонно зростає, виконуються умови:*

– *збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{m}\right)}{km} \varphi(k^2)\varphi(m^2) < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{km^2} \varphi(k^2)\varphi(m^2) < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k^2 m} \varphi(k^2)\varphi(m^2) < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 m^2} \varphi(k^2)\varphi(m^2) < \infty;$$

– *для довільного $\varepsilon > 0$*

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^2\right) dv < \infty; \tag{12}$$

– *для всіх* $0 \le i, j \le 1$ *існують такі константи* $C_{1,i,j} > 0,\ C_{2,i,j} > 0,\ C_{3,i,j} > 0$*, що*

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dxdy \le C_{1,i,j}\tau(\delta_1,\delta_2),$$

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}} \int_{0}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dx\right) dy \le C_{2,i,j}\tau(\delta),$$

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}} \int_{0}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dy\right) dx \le C_{3,i,j}\tau(\delta);$$

– *для всіх* $0 \le i, j \le 1$ *існують такі константи* $M_{i,j} > 0$*, що*

$$\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right| \le \frac{M_{i,j}}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Тоді ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\frac{1}{\mu_n}\int_0^t \sin\mu_n(t-u)\zeta_n(u)\,du, \tag{13}$$

де

$$\zeta_n(t) = \int_0^{\pi} \xi(x,t)X_n(x)\,dx, \tag{14}$$

збігається рівномірно за ймовірністю в області $[0,\pi]\times[0,T]$ *(*$T > 0$ *— деяка стала), рівномірно за ймовірністю збігаються ряди, отримані з* (13) *почленним диференціюванням один та два рази по* t *і один та два рази по* x*, та з імовірністю одиниця задача* (7)–(9) *має розв'язок, який можна зобразити у вигляді ряду* (13).

Лема 1. *Нехай виконуються умови теореми 2. Позначимо*

$$V_N(x,t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} X_k(x)\frac{1}{\mu_k}\int_0^t \sin\mu_k(t-u)\zeta_k(u)du. \tag{15}$$

Тоді для всіх $h > 0$ *при* $x, y \in [0,\pi],\ t,s\in[0,T],\ N\ge 0$ *має місце нерівність*

$$\sup_{\substack{|x-y|\le h\\ |t-s|\le h}} \left(\mathsf{E}|V_N(x,t)-V_N(y,s)|^2\right)^{1/2} \le D_N\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)}, \tag{16}$$

де

$$D_N = T\max\{L, 2C_X\}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}C_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\right)^{1/2}$$
$$+C_X\Bigg(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}C_{k,m}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\Bigg)^{1/2},$$

L, C_X *— константи, визначені в лемі 2 роботи [8],* $C_{k,m} = \sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}} |\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|$.

Доведення. Для будь-яких $x, y \in [0,\pi]$, $t, s \in [0,T]$, $N \geq 1$, маємо

$$\left(\mathsf{E}\left|V_N(x,t) - V_N(y,s)\right|^2\right)^{1/2} = \left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}(X_k(x)-X_k(y))\int_0^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}X_k(y)\left(\int_0^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du - \int_0^s \zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\right)\right|^2\right)^{1/2} \leq A_1 + A_2,$$

де

$$A_1 = \left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}(X_k(x)-X_k(y))\int_0^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du\right|^2\right)^{1/2},$$

$$A_2 = \left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}X_k(y)\left(\int_0^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du - \int_0^s \zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Позначимо $R_{k,m}(t,s) = \int_0^t\int_0^s \sin\mu_k(t-u)\sin\mu_m(s-v)\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)dvdu$. Тоді

$$A_1^2 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}|X_k(x)-X_k(y)||X_m(x)-X_m(y)||R_{k,m}(t,t)|.$$

З лем 2, 3 роботи [8] випливає, що $|X_k(x)-X_k(y)| \leq \max\{L, 2C_X\}\frac{\varphi(\mu_k^2+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|x-y|}+v_0\right)}$. Крім того,

$$|R_{k,m}(t,s)| \leq C_{k,m}\int_0^t\int_0^s |\sin\mu_k(t-u)\sin\mu_m(s-v)|dvdu \leq T^2 C_{k,m}.$$

