ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 249–255 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №2, С.249–255
doi:10.15330/cmp.5.2.249-255

Ільків В.С.[1,2], Савка І.Я.[2], Симотюк М.М.[2]

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ У ПРОСТОРІ СОБОЛЄВА ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, КОЕФІЦІЄНТИ ЯКОГО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

Встановлено умови існування та єдиності періодичного розв'язку у просторі Соболєва для лінійного рівняння із частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами, що залежать від одного дійсного параметра. Показано, що ці умови виконуються для майже всіх за мірою Лебега значень параметра.

Ключові слова і фрази: диференціальне рівняння, періодичний розв'язок, малий знаменник, діофантове наближення, метрична оцінка.

[1] Lviv Polytechnic National University, 12 Bandera str., 79013, Lviv, Ukraine
[2] Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
E-mail: ilkivv@i.ua (Ільків В.С.), s-i@ukr.net (Савка І.Я.), quaternion@ukr.net (Симотюк М.М.)

Вступ

Діофантові умови розв'язності часто зустрічаються в теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях (зокрема, на торі) через так звану проблему малих знаменників (див. [7, 17, 19]). З математичної точки зору ця проблема проявляється в тому, що у розв'язки задач, які зображаються у вигляді рядів Фур'є, входить безліч членів з коефіцієнтами, знаменники яких можуть бути як завгодно близькими до нуля, що зумовлює розбіжність цих рядів. Для подолання проблеми малих знаменників ефективним виявився метричний підхід [2, 4, 9, 10], який полягає у вивченні міри множин параметрів задачі (коефіцієнтів рівняння, коефіцієнтів крайових (зокрема, нелокальних) умов чи параметрів області), для яких діофантові властивості (діофантові нерівності) виконуються, або не виконуються безліч разів.

В останні роки багато робіт присвячено вивченню глобальної гіпоеліптичності і розв'язності лінійних диференціальних операторів на компактних многовидах, наприклад, на торі (див. [1, 5, 6, 8, 13, 14] і посилання в них), де також виникає проблема малих знаменників, які є поліномами $L(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, зі сталими коефіцієнтами. Зокрема, у роботі [8] показано, що диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами глобально гіпоеліптичний тоді і тільки тоді, коли його повний символ задовольняє діофантові умови типу Зігеля. Однак, у більшості з цих робіт сформульовано твердження, в яких присутні аксіоматичні умови вигляду $|L(k)| \geq c|k|^{-\delta}$ на малі знаменники.

УДК 517.95+511.42
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 11K60.
Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 54.1/027)

В роботах [3, 11] при відшуканні періодичних розв'язків для рівняння Шредінгера на двовимірному торі та для хвильового рівняння на $(n+1)$-вимірному торі у всій повноті застосовано методи теорії чисел (діофантових наближень) для встановлення оцінок знизу малих знаменників, які мали вигляд квадратичних форм. Періодичні задачі із застосуванням метричного підходу також вивчались у роботах [12, 15, 16, 18].

1 Основні позначення. Постановка задачі

Нехай $\Omega_{2\pi}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — тор, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_{2\pi}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p$, D — вектор диференціювань з компонентами $D_1, \ldots, D_p$, де $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $i = \sqrt{-1}$.

Через $D^s u$ позначимо мішану похідну $D_1^{s_1} \ldots D_p^{s_p} u$, а через k^s — добуток $k_1^{s_1} \ldots k_p^{s_p}$, де $s = (s_1, \ldots, s_p)$ — набір цілих невід'ємних чисел, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$.

Нехай $\mathbf{C}^m(I; \mathbb{R})$ — простір дійснозначних m разів неперервно диференційовних на відрізку I функцій, а $\mathbf{C}^m(I; \mathbb{C})$ — простір комплекснозначних функцій, де $m \geq 0$. Нехай $W[f_1, \ldots, f_m]$ позначає вронскіан функцій $f_1, \ldots, f_m$ з простору $\mathbf{C}^m(I; \mathbb{R})$.

Запровадимо шкалу гільбертових просторів $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ для $q \in \mathbb{R}$, де соболєвський простір $\mathbf{H}_q$ отримано поповненням множини $v(x) = \sum_k v_k \exp(ik, x)$ за нормою $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_q}$, що породжена скалярним добутком $(v, u)_{\mathbf{H}_q} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} v_k \bar{u}_k$, в якому $\widetilde{k} = \sqrt{1 + (k, k)}$.

