ISSN 2075-9827 **http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp**
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 242–248 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №2, С.242–248
doi:10.15330/cmp.5.2.242-248

Заторский Р., Пылыпив В., Гулька С.

О НЕКОТОРЫХ СВЯЗАННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Работа посвящена перечислению разбиений некоторых классов мультимножеств, n-вершинных регулярных графов второй степени и битрансверсалей квадратных матриц n-го порядка.

Ключевые слова и фразы: матрица, битрансверсаль, остовный 2-граф, регулярный граф, мультимножество.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: romazz@rambler.ru (Заторский Р.)

Вступление

Перечислительные методы комбинаторной математики являются исторически первыми и центральными методами комбинаторной теории [1]. Они одинаково эффективно применяются в различных областях дискретной математики. В настоящей статье изучается связь между некоторыми комбинаторными задачами теории графов, теории матриц и теории мультимножеств.

Классической задачей комбинаторики множеств является задача о перечислении их разбиений на подмножества [2]. Аналогичные задачи для мультимножеств почти не исследованы. Поэтому любые, хотя бы частичные, результаты в этом направлении исследований важны. Одной из таких задач является задача перечисления всех разбиений мультимножества $\{x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2\}$ в сумму двухэлементных множеств.

Перечисление Кэли [3] изомеров насыщенных углеродов C_nH_{2n+2} и исследование Кирхгофом [4] электрических цепей при помощи теории графов сыграли важную роль в химии изомеров и теории электрических цепей. Следовательно, важным направлением комбинаторной математики является перечисление различных классов помеченных и непомеченных графов [5], например, задача о перечислении всех регулярных n-вершинных помеченных графов и мультиграфов степени 2.

При построении различных функций матриц приходится иметь дело с перечислением различного рода трансверсалей. Например, при построении, так называемых, бидетерминантов и биперманентов квадратных матриц, аналогичных детерминантам и перманентам возникает задача о перечислении всех $T(n)$ битрансверсалей квадратных матриц — набора $2n$ элементов квадратной матрицы n-го порядка, в который входит по два элемента из каждой строчки и каждого столбца этой матрицы. Эта задача имеет

УДК 512.64
2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.

© Заторский Р., Пылыпив В., Гулька С., 2013

длинную историю. В 1966 году индийские математики Г. Ананд, В.С. Думир и Г. Гупта [6] получили рекуррентное соотношение

$$T(n) = \frac{n(n-1)^2}{2}\big((2n-3)T(n-2) + (n-2)^2 T(n-3)\big),$$

которое в работе [7] получило вид $T(n) = \frac{n(n-1)}{2}\big(2T(n-1) + (n-1)T(n-2)\big)$. В. Тараканов [8] получил выражение $T(n)$ с помощью неупорядоченных разбиений натурального числа n :

$$T(n) = \sum_{2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{(n!)^2}{\prod_{r=2}^{n} \lambda_r!(2r)^{\lambda_r}},$$

а Д. Кнут — асимптотическую формулу $T(n) \sim 2\sqrt{\pi} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n-\frac{1}{2}}$.

Битрансверсали квадратных матриц интересны также тем, что с их помощью можно строить дважды стохастические матрицы.

В статье изучаются связи битрансверсалей квадратных матриц с регулярными графами второй степени и некоторым классом мультимножеств. Также получено выражение числа битрансверсалей квадратной матрицы через параперманент треугольной матрицы.

1 Предварительные сведения

Напомним некоторые понятия и утверждения необходимые для понимания статьи.

1.1 Трансверсали и матрицы. Парафункции треугольных матриц

Понятие трансверсали является важным понятием комбинаторного анализа. В общем случае под $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$*-трансверсаллю упорядоченного семейства* $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ *подмножеств множества* $A \neq \varnothing$*, называют упорядоченное семейство* $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ *подмножеств этого множества, удовлетворяющих условиям:*

$$T_i \subseteq S_i, \quad |T_i| = t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad T_i \cap T_j = \varnothing, \quad 1 \le i < j \le n.$$

Если в этом определении положить $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1$, то получим обыкновенную $(1, 1, \ldots, 1)$-трансверсаль, которую в литературе называют *системой различных представителей*. Если, кроме этого, положить $S_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е. рассматривать некоторую матрицу

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем считать, что вторые индексы элементов в $(1, 1, \ldots, 1)$-трансверсали не должны совпадать, то получим набор n элементов, взятых по одному из каждой строчки и каждого столбца матрицы. Такой набор называют трансверсаллю матрицы.