Отже,

$$A_1^2 \leq T^2\left(\max\{L,2C_X\}\right)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}C_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\left(\varphi\left(\frac{1}{|x-y|}+v_0\right)\right)^{-2}.$$

$$A_2^2 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}|X_k(y)||X_m(y)|\left|\mathsf{E}\left(\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du - \int_0^s\zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^t \zeta_m(v)\sin\mu_m(t-v)dv - \int_0^s\zeta_m(v)\sin\mu_m(s-v)dv\right)\right|.$$

Нехай для визначеності $s \leq t$. Тоді

$$\int_0^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du - \int_0^s \zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du$$

$$= \int_0^s \zeta_k(u)\left(\sin\mu_k(t-u) - \sin\mu_k(s-u)\right)du + \int_s^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du.$$

Отже, $A_2^2 \leq C_X^2 \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}d_{k,m}(s,t)$, де

$$d_{k,m}(s,t) = \left|\mathsf{E}\left(\int_0^s \zeta_k(u)(\sin\mu_k(t-u) - \sin\mu_k(s-u))du + \int_s^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^s \zeta_m(v)(\sin\mu_m(t-v) - \sin\mu_m(s-v))dv + \int_s^t \zeta_m(v)\sin\mu_m(t-v)dv\right)\right|.$$

При доведенні леми 2 з роботи [8] було показано, що

$$d_{k,m}(s,t) \le C_{k,m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Отже,

$$A_2^2 \le C_X^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}C_{k,m}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

□

Зауваження 1. *З леми 1 роботи [10] випливає, що за умов теореми 2 при $k \ge 1$ та $m \ge 1$ має місце нерівність*

$$C_{k,m} \le \widehat{C}_{k,m} = \sum_{i,j=0}^{1}\frac{C_q^{2-i-j}}{\mu_k^2\mu_m^2}\left(\frac{C_{1,i,j}\tau(\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{m})}{8\pi}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{LC_{2,i,j}\tau(\frac{\pi}{k})}{4m}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{LC_{3,i,j}\tau(\frac{\pi}{m})}{4k}+\frac{C_{G,i,j}}{km}\right), \quad (17)$$

де $C_q = \sup\limits_{0\le x\le\pi}|q(x)|$, $C_{G,i,j} = L^2\pi^2\max\limits_{\substack{x,y\in[0,\pi]\\ t,s\in[0,T]}}|B_{2i,2j}(x,y,t,s)|$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{x\in[0,\pi]\\ t\in[0,T]}}|V_N(x,t)|>\varepsilon\right\} \le \left(U\left(\frac{\varepsilon}{\widehat{B}_N(\theta)}\right)\right)^{-1}, \quad (18)$$

де

$$\widehat{B}_N(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_{0N}\theta}\chi_U\Bigg(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{u}\right)-v_0\right)+1\right)$$
$$\times\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{u}\right)-v_0\right)+1\right)\Bigg)du, \quad (19)$$

$$w_{0N} = \frac{C_\Delta\widehat{D}_N}{\varphi\left(\frac{1}{\max\{\pi,T\}}+v_0\right)},$$

$$\widehat{D}_N = T\max\{L,2C_X\}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\widehat{C}_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\right)^{1/2}$$
$$+C_X\Bigg(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\widehat{C}_{k,m}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\Bigg)^{1/2},$$

C_Δ — *константа з означення строго Орлічевої сім'ї випадкових величин.*

Доведення. Покладемо в теоремі 1 $t_0 = (0,0)$. Тоді $\|X(t_0)\|_U = \|V_N(0,0)\|_U = 0$. В нашому випадку $b = \pi$, $d - c = T$, $\sigma(h) = \frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)}$, $h > 0$. Тому $\sigma^{(-1)}(u) = \frac{1}{\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{u}-v_0\right)}$, $u > 0$.