Позначимо через $\operatorname{meas} A$ міру Лебеґа вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$, а через М — відрізок кривої у просторі $\mathbb{C}^p$, який утворюють точки $b(\tau) = \big(b_1(\tau), \ldots, b_p(\tau)\big)$, якщо $\tau \in I$.

В області $\Omega_{2\pi}^p$ розглянемо задачу про відшукання 2π-періодичного (за всіма змінними) розв'язку $u = u(x)$ для лінійного рівняння із частинними похідними

$$L_\tau(D)u(x) \equiv \sum_{|s| \leq n} a_s D^s u(x) + \sum_{j=1}^{p} b_j(\tau) D_j^{n_j} u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_{2\pi}^p, \tag{1}$$

та сталими комлексними коефіцієнтами a_s та b_j, де $f = f(x)$ — задана 2π-періодична функція, порядки $n_1, \ldots, n_p$ похідних не перевищують n, а коефіцієнти $b_1, \ldots, b_p$ є комплексними функціями $b_1(\tau), \ldots, b_p(\tau)$ параметра τ на відрізку I дійсної прямої.

Основна мета роботи — встановлення умов єдиності та умов існування розв'язків рівнянь (1) у просторі Соболєва $\mathbf{H}_q$ у термінах діофантових властивостей функцій $b_j(\tau)$. При цьому використано метричний підхід і доведено теорему про коректну розв'язність задачі для майже всіх значень параметра $\tau \in I$.

2 Єдиність розв'язку

Розв'язок $u = u(x)$ задачі шукаємо у просторі 2π-періодичних функцій $\mathbf{H}_q$, тому він є таким рядом Фур'є:

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k e^{i(k,x)}. \tag{2}$$

Для визначення коефіцієнтів u_k одержуємо низку алгебричних рівнянь

$$L_\tau(k) u_k = f_k, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{3}$$

де f_k — коефіцієнти Фур'є функції $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} f_k e^{i(k,x)}$.

Введемо для $\tau \in I$ множину $\mathbb{Z}_0^p = \mathbb{Z}_0^p(\tau)$ нулів функції $L_\tau(k)$ за формулою

$$\mathbb{Z}_0^p(\tau) = \{k \in \mathbb{Z}^p : L_\tau(k) = 0\}.$$

Для фіксованого τ кожне із рівнянь (3) має єдиний розв'язок $u_k = f_k / L_\tau(k)$, якщо $\mathbb{Z}_0^p = \mathbb{Z}_0^p(\tau) = \varnothing$.

Якщо ж $\mathbb{Z}_0^p \neq \varnothing$ для фіксованого числа τ, то для цього τ розв'язок рівняння (3) існує для тих і тільки тих функцій f, для яких $f_k = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_0^p$. Тепер розв'язками рівняння (3) є довільні сталі $u_k = u_{k,0}$ для $k \in \mathbb{Z}_0^p$ і числа $u_k = f_k / L_\tau(k)$ для $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \mathbb{Z}_0^p$.

З цих тверджень сформулюємо дві теореми про єдиність розв'язку задачі.

Теорема 1. *Для єдиності (за фіксованого параметра $\tau \in I$) розв'язку рівняння* (1) *у просторі $\boldsymbol{H}_q$, де $q \in \mathbb{R}$, необхідно і достатньо, щоб алгебричне рівняння $L_\tau(k) = 0$ не мало розв'язків у цілих числах $k_1, \dots, k_p$, тобто $\mathbb{Z}_0^p = \varnothing$.*

Теорема 2. *Якщо $f_k = 0$ для $k \in \mathbb{Z}_0^p$, то два розв'язки рівняння* (1) *у просторі $\boldsymbol{H}_q$ можуть відрізнятися один від одного сумою $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_0^p} u_{k,0} e^{i(k,x)}$, де $u_{k,0}$ — комплексні сталі, які задовольняють нерівність $\Big\| \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_0^p} u_{k,0} e^{i(k,x)} \Big\|_{\boldsymbol{H}_q} = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_0^p} \widetilde{k}^{2q} |u_{k,0}|^2 < \infty$.*

Зауваження 1. *Якщо шуканий розв'язок підпорядкувати умові $(u, e^{i(k,\cdot)})_{\boldsymbol{H}_q} = 0$ для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}_0^p$, то в умовах теореми 2 рівняння* (1) *не може мати двох різних розв'язків із простору $\boldsymbol{H}_q$.*

Розв'язок задачі існує, якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ рівняння (3) є розв'язним, а ряд (2) — розв'язок рівняння (1) — належить до простору $\mathbf{H}_q$.

Припустимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}_0^p$ виконується умова $f_k = 0$. Тоді загальний розв'язок $u(x)$ задачі формально можна зобразити рядом

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^p} u_{k,0} e^{i(k,x)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \mathbb{Z}_0^p} \frac{f_k}{L_\tau(k)} e^{i(k,x)}, \tag{4}$$

де $u_{k,0}$ — довільні комплексні сталі.

3 Метричні оцінки

Символ $L_\tau(k)$ оператора $L_\tau(D)$ впливає на збіжність ряду (4), який визначає норму розв'язку рівняння (1) у $\mathbf{H}_q$, оскільки може як завгодно швидко наближатися до нуля для множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, існування 2π-періодичного розв'язку u задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Для вирішення цієї проблеми скористаємося метричним підходом для оцінок знизу малих знаменників $L_\tau(k)$, де $k \in \mathbb{Z}^p$, послідовністю зі степеневою поведінкою і властивістю δ-нормальності множини. Реалізація цього підходу вимагає встановлення оцінок зверху для мір виняткових множин гладких функцій.

Для довільного $\delta \in \mathbb{R}$ введемо поняття δ-нормальності кривої M, що визначається коефіцієнтами $b_1, \dots, b_p$ рівняння (1).

Означення. *Крива* M *називається* δ*-нормальною щодо рівняння* (1)*, якщо існує така стала* $C_0 > 0$*, що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$*) точок* $\tau \in I$ *нерівність*

$$|L_\tau(k)| \geq C_0 \tilde{k}^{-\delta} \tag{5}$$

виконується для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \mathbb{Z}_1^p$*, де* $\mathbb{Z}_1^p = \mathbb{Z}_1^p(\tau)$ *— скінченна множина.*

Із властивості δ-нормальності кривої випливає *фредгольмовість* розглядуваної задачі для майже всіх точок відрізка I.

Сформулюємо і доведемо теорему про умови δ-нормальності кривої M.

Теорема 3. *Якщо функції* $b_1, \ldots, b_p$ *належать до простору* $\mathbf{C}^{p+1}(I;\mathbb{C})$ *і виконується хоча б одна з двох умов:*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \min_{\tau \in I} \big| W\big[\operatorname{Re} b_1, \ldots, \operatorname{Re} b_p, 1\big](\tau)\big| \neq 0, \\ &\text{(ii)} \quad \min_{\tau \in I} \big| W\big[\operatorname{Im} b_1, \ldots, \operatorname{Im} b_p, 1\big](\tau)\big| \neq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

то при $\delta > p^2 - n_0$ *крива* M *є* δ*-нормальною, де* $n_0 = \min\{n_1, \ldots, n_p\}$.

Доведення. Припустимо, що виконується умова (i) теореми. Введемо множини

$$B_k = \big\{\tau \in I \colon |\operatorname{Re} L_\tau(k)| < \varepsilon_k\big\}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p,$$

і множину B тих точок $\tau \in I$, для яких безліч разів на $\mathbb{Z}^p$ справджується оцінка

$$|\operatorname{Re} L_\tau(k)| < \varepsilon_k = \frac{C_1}{2(p+1)^{n_0/2}} \tilde{k}^{-\delta}.$$

Для оцінювання міри множин B_k сформулюємо відповідну терему із роботи [20].

Теорема 4. *Нехай* $F(\tau, z) = f_1(\tau) z_1 + \ldots + f_m(\tau) z_m$*, де* $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$*, а також* $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset C^m(I;\mathbb{R})$*. Якщо вронскіан* $W[f_1, \ldots, f_m]$ *функцій* $f_1, \ldots, f_m$ *відмінний від нуля на* I*, то для всіх* $z \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ *і довільного* $\varepsilon \in (0, C_1|z|/2)$ *виконується оцінка*

$$\operatorname{meas}\{\tau \in I : |F(\tau, z)| < \varepsilon\} \leq C_2 \sqrt[m-1]{\varepsilon/|z|},$$

