ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 290–297 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №2, С.290–297
doi:10.15330/cmp.5.2.290-297

Малицька Г.П., Буртняк І.В.

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ ІНТЕГРАЛА ПУАССОНА УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується стабілізація інтеграла Пуассона для рівнянь типу Колмогорова, що мають три групи змінних, за якими є виродження параболічності.

Ключові слова і фрази: ультрапараболічні рівняння, рівняння Колмогорова, стабілізація, інтеграл Пуассона.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: bvanya@meta.ua (Буртняк І.В.)

Вступ

Вироджені параболічні рівняння порядку $2b$, які узагальнюють рівняння дифузії з інерцією і мають довільну скінченну кількість груп змінних, за якими є виродження параболічності, досліджено в [3, 5], і для них побудовано фундаментальний розв'язок (ф.р.) задачі Коші. З використанням властивостей ф.р. встановлено достатні та необхідні умови точкової і рівномірної стабілізації інтеграла Пуассона для цих рівнянь. Зокрема, розглянуто випадки, коли початкова функція має граничне середнє по областях, які визначаються лініями рівня ф.р. задачі Коші. Для рівняння високого порядку початкова функція має граничне середнє по паралелепіпедах. Одержані результати узагальнено результатами робіт [2, 6]. Вони можуть бути застосовані в теорії стохастичних процесів [1]. Ці результати можна узагальнити на випадок рівнянь із змінними коефіцієнтами в параболічній частині, а також на системи рівнянь типу Колмогорова [4].

Введемо позначення: n — деяке фіксоване натуральне число; m_1, m_2, m_3 — фіксовані цілі невід'ємні числа; $n \geq m_1 \geq m_2 \geq m_3$; $N = n + \sum\limits_{j=1}^{3} m_j$; $X = (x, y_1, y_2, y_3)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $j = 1, 2, 3$; $y_j = (y_{j,1}, y_{j,2}, \dots, y_{j,m_j})$, $N_1 = n + \sum\limits_{j=1}^{3}(2j+1)m_j$, $x^{(j)} = (x_1, x_2, \dots, x_{m_j})$, $y_j^{(s)} = (y_{j,1}, y_{j,2}, \dots, y_{j,m_s})$, $j < s$, $X \in \mathbb{R}^{N_1}$; аналогічно $\Xi = (\zeta, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\eta_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $j = 1, 2, 3$; $(x^{(1)}, D_{y_1}) = \sum\limits_{j=1}^{m_1} x_i D_{y_{1j}}$, $(y_{s-1}^{(s)}, D_{y_s}) = \sum\limits_{j=1}^{m_s} y_{s-1} D_{y_{sj}}$, $s = 2, 3$, $\Delta_x = \sum\limits_{j=1}^{n} D_{x_j}^2$.

Розглянемо задачу Коші

$$(D_t - (x^{(1)}, D_{y_1}) - (y_1^{(2)}, D_{y_2}) - (y_2^{(3)}, D_{y_3}) - a\Delta_x)u(t, x) = 0, \tag{1}$$

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.

$$u(t,x)|_{t=\tau}=u_0(X),\quad X\in\mathbb{R}^N, t>\tau\geq 0, a>0, \tag{2}$$

де $u_0(X)$ — вимірна обмежена функція в $\mathbb{R}^N$. Ф.р. задачі (1), (2) має вигляд ([3])

$$Z(t,X;\tau,\Xi)=12^{m_1/2}720^{m_2/2}25200^{m_3/2}(4\pi a)^{-N/2}(t-\tau)^{-N_1/2}exp\left\{\frac{-\rho(t,X;\tau,\Xi)}{a}\right\},$$

де

$$\begin{gathered}\rho(t,X;\tau,\Xi)=|x-\zeta|^2(t-\tau)^{-1}+3(t-\tau)^{-3}|y_1-\eta_1+(x^{(1)}+\zeta^{(1)})2^{-1}(t-\tau)|^2\\ +180(t-\tau)^{-5}|y_2-\eta_2+(y_1^{(2)}+\eta_1^{(2)})2^{-1}(t-\tau)+(x^{(2)}-\zeta^{(2)})12^{-1}(t-\tau)^2|^2\\ +630(t-\tau)^{-7}|y_3-\eta_3+(y_2^{(3)}+\eta_2^{(3)})2^{-1}(t-\tau)+(y_1^{(3)}-\eta_1^{(3)})10^{-1}(t-\tau)^2\\ +(x^{(3)}+\zeta^{(3)})120^{-1}(t-\tau)^3|^2,\end{gathered}$$

$\rho(t,X;0,\Xi)=r^2$ — сім'я поверхонь рівня ф.р. задачі (1), (2).