Умова (5) набуває вигляду

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{u}\right)-v_0\right)+1\right)\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{u}\right)-v_0\right)+1\right)\right) < \infty$$

і виконується, бо виконується умова (12). Зауважимо, що

$$w_0 = \sigma\left(\max\{\pi, T\}\right) = \frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{\varphi\left(\frac{1}{\max\{\pi,T\}}+v_0\right)} = w_{0N}.$$

Крім того, за лемою 1 та зауваженням 1 для всіх $h > 0$

$$\sup_{\max\{|x-y|,|t-s|\}\le h} \|V_N(x,t)-V_N(y,s)\|_U$$
$$\le C_\Delta \sup_{\max\{|x-y|,|t-s|\}\le h}\left(\mathsf{E}\left(V_N(x,t)-V_N(y,s)\right)^2\right)^{1/2} \le \sigma(h).$$

Тому твердження теореми випливає з теореми 1 та наслідку 1. □

2 Приклади

Наведемо приклад випадкового поля $\xi(x,t)$, для якого виконуються умови теореми 2, а, отже, і оцінка теореми 3.

Приклад 1. *Нехай $U(x) = |x|^p$, тобто $L_U(\Omega) = L_p(\Omega)$, при $p > 4$. Розглянемо випадкове поле $\xi(x,t) \in L_p(\Omega)$, $p > 4$, що можна представити у вигляді*

$$\xi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k a_k f_k(x)\varphi_k(t),$$

де η_k, $k \ge 1$, — однаково розподілені незалежні центровані строго Орлічеві випадкові величини, $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$, $f_k(x)$ — двічі неперервно диференційовні, $\varphi_k(t)$ — неперервні функції, a_k — деякі сталі, $f_k(0) = f_k(\pi) = 0$, $\mathsf{E}\eta_k^2 = m^2$, $\mathsf{E}\eta_k = 0$.

Тоді коваріаційна функція має вигляд

$$B(x,y,t,s) = \mathsf{E}\xi(x,t)\xi(y,s) = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 f_k(x) f_k(y)\varphi_k(t)\varphi_k(s).$$

Нехай $\forall 0 \le i \le 1$, $\forall k \ge 1$ мають місце нерівності

$$|\varphi_k(t)-\varphi_k(s)| \le d_{\varphi k}|t-s|^\beta,\ \ \frac{2}{p} < \beta < \frac{1}{2}; \qquad |\varphi_k(t)| \le D_{\varphi k};$$
$$|f_k^{(2i)}(x+\delta) - f_k^{(2i)}(x)| \le d_{fik}\delta^\alpha,\ \ \alpha > 2\beta; \qquad |f_k^{(2i)}(x)| \le D_{fik};$$

та для всіх $0 \le i, j \le 1$ збігаються ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik} \max\{d_{fjk}, D_{fjk}\} < \infty; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik} D_{fjk} < \infty.$$

Візьмемо $v_0 = 0$; $\varphi(\lambda) = \lambda^{\beta}$, $\lambda > 0$, $\dfrac{2}{p} < \beta < \dfrac{1}{2}$ $(p > 4)$; $\tau(\delta_1, \delta_2) = (\delta_1\delta_2)^{\alpha}$, $\tau(\delta) = \delta^{\alpha}$, $\alpha > 2\beta$. *Тоді*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{m}\right)}{km}\varphi(k^2)\varphi(m^2) = \pi^{2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(km)^{1+\alpha-2\beta}} < \infty,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{km^2}\varphi(k^2)\varphi(m^2) = \pi^{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\alpha-2\beta}m^{2-2\beta}} < \infty,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k^2m}\varphi(k^2)\varphi(m^2) = \pi^{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2-2\beta}m^{1+\alpha-2\beta}} < \infty,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^2m^2}\varphi(k^2)\varphi(m^2) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2-2\beta}m^{2-2\beta}} < \infty.$$