де $|z| = |z_1| + \ldots + |z_m|$*, додатні сталі* C_1 *і* C_2 *визначають формули*

$$C_1 = \frac{1}{m} \min_{\tau \in I} \big| W[f_1, \ldots, f_m](\tau)\big| \Big(\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{C^{(m-1)}(I;\mathbb{R})} \sum_{j=1}^m \|f_j\|^{-1}_{C^{(m-1)}(I;\mathbb{R})} \Big)^{-1},$$

$$C_2 = 4(\sqrt{2}+1)(m-1) C_1^{m/(1-m)} \big(\operatorname{meas} I \max_{1 \leq j,q \leq m} ||f_j^{(q)}||_{C(I;\mathbb{R})} + C_1 \big).$$

Позначимо $m = p+1$, $g_k = \operatorname{Re} \sum\limits_{|s| \leq n} a_s k^s$ і запишемо вираз $\operatorname{Re} L_\tau(k)$ у вигляді суми

$$\operatorname{Re} L_\tau(k) = \operatorname{Re} b_1(\tau) k_1^{n_1} + \ldots + \operatorname{Re} b_p(\tau) k_p^{n_p} + g_k.$$

Якщо $z = \big(k_1^{n_1}, \ldots, k_p^{n_p}, g_k\big)$, $f_j(\tau) = \operatorname{Re} b_j(\tau)$ для $j = 1, \ldots, p$ і $f_{p+1}(\tau) = 1$, то з позначень теореми 4 випливають рівності

$$F(\tau, z) = \operatorname{Re} L_\tau(k), \qquad W\big[f_1, \ldots, f_m\big] = W\big[\operatorname{Re} b_1, \ldots, \operatorname{Re} b_p, 1\big].$$

Оскільки $|z| \geq 1$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ і виконуються нерівності

$$0 < \varepsilon_k < \frac{C_1}{2(p+1)^{n_0/2}} \widetilde{k}^{n_0} < \frac{C_1}{2}|z| = \frac{C_1}{2}\big(|k_1|^{n_1} + \ldots + |k_p|^{n_p} + |g_k|\big),$$

то при кожному $k \neq 0$ за умовою (6) з теореми 4 маємо такі оцінки для міри B_k:

$$\operatorname{meas} B_k \leq C_2 \sqrt[m-1]{\varepsilon_k/|z|} = C_2 \sqrt[p]{\varepsilon_k/|z|} \leq C_3 \widetilde{k}^{-(\delta+n_0)/p}, \qquad C_3 = C_2\Big(\tfrac{C_1}{2}\Big)^{1/p}.$$

Для вибраних δ ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \operatorname{meas} B_k$ мажорується збіжним рядом $C_3 \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{-(\delta+n_0)/p}$, тому з леми Бореля-Кантеллі випливає, що міра Лебеґа множини точок τ із I, що потрапляють у нескінченну кількість множин B_k, дорівнює нулю, тобто $\operatorname{meas} B = 0$.

Тоді при $\delta > p^2 - n_0$ для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) чисел $\tau \in I$ нерівність $|\operatorname{Re} L(\tau, k)| \geq \varepsilon_k$ виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів k. Із означення δ-нормальності та нерівностей

$$|L_\tau(k)| \geq |\operatorname{Re} L_\tau(k)| \geq \frac{C_1}{2(p+1)^{n_0/2}} \tilde{k}^{-\delta} = C_0 \tilde{k}^{-\delta}$$

випливає, що крива M є δ-нормальною зі сталими $\delta > p^2 - n_0$ і $C_0 = C_1/2(p+1)^{n_0/2}$.

Якщо виконується умова (ii) теореми, то візьмемо $f_j(\tau) = \operatorname{Im} b_j(\tau)$ для $j = 1, \ldots, p$. Далі результат отримуємо аналогічно. Теорему доведено. $\square$

4 Існування розв'язку

Твердження доведеної теореми 3 використовуємо для встановлення такої теореми існування розв'язку розглядуваної задачі.

Теорема 5. *Нехай $\delta > p^2 - n_0$ і коефіцієнти $b_1, \ldots, b_p$ рівняння* (1) *задовольняють умови теореми* 3. *Тоді для кожної функції $f \in \mathbf{H}_{q+\delta}$, яка задовольняє умову ортогональності $f_k = 0$, якщо $k \in \mathbb{Z}_0^p$, для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$*) чисел $\tau \in I$ існує 2π-періодичний розв'язок u рівняння* (1) *із простору $\mathbf{H}_q$, який можна зобразити у вигляді ряду* (4).