Через $F_{r,t}^{X_0}$ позначимо тіло, обмежене еліпсоїдом

$$\rho(t,X;0,\Xi)=r^2, \tag{3}$$

де Ξ — змінна точка, а через v_N — об'єм тіла, обмеженого поверхнею

$$|\zeta|^2+|\eta_1-\sqrt{3}\zeta^{(1)}|^2+|\eta_2-\sqrt{15}\eta_1^{(2)}-\sqrt{5}\zeta^{(2)}|^2+|\eta_3-2^{-1}\sqrt{35}\eta_2^{(3)}+\sqrt{21}\eta_1^{(3)}+2^{-1}\sqrt{7}\zeta^{(3)}|^2=1.$$

Нехай $M_t^X(r)$ — середнє $u_0(x)$ по тілах $F_{r,t}^X$, обмежених поверхнями (3). Будемо казати, що функція $u_0(X)$ має *граничне середнє* $M^X(r)$ по тілах $F_{r,t}^X$, якщо існує границя $\lim\limits_{t\to\infty}M_t^X(r)=M^X(r)$.

1 Точкова стабілізація інтеграла Пуассона задачі Коші (1), (2)

Теорема 1. *Якщо $u_0(X)$ має граничне середнє по еліпсоїдах $F_{r,t}^X$, яке майже при всіх r дорівнює $M^X(r)$, то інтеграл Пуассона рівняння* (1) *стабілізується (прямує при $t\to\infty$) до числа*

$$\iota=(2\pi a)^{-N/2}v_N\int_0^{+\infty}r^{N+1}e^{-r^2}M^X(r)dr.$$

Доведення. Розглянемо інтеграл Пуассона для рівняння (1)

$$u(t,X)=\int_{\mathbb{R}^N}Z(t,X;0,\Xi)u_0(\Xi)d\Xi. \tag{4}$$

Введемо заміну змінних інтегрування: $x-\zeta=-2\sqrt{at}\alpha$; $y_1-\eta_1+x^{(1)}t=-\sqrt{t^3a}\beta_1/\sqrt{3}$; $y_2-\eta_2+y_1^{(2)}t+x^{(2)}t^2/2=-\sqrt{t^5a}\beta_2/6\sqrt{5}$; $y_3-\eta_3+y_1^{(3)}t/2+y_2^{(3)}t^2+x^{(3)}t^3/6=-\sqrt{t^7a}\beta_3/30\sqrt{7}$. Тоді (4) набуде вигляду

$$\begin{gathered}u(t,X)=\pi^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N}exp\Big\{-|\alpha|^2-|\beta_1-\sqrt{3}\alpha^{(1)}|^2-|\beta_2-\sqrt{15}\beta_1^{(2)}-\sqrt{5}\alpha^{(2)}|^2\\ -|\beta_3-\sqrt{35}\beta_2^{(3)}/2+\sqrt{21}\beta_1^{(3)}+\sqrt{7}\alpha^{(3)}/2|^2\Big\}u_0\Big(t,\ x+2\sqrt{at}\alpha,\ y_1+x^{(1)}t+\sqrt{at^3}\beta_1/\sqrt{3},\\ y_2+y_1^{(2)}t+x^{(2)}t^2/2+\sqrt{at^5}\beta_2/6\sqrt{5},\ y_3+y_1^{(3)}t/2+y_2^{(3)}t^2+x^{(3)}t^3/6+\sqrt{at^7}\beta_3/30\sqrt{7}\Big)dE,\\ E=(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3),\qquad E\in\mathbb{R}^N.\end{gathered} \tag{5}$$

Розглянемо додатно визначену квадратичну форму

$$|\alpha|^2+|\beta_1-\sqrt{3}\alpha^{(1)}|^2+|\beta_2-\sqrt{15}\beta_1^{(2)}-\sqrt{5}\alpha^{(2)}|^2 \\ +|\beta_3-\sqrt{35}\beta_2^{(3)}/2+\sqrt{21}\beta_1^{(3)}+\sqrt{7}\alpha^{(3)}/2|^2=\sum_{(i,j,k,s)} C_{ijks}\alpha^i\beta_1^j\beta_2^k\beta_3^s, \quad (6)$$

де $(i,j,k,s)=|i|+|j|+|k|+|s|=2$, і відповідну до (6) сім'ю еліпсоїдів, що не перетинаються: $\sum_{(i,j,k,s)} C_{ijks}\alpha^i\beta_1^j\beta_2^k\beta_3^s=r^2$. В інтегралі (5) перейдемо до нових змінних інтегрування