Оскільки $U(x) = |x|^p$, $x \in \mathbb{R}$, $p > 4$; $\varphi(\lambda) = \lambda^{\beta}$, $\lambda > 0$, $\dfrac{2}{p} < \beta < \dfrac{1}{2}$; *то* $U^{(-1)}(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $x \geq 0$; $\varphi^{(-1)}(x) = \lambda^{\frac{1}{\beta}}$, $\lambda > 0$. *Тоді* $\forall \varepsilon > 0$ *при* $\beta > \frac{2}{p}$

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^2\right)dv = \int_0^{\varepsilon}\left(\left(\frac{1}{v^{1/\beta}}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}}dv = \int_0^{\varepsilon}\frac{1}{v^{\frac{2}{\beta p}}}dv = \frac{\varepsilon^{1-\frac{2}{\beta p}}}{1-\frac{2}{\beta p}} < \infty.$$

Розглянемо $B_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2 f_k^{(2i)}(x) f_k^{(2j)}(y)\varphi_k(t)\varphi_k(s)$. *Тоді*

$$\Delta_{2,\delta_1,\delta 2}B_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\varphi_k(t)\varphi_k(s)\left(f_k^{(2i)}(x+\delta_1) - f_k^{(2i)}(x)\right)\left(f_k^{(2j)}(y+\delta_2) - f_k^{(2j)}(y)\right),$$
$$\Delta_{x,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\varphi_k(t)\varphi_k(s)(f_k^{(2i)}\left(x+\delta\right) - f_k^{(2i)}(x)\Big) f_k^{(2j)}(y),$$
$$\Delta_{y,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\varphi_k(t)\varphi_k(s) f_k^{(2i)}(x)\left(f_k^{(2j)}(y+\delta) - f_k^{(2j)}(y)\right),$$
$$\widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s) = m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 f_k^{(2i)}(x) f_k^{(2j)}(y)\left(\varphi_k(t) - \varphi_k(s)\right)^2.$$

За наших умов $\forall 0 \leq i,j \leq 1$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik}\max\{d_{fjk}, D_{fjk}\} < \infty$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik}D_{fjk} < \infty$. *Тоді*

$$\left|\Delta_{2,\delta_1,\delta 2}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| \leq (\delta_1\delta_2)^{\alpha} m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik}d_{fjk},$$
$$|\Delta_{x,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s)| \leq \delta^{\alpha}m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik}D_{fjk},$$
$$|\Delta_{y,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s)| \leq \delta^{\alpha}m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 D_{\varphi k}^2 D_{fik}d_{fjk},$$
$$|\widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)| \leq |t-s|^{2\beta}m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik}D_{fjk}.$$

Отже,

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le s\le T}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{2,\delta_1,\delta_2}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right|dxdy \le 4\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2d_{fik}d_{fjk}\cdot(\delta_1\delta_2)^{\alpha},$$

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le s\le T}}\int_{0}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{x,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right|dx\right)dy \le 2\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2d_{fik}D_{fjk}\cdot\delta^{\alpha},$$

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le s\le T}}\int_{0}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{y,\delta}B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right|dy\right)dx \le 2\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2D_{fik}d_{fjk}\cdot\delta^{\alpha},$$

$$\left|\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right| \le \pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2d_{\varphi k}^2D_{fik}D_{fjk}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{|t-s|}\right)^{2\beta}}.$$

Таким чином, умови теореми 2 виконуються для $v_0=0$; $\varphi(\lambda)=\lambda^{\beta}$, $\frac{2}{p}<\beta<\frac{1}{2}$; $\tau(\delta_1,\delta_2)=(\delta_1\delta_2)^{\alpha}$, $\tau(\delta)=\delta^{\alpha}$, $\alpha>2\beta$;

$$C_{1,i,j}=4\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2d_{fik}d_{fjk},\qquad C_{2,i,j}=2\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2d_{fik}D_{fjk},$$
$$C_{3,i,j}=2\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{\varphi k}^2D_{fik}d_{fjk},\qquad M_{i,j}=\pi^2m^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2d_{\varphi k}^2D_{fik}D_{fjk}.$$

Виберемо тепер конкретний процес $\xi(x,t)$, для якого виконуються умови прикладу 1.