Доведення. За умовами теореми крива M є δ-нормальною внаслідок теореми 3. Це означає, що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) точок $\tau \in I$ є істинним твердження

$$\big(\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \backslash \mathbb{Z}_0^p\big) \qquad |L_\tau(k)| \geq C_4 \widetilde{k}^{-\delta}, \tag{7}$$

де $C_4 = C_4(\tau) = \min\big\{C_0, \min\limits_{k \in \mathbb{Z}_1^p \backslash \mathbb{Z}_0^p} |\widetilde{k}^{\delta} L_\tau(k)|\big\}$, $\mathbb{Z}_1^p = \mathbb{Z}_1^p(\tau)$ — скінченна множина елементів $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких не виконується нерівність (5), тому $\mathbb{Z}_0^p \subset \mathbb{Z}_1^p$. Із формули для норми в просторі $\mathbf{H}_q$ отримуємо таку оцінку квадрата норми розв'язку (4):

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} |u_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_1^p} \widetilde{k}^{2q} |u_{k,0}|^2 + C_4^{-2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \backslash \mathbb{Z}_1^p} \widetilde{k}^{2(q+\delta)} |f_k|^2 \leq S + C_5 \|f\|^2_{\mathbf{H}_{q+\delta}},$$

де $C_5 = C_4^{-2}$, а величина $S = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_1^p} \widetilde{k}^{2q} |u_{k,0}|^2$ є скінченною сумою, тому $S < \infty$ для довільних чисел $u_{k,0} \in \mathbb{C}$. Отже, $\|u\|_{\mathbf{H}_q} < \infty$, тобто $u \in \mathbf{H}_q$. Теорему доведено. $\square$

Зауваження 2. *Якщо в умовах теореми 5 для якогось* τ *множина* $Z_0^p(\tau)$ *є порожньою, то розв'язок* (4) *періодичної задачі для рівняння* (1) *існує для кожної функції* $f \in \mathbf{H}_{q+\sigma}$ *та єдиний.*

Зауваження 3. *Гладкість правої частини* f *рівняння* (1) *в умовах розв'язності зростає разом із розмірністю* p *тора* $\Omega_{2\pi}^p$ *і спадає зі зростанням мінімального з чисел* $n_1, \dots, n_p$.

З останньої теореми випливає фредгольмовість розглядуваної задачі для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) точок $\tau \in I$, оскільки для цих τ задача має скінченновимірне ядро у просторі $\mathbf{H}_q$ і кількість умов ортогональності ($f_k = 0$) дорівнює розмірності ядра.

Висновки

У роботі встановлено умови єдиності та умови існування 2π-періодичного розв'язку у просторі Соболєва для лінійного безтипного диференціального рівняння (1), комплексні коефіцієнти $b_1, \dots, b_p$ якого при фіксованих незмішаних похідних (порядків $n_1, \dots, n_p$ відповідно) залежать від дійсного параметра τ.

Умовами (6) для $\delta > p^2 - n_0$ визначено клас δ-нормальних кривих

$$M = \{(b_1(\tau), \dots, b_p(\tau)),\ \tau \in I\},$$

для якого має місце розв'язність розглядуваної задачі у просторі Соболєва для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в просторі $\mathbb{R}$) точок τ із відрізка I.

Отримані результати можна поширити на випадок відшукання періодичних розв'язків за змінними $x_1, \dots, x_p$ з вектором періодів $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ для рівняння $L_\tau(D)u(x) = 0$, де $x \in \Omega_\omega^p$, Ω_ω^p — відповідний тор.

References

[1] Albanese A.A. *On the global C^∞ and Gevrey hypoellipticity on the torus of some classes of degenerate elliptic operators*. Note di Matematica 2011, **31** (1), 1–13. doi:10.1285/i15900932v31n1p1

[2] Arnol'd V.I. *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*. Uspehi Mat. Nauk 1963, **18** (6), 91–192. doi:10.1070/RM1963v018n06ABEH001143 (in Russian)

[3] Beresnevich V., Dodson M., Kristensen S., Levesley J. *An inhomogeneous wave equation and non-linear Diophantine approximation*. Advances in Mathematics 2008, **217** (2), 740–760. doi:10.1016/j.aim.2007.09.003

[4] Bourghin D. G., Duffin R. J. *The Dirichlet problem for the vibrating string equation*. Bull. Amer. Math. Soc. 1939, **45** (12), 851–858. doi:10.1090/S0002-9904-1939-07103-6