Определение 1.1. *Набор элементов квадратной матрицы, взятых по два из каждой строчки и каждого столбца, назовем битрансверсаллю этой матрицы.*

Отметим также, что при построении функций треугольных матриц (парадетерминанта и параперманента) используется понятие *монотрансверсали*.

Пусть K — некоторое числовое поле.

Определение 1.2. *Треугольную таблицу*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

чисел числового поля K назовем треугольной матрицей, элемент a_{11} — верхним элементом этой треугольной матрицы, а число n — ее порядком.

Каждому элементу a_{ij} треугольной матрицы (1) поставим в соответствие $(i-j+1)$ элементов a_{ik}, $k \in \{j, ..., i\}$, которые назовем *производными элементами* треугольной матрицы, порожденными *ключевым элементом* a_{ij}. Ключевой элемент треугольной матрицы одновременно является и его производным элементом. Произведение всех производных элементов, порожденных ключевым элементом a_{ij}, обозначим через $\{a_{ij}\}$ и назовем *факториальным произведением* этого ключевого элемента, т.е.

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Определение 1.3. *Если A — треугольная матрица* (1)*, то справедливы равенства:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

где суммирование производится по множеству натуральных решений уравнения $p_1 + \ldots + p_r = n$.

Определение 1.4. *Каждому элементу a_{ij} заданной треугольной матрицы* (1) *поставим в соответствие треугольную матрицу с этим элементом в левом нижнем углу, которую назовем углом заданной треугольной матрицы и обозначим через $R_{ij}(A)$.*

Очевидно, что угол $R_{ij}(A)$ является треугольной матрицей $(i-j+1)$–го порядка. В угол $R_{ij}(A)$ входят только те элементы a_{rs} треугольной матрицы (1), индексы которых удовлетворяют соотношениям $j \leqslant s \leqslant r \leqslant i$.

Ниже мы будем считать, что

$$\operatorname{ddet}(R_{01}(A)) = \operatorname{ddet}(R_{n,n+1}(A)) = \operatorname{pper}(R_{01}(A)) = \operatorname{pper}(R_{n,n+1}(A)) = 1.$$

Теорема 1 (Разложение парафункций по элементам последней строчки)**.** *Справедливы следующие тождества:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n+s} \{a_{ns}\} \cdot \operatorname{ddet}(R_{s-1,1}), \qquad \operatorname{pper}(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} \cdot \operatorname{pper}(R_{s-1,1}).$$

Более детально с этими и другими понятиями и утверждениями теории функций треугольных матриц можно познакомиться в [9].

1.2 Графы и циклы. Мультимножества и их разбиения

Граф называется *помеченным*, если все его вершины отличаются одна от другой какими-либо различными пометками, например, перенумерованы первыми натуральными числами. В противном случае граф называют *непомеченным*.

Замечание 1.1. *Помеченный граф при поворотах и симметриях не изменяется.*

Если все вершины графа имеют одинаковую степень r, то такой граф называют *регулярным* графом степени r.

Определение 1.5. *Мультимножеством A называют любой неупорядоченный набор элементов некоторого множества $[A]$, которое, в свою очередь, называют базисом мультимножества A.*

Определение 1.6. *Если мультимножество A состоит из k_1 элементов a_1, k_2 элементов a_2, $\ldots$, k_n элементов a_n, то считают, что это мультимножество имеет первичную спецификацию $S(A) = [a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}]$ и для удобства мультимножество A записывают в каноническом виде $A = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}$. Числа k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, называют показателями первичной спецификации мультимножества A.*

Под суммой двух мультимножеств $A = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_n^{a_n}\}$ и $B = \{x_1^{b_1}, x_2^{b_2}, \ldots, x_n^{b_n}\}$ понимают мультимножество

$$A + B = \{x_1^{a_1+b_1}, x_2^{a_2+b_2}, \ldots, x_n^{a_n+b_n}\}.$$

В связи с операцией *суммы мультимножеств* возникает задача перечисления всех *разбиений мультимножества* на ее подмультимножества. Эта задача обобщает аналогичную классическую задачу о разбиениях множества на подмножества.