Приклад 2. *Розглянемо* $\xi(x,t)\in L_5(\Omega)$ *та однаково розподілені незалежні строго Орлічеві випадкові величини* η_k, *для яких* $\mathsf{E}\eta_k^2=1$, $\mathsf{E}\eta_k=0$. *Припустимо, що випадковий процес* $\xi(x,t)$ *записується у вигляді* $\xi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\frac{1}{k^4}\sin kx\cos kt$, *де* $0\le x\le\pi$, $0\le t\le T$. *Тобто* $p=5$, $a_k=\frac{1}{k^4}$, $m=1$, $\varphi_k(t)=\cos kt$, $f_k(x)=\sin kx$, $f_k^{(2)}(x)=(\sin kx)''=(k\cos kx)'=-k^2\sin kx$.

Зауважимо, що оскільки $\forall x\in\mathbb{R}$: $|\sin x|\le|x|$, *то при* $\frac{2}{5}<\beta<\frac{1}{2}$ *для* $|x|\le1$: $|\sin x|\le|x|\le|x|^{\beta}$; *для* $|x|>1$: $|\sin x|\le1\le|x|^{\beta}$; *тобто* $|\sin x|\le|x|^{\beta}$ *при* $x\in\mathbb{R}$.

Покладемо $\beta=\frac{3}{7}$, $\alpha=1$. *Тоді* $\frac{2}{5}<\beta<\frac{1}{2}$, $\alpha>2\beta$.

$$f_k^{(2i)}(x)=(-1)^ik^{2i}\sin kx,\ 0\le i\le1;$$
$$\left|f_k^{(2i)}(x+\delta)-f_k^{(2i)}(x)\right|=\left|(-1)^ik^{2i}\sin k(x+\delta)-(-1)^ik^{2i}\sin kx\right|$$
$$=k^{2i}\left|\sin kx(x+\delta)-\sin kx\right|=2k^{2i}\left|\sin\frac{k\delta}{2}\cos\frac{k(2x+\delta)}{2}\right|$$
$$\le 2k^{2i}\left|\sin\frac{k\delta}{2}\right|\le 2k^{2i}\frac{k\delta}{2}=k^{1+2i}\delta;$$
$$\left|f_k^{(2i)}(x)\right|=k^{2i}|\sin kx|\le k^{2i};$$
$$|\varphi_k(t)-\varphi_k(s)|=|\cos kt-\cos ks|=2\left|\sin\frac{k(t-s)}{2}\sin\frac{k(t+s)}{2}\right|$$
$$\le 2\left|\sin\frac{k(t-s)}{2}\right|\le 2\left(\frac{k|t-s|}{2}\right)^{\frac{3}{7}}=2^{\frac{4}{7}}k^{\frac{3}{7}}|t-s|^{\frac{3}{7}};$$

$$|\varphi_k(t) - \varphi_k(s)| = |\cos kt - \cos ks| = 2\left|\sin\frac{k(t-s)}{2}\sin\frac{k(t+s)}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{k(t-s)}{2}\right|$$

$$\le 2\left(\frac{k|t-s|}{2}\right)^{\frac{3}{7}} = 2^{\frac{4}{7}}k^{\frac{3}{7}}|t-s|^{\frac{3}{7}};$$

$$|\varphi_k(t)| = |\cos kt| \le 1.$$

Отже,

$$d_{fik} = k^{1+2i};\ d_{\varphi k} = 2^{\frac{4}{7}}k^{\frac{3}{7}};\ D_{fik} = k^{2i};\ D_{\varphi k} = 1.$$

Оскільки $a_k = \frac{1}{k^4}$*, то при* $0 \le i, j \le 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik} \max\{d_{fjk}, D_{fjk}\} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{1+2i}k^{1+2j}}{k^8} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik} D_{fjk} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{4}{7}}k^{\frac{3}{7}}k^{2i}k^{2j}}{k^8} \le 2^{\frac{4}{7}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3+\frac{4}{7}}} < \infty$$

і умови теореми 2 виконуються для $\varphi(\lambda) = \lambda^{\frac{3}{7}};\ \tau(\delta_1, \delta_2) = \delta_1\delta_2;\ \tau(\delta) = \delta.$

ВИСНОВКИ

За умов існування розв'язку гіперболічного рівняння з нульовими початковими та граничними умовами та строго Орлічевою випадковою правою частиною у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду знайдено оцінку розподілу супремуму розв'язку рівняння. Наведено приклади строго Орлічевих випадкових полів, що задовольняють ці умови.