[5] Dickinson H., Gramchev T., Yoshino M. *Perturbations of vector fields on tori: resonant normal forms and Diophantine phenomena*. Proc. Edinb. Math. Soc. 2002, **45** (3), 731–759. doi:10.1017/S001309150000064X

[6] Gramchev T., Yoshino M. *WKB analysis to global solvability and hypoellipticity*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1995, **31** (3), 443–464. doi:10.2977/prims/1195164049

[7] Grebennikov E.A, Ryabov Yu.A. Resonances and small denominators in celestial mechanics. Nauka, Moscow, 1978. (in Russian)

[8] Greenfield S., Wallach N. *Global hypoellipticity and Liouville numbers*. Proc. Amer. Math. Soc. 1972, **31** (1), 112–114. doi:10.2307/2038523

[9] Il'kiv V.S., Ptashnyk B.Yo. *Problems for partial differential equations with nonlocal conditions. Metric approach to the problem of small denominators*. Ukrainian Math. J. 2006, 58 (12), 1847–1875. doi:10.1007/s11253-006-0172-8 (in Ukrainian)

[10] Kolmogorov A.N. *On dynamical systems with an integral invariant on the torus*. Doklady Akad. Nauk SSSR 1953, **93** (5), 763–766. (in Russian)

[11] Kristensen S. *Diophantine approximation and the solubility of the Schrödinger equation*. Phys. Lett. A. 2003, **314** (1), 15–18. doi: 10.1016/S0375-9601(03)00867-3

[12] Novák B. *Remark on periodic solutions of a linear wave equation in one dimension*. Comm. Math. Uni. Carolinae 1974, **15**, 513–519.

[13] Petronilho G. *Global hypoellipticity, global solvability and normal form for a class of real vector fields on a torus and application*. Trans. Amer. Math. Soc. 2011, **363**, 6337–6349. doi:10.1090/S0002-9947-2011-05359-6

[14] Petronilho G. *Global solvability and simultaneously approximable vectors*. J. Differential Equations 2002, **184** (1), 48–61. doi:10.1006/jdeq.2001.4132

[15] Polishchuk V.M., Ptashnyk B.Yo. *Periodic boundary value problem for linear hyperbolic equations*. Math. Methods Phys. Mech. Fields 1975, **5**, 158–160. (in Russian)

[16] Polishchuk V.M., Ptashnyk B.Yo. *Periodic solutions of a system of partial differential equations with constant coefficients*. Ukrainian Math. J. 1980, **32** (2), 239–243. doi: 10.1007/BF01092793 (in Russian)

[17] Ptashnyk B.Yo., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 2002. (in Ukrainian)

[18] Ptashnyk B.Yo. *Periodic boundary value problem for linear hyperbolic equations with constant coefficients*. In: Math. Physics, 12, 117–121. Naukova Dumka, Kiev, 1972. (in Russian)

[19] Ptashnyk B.Yo. Ill-Posed Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 1984. (in Russian)

[20] Savka I.Ya. *Nonlocal problem with dependent coefficients in conditions for the second-order equation in time variable*. Carpathian Math. Publ. 2010, **2** (2), 101–110. (in Ukrainian)

Надійшло 27.12.2012

I'lkiv V.S., Savka I.Ya., Symotyuk M.M. *Sobolev periodic solutions of a partial differential equation with coefficients which depend on a parameter*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 249–255.

The conditions of existence and uniqueness of Sobolev periodic solution for linear partial differential equation with constant complex coefficients, which depends on one real parameter, are established. It is shown that these conditions fulfill for almost all (with respect to the Lebesgue measure) parameter values.

Key words and phrases: differential equation, periodic solution, small denominator, diophantine approximation, metric estimation.

Илькив В.С., Савка И.Я., Сымотюк М.М. *Периодические решения в пространстве Соболева для уравнения с частными производными, коэффициенты которого зависят от параметра* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 249–255.

Установлены условия существования и единственности периодического решения в пространстве Соболева для линейного уравнения с частными производными с постоянными комплексными коэффициентами, которые зависят от одного действительного параметра. Показано, что эти условия выполняются для почти всех по мере Лебега значений параметра.

Ключевые слова и фразы: дифференциальное уровнение, периодическое решение, малый знаменатель, диофантовое приближение, метрическая оценка.