2 Перечисление n-вершинных регулярных графов степени 2

Очевидно, что n-вершинный регулярный граф степени 2 состоит из одного или нескольких циклов без общих вершин. Следовательно между всеми непомеченными регулярными n-вершинными графами степени 2 и целыми неотрицательными решениями уравнения

$$3\lambda_3 + 4\lambda_4 + \ldots + n\lambda_n = n,$$

где λ_i — количество циклов длины i, существует взаимнооднозначное соответствие. Например, существует четыре непомеченные регулярные графы степени 2 с девятью вершинами: цикл длины 9, два цикла длины 3 и 6, два цикла длины 4 и 5 и три цикла длины 3. Этим регулярным графам соответствуют четыре целые неотрицательные решения

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0, \lambda_9 = 1,$$

$$\lambda_3 = \lambda_6 = 1, \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0,$$

$$\lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0, \lambda_4 = \lambda_5 = 1,$$

$$\lambda_3 = 3, \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0$$

уравнения

$$3\lambda_3+4\lambda_4+5\lambda_5+6\lambda_6+7\lambda_7+8\lambda_8+9\lambda_9=9. \qquad (2)$$

Если же рассматривать также непомеченные регулярные мультиграфы, то уравнение (2) следовало бы заменить уравнением

$$2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4+5\lambda_5+6\lambda_6+7\lambda_7+8\lambda_8+9\lambda_9=9$$

и к перечисленным выше наборам циклов следовало бы добавить также наборы, соответствующие решениям:

$$\lambda_2=\lambda_7=1, \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=\lambda_8=\lambda_9=0,$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1, \lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=\lambda_9=0,$$

$$\lambda_2=2, \lambda_5=1, \lambda_3=\lambda_4=\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=\lambda_9,$$

$$\lambda_2=3, \lambda_3=1, \lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=\lambda_9=0.$$

Предложение 2.1. *Существует*

$$\frac{n!}{2!^{\lambda_2}(\lambda_2)!3!^{\lambda_3}(\lambda_3)!\cdot\ldots\cdot n!^{\lambda_n}(\lambda_n)!}$$

различных разбиений n-элементного множества на λ_2 подмножества мощности 2, λ_3 подмножества мощности 3 и т.д. λ_n подмножеств мощности n.

Очевидно, что если учитывать порядок элементов, то каждому такому подмножеству мощности $k, k \geq 3$, можно сопоставить некоторый граф, являющийся циклом длины k.

Подсчитаем количество помеченных циклов длины k. Зафиксируем некоторую вершину цикла и припишем ей пометку 1. Остальные $(k-1)$ вершины можно пометить $(k-1)!$ способами. Однако среди полученных помеченных циклов, в силу замечания 1.1, будет ровно $(k-1)!/2$ одинаковых пар. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Двухвершинный цикл можно пометить одним способом; k-вершинный цикл (длины $k, k>2$) можно пометить $\frac{(k-1)!}{2}$ различными способами.*

Следовательно λ_k циклов длины $k, k>2$, можно пометить $\frac{(k-1)!^{\lambda_k}}{2^{\lambda_k}}$ различными способами и справедлива

Теорема 1. *Число регулярных n-вершинных помеченных графов степени 2 равно*

$$\sum_{3\lambda_3+4\lambda_4+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{n!}{\lambda_3!3!^{\lambda_3}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n!^{\lambda_n}}\cdot\frac{2!^{\lambda_3}3!^{\lambda_4}\cdot\ldots\cdot(n-1)!^{\lambda_n}}{2^{\lambda_3+\lambda_4+\ldots+\lambda_n}}$$

$$=\sum_{3\lambda_3+4\lambda_4+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{n!}{\prod_{r=3}^{n}\lambda_r!(2r)^{\lambda_r}}. \qquad (3)$$

Замечание 2.1. *С учетом мультиграфов формула (3) примет вид*

$$\sum_{2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{n!2^{\lambda_2}}{\prod_{r=2}^{n}\lambda_r!(2r)^{\lambda_r}} \qquad (4)$$

Замечание 2.2. *Очевидно, что число (3) регулярных n-вершинных помеченных графов степени 2 совпадает с числом остовных регулярных подграфов степени 2 полного n-вершинного графа.*

3 Перечисление битрансверсалей квадратной матрицы и разбиений мультимножества $\{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2\}$ на двухэлементные множества

В приведенной ниже матрице элементы битрансверсали выделены жирным шрифтом

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \mathbf{a_{26}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & \mathbf{a_{42}} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \mathbf{a_{54}} & \mathbf{a_{55}} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & \mathbf{a_{65}} & \mathbf{a_{66}} \end{pmatrix}.$$

Выпишем построчно последовательность элементов выделенной битрансверсали

$$(a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{26}, a_{32}, a_{33}, a_{42}, a_{44}, a_{54}, a_{55}, a_{65}, a_{66}).$$

Очевидно, что при построении битрансверсали последовательность первых индексов ее элементов можно зафиксировать в виде $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6)$. Тогда каждая битрансверсаль этой матрицы будет взаимно однозначно связана с упорядоченной последовательностью шести пар вторых индексов ее элементов. Для выделенной выше трансверсали получим упорядоченную последовательность неупорядоченных двухэлементных множеств

$$(\{1,3\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}),$$

сумма которых равна мультимножеству $\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\}$. Каждая пара определяет два различные элементы некоторой строчки.