REFERENCES

[1] Dovhai B.V. *Justification of the Fourier method for an inhomogeneous hyperbolic equation with random right-hand side*. Ukrainian Math. J. 2004, **56** (5), 616–624. (in Ukrainian)

[2] Dovhai B.V. *Properties of a Solution of an Inhomogeneous Hyperbolic Equation with Random Right-Hand Side*. Ukrainian Math. J. 2005, **57** (4), 474–482. (in Ukrainian)

[3] Dovhai B.V. *Solving hyperbolic equations with Gaussian right-hand side of a special form by Fourier method*. Bull. Kyiv Univ., Phys. Math. Series 2005, **3**, 31–36. (in Ukrainian)

[4] Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. *The condition for application of Fourie method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right hand side*. Random operators and stochastic equations 2005, **13** (3), 281–296. doi:10.1515/156939705774286074

[5] Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. *Properties of solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right side*. Random operators and stochastic equations 2009, **17** (3), 221–241. doi:10.1515/ROSE.2009.016

[6] Dovhai B.V. *Generalized solutions of hyperbolic equations with φ-subgaussian right-hand side*. Theory of Probability and Mathematical Statistics 2009, **81**, 25–30. (in Ukrainian)

[7] Dovhai B.V. *Simulation of solution of hyperbolic equations*. Bull. Kyiv Univ., Phys. Math. Series 2011, **3**, 18–23. (in Ukrainian)

[8] Dovhai B.V. *Hyperbolic equations with Orlicz right-hand side*. Sci. Bull. Uzhgorod Univ., Math. Inform. Series 2011, **22** (2), 64–78. (in Ukrainian)

[9] Dovhai B.V. *Generalized solutions of the hyperbolic equation with Orlicz right part*. Bull. Kyiv Univ., Phys. Math. Series 2012, **1**, 13–17. (in Ukrainian)

[10] Dovhai B.V. *The equations of string oscillation with Orlicz right part.* Sci. Bull. Uzhgorod Univ., Math. Inform. Series 2013, **24** (1), 34–45. (in Ukrainian)

[11] Kozachenko Yu.V., Perestyuk M.M. *On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables. I.* Ukrainian Math. J. 2007, **59** (12), 1850–1869. doi:10.1007/s11253-008-0030-y (translation of Ukrainian Math. Zhurn. 2007, **59** (12), 1647–1659 (in Ukrainian))

[12] Polozhii G.N. Equations of mathematical physics. Vysshaya Shkola, Moscow, 1964. (in Russian)

Надійшло 25.08.2013

Dovhai B.V. *The estimation of supremum distribution of solution of hyperbolic equations with Orlicz right side*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 231–241.

We consider the hyperbolic equation with homogeneous initial and boundary conditions and Orlicz right side. An estimate of supremum distribution of the problem solution is obtained in case of existence of a solution in the form of uniformly convergent in probability series. Examples of strictly Orlicz random fields that satisfy these conditions are showed.

Key words and phrases: hyperbolic equation, supremum distribution, Orlicz random field.

Довгай Б.В. *Оценка распределения супремума решения гиперболического уравнения с Орличевой правой частью* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 231–241.

Рассматривается гиперболическое уравнение с однородными начальными и граничными условиями и Орличевой правой частью. В условиях существования решения в виде равномерно сходящегося по вероятности ряда получена оценка распределения супремума решения такой задачи. Приведены примеры строго Орличевых случайных полей удовлетворяют этим условиям.

Ключевые слова и фразы: гиперболическое уравнение, распределение супремума, Орличевое случайное поле.