Если, в общем случае, числам $1, 2, \ldots, n$ сопоставить вершины графа, а парам чисел — ребра графа, то получим набор циклов. Действительно, всем одинаковым парам двухэлементных множеств соответствуют два параллельные ребра. Если же среди оставшихся пар больше нет одинаковых, то очевидно, что каждой оставшейся вершине инцидентны два различные ребра. Так как степень каждой оставшейся вершины равна двум, то они образуют определенный набор циклов. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Число различных регулярных n-вершинных помеченных графов и мультиграфов степени 2 равно числу всех различных неупорядоченных разбиений мультимножества $\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ в сумму двухэлементных множеств, среди которых допускаются и одинаковые двухэлементные множества.*

При помощи этих неупорядоченных разбиений мультимножества $\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ на двухэлементные множества можно построить все битрансверсали квадратной матрицы n-го порядка. Для этого достаточно образовать все различные перестановки компонент этого разбиения. Так как все компоненты разбиений, за исключением λ_2 пар компонент, различны, то для получения числа всех битрансверсалей в формуле (4) необходимо добавить множитель $\frac{n!}{2^{\lambda_2}}$. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *[8]. В квадратной матрице n-го порядка существует всего*

$$\sum_{2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\prod_{r=2}^{n} \lambda_r!(2r)^{\lambda_r}}$$

различных битрансверсалей.

Теорема 5. *Число битрансверсалей $T(n+1), n = 2, 3, \ldots$, квадратной матрицы равно*

$$T(n+1) = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 & & & & & \\ \frac{3}{2} & 3\cdot 4 & & & & \\ 0 & \frac{4}{2} & 4\cdot 5 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)n & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{n}{2} & n(n+1) \end{bmatrix}_{n-1}. \tag{5}$$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из разложения параперманента в равенстве (5) по элементам последней строчки.

REFERENCES

[1] Gavrilov G.P., Liskovets V.A., Permiakov P.P., Selivanov B.I. On some trends of the theory of enumeration. In: Gavrilov G.P. (Ed.) Enumeration problems of combinatorial analysis. Mir, Moscow, 1979, 336–362. (in Russian)

[2] Aigner M. Combinatorial Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidellberg, 1997.

[3] Cayley A. *On the mathematical theory of isomers.* Philosophical Magazine 1874, **47** (314), 444–446. doi:10.1080/14786447408641058; Coll. Math. Papers 1896, **9**, 202–204. doi:10.1017/CBO9780511703751.032

[4] Kirchhoff G. *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*. Ann. Phys. Chem. 1847 **72**, 497–508.

[5] Harary F. Graph Theory. Westview Press, Boulder, Colorado, 1994.

[6] Anand H., Dumir V.C., Hupta H. *A combinatorial distribution problem*. Duke Math. J. 1966, **33** (4), 757–769. doi:10.1215/S0012-7094-66-03391-6

[7] Good I.J., Grook J.F. *The enumeration of arrays and generalization related to contingency tables*. Discrete Math. 1977, **19** (1), 23–45. doi:10.1016/0012-365X(77)90117-0

[8] Tarakanov V.E. *Combinatorial problems on binary matrices*. Combinatorial analysis 1980, **5**, 4–15. (in Russian)

[9] Zatorsky R. Calculus of triangular matrices and its application. Simyk, Ivano-Frankivsk, 2010. (in Ukrainian)

Поступило 13.05.2013

Zatorsky R., Pylypiv V., Gulka S. *On some related enumeration problems*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 242–248.

The article is devoted to enumeration of partitioning of some classes of multisets, n-vertex regular graphs of the second degree and bitransversals of n-th order.

Key words and phrases: matrix, bitransversal, spanning 2-graph, regular graph, multiset.

Заторський Р., Пилипів В., Гулька С. *Про деякі зв'язані між собою перелікові задачі* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 242–248.

Робота присвячена переліченню розбиттів деяких класів мультимножин, n-вершинних регулярних графів другого степеня та бітрансверсалей n-го порядку.

Ключові слова і фрази: матриця, бітрансверсаль, остовний 2-граф, регулярний граф, мультимножина.