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r\Phi(\Psi)\cos\Psi_1,\\ \alpha_2 &= r\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\cos\Psi_2,\\ &\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{3m_3} &= r\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\sin\Psi_2\dots\cos\Psi_{N-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\Psi=(\Psi_1...\Psi_{N-1})$, $0\le r<+\infty$, $0\le\Psi_j\le\pi$, $j=1,\dots,N-2$, $0\le\Psi_{N-1}\le 2\pi$, а функція $\Phi(\Psi)$ визначається рівністю

$$\Phi^2(\Psi)\sum_{(i,j,k,s)} C_{ijks}\alpha'^i\beta_1'^j\beta_2'^k\beta_3'^s=1$$

з $\alpha_1'=\cos\Psi_1$, $\alpha_2'=\sin\Psi_1\cos\Psi_2,\dots,\beta_{3m_3}'=\sin\Psi_1\sin\Psi_2\dots\sin\Psi_{N-1}$. Якобіан перетворення (7) має вигляд $J=r^{N-1}J_1$, де $J_1=\Phi^N(\Psi)\sin^{N-2}\sin^{N-3}\Psi_2\dots\sin\Psi_{N-1}$.

Позначимо

$$\begin{aligned} u_0(t,r,\Psi,X)=u_0\Big(&2r\sqrt{ta}\Phi(\Psi)\cos\Psi_1+x_1,\dots,\\ &r\sqrt{at^3}(30\sqrt{7})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\dots\cos\Psi_{n+1}+y_{11}+x_1t,\dots,\\ &r\sqrt{at^5}(6\sqrt{5})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\dots\cos\Psi_{n+m_1+1}+y_{21}+y_{11}t+2^{-1}x_1t^2,\dots,\\ &r\sqrt{at^7}(30\sqrt{7})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\dots\sin\Psi_{N-1}+y_{3m_3}+y_{2m_3}t+2^{-1}y_{1m_3}t^2+6^{-1}x_{m_3}t^3\Big). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(t,X) &= \pi^{-N/2}\int_0^{+\infty} r^{N-1}e^{-r^2}dr\int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)J_1d\Psi\\ &= \pi^{-N/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^r\rho^{N-1}d\rho\int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)J_1d\Psi dr\\ &= 2\pi^{-N/2}\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\int_0^r\rho^{N-1}d\rho\int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)J_1d\Psi dr, \end{aligned}$$

де Σ_1 — одинична сфера в $\mathbb{R}^N$. Виділимо $M_t^X(r)$:

$$\begin{aligned} u(t,X) &= 2\pi^{-N/2}v_N\int_0^{+\infty} r^{N+1}e^{-r^2}(r^Nv_N)^{-1}\int_0^r\rho^{N-1}d\rho\int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)J_1d\Psi dr\\ &= 2\pi^{-N/2}v_N\int_0^{+\infty} r^{N+1}e^{-r^2}M_t^X(r)dr. \end{aligned} \quad (8)$$

Залишилось здійснити граничний перехід під знаком інтеграла (8) при $t\to\infty$. Це можна зробити на основі теореми Лебега, оскільки існує граничне середнє, а з обмеженості $u_0(X)$ безпосередньо випливає рівномірна (за t) обмеженість $M_t^X(r)$.

Зауважимо, що достатньо вимагати граничного середнього в деякій фіксованій точці X_1, звідки вже випливає існування граничного середнього в будь-якій точці X і факт стабілізації на кожному компакті. □

Теорема 2. *Якщо* $u_0(X) \geq 0$*, то для стабілізації інтеграла Пуассона* (4) *до нуля необхідно і достатньо, щоб* $u_0(X)$ *мала граничне середнє* $M^X(r)$*, яке майже скрізь дорівнює нулеві.*

Доведення. Достатність випливає із теореми 1.

Покажемо, що зі стабілізації інтеграла (4) випливає існування нульового граничного середнього по $F^X_{r,t}$:

$$M^X_t(r) = \frac{1}{mes\, F^X_{r,t}} \int\limits_{F^X_{r,t}} u_0(\Xi) d\Xi \leq c t^{-N_1/6} \int\limits_{\mathbb{R}^N} exp\{-\rho(t^{1/3}, X, 0, \Xi)\} u_0(\Xi) d\Xi = c_1 u(t^{1/3}, X). \quad (9)$$

У нерівності (9) $mes\, F^X_{r,t}$ замінено об'ємом куба зі стороною $t^{1/6}$, який міститься в $F^X_{r,t}$. Оскільки $u(t, X) \to 0$ при $t \to \infty$, то з (9) випливає, що $M^X_{t,r} \to 0$ при $t \to \infty$ для будь-якого r. □

2 Рівномірна стабілізація інтеграла Пуассона

Розглянемо задачу Коші для рівняння порядку $2b$ за змінними x

$$\left(D_t - (x^{(1)}, D_{y_1}) - (y_1^{(2)}, D_{y_2}) - (y_2^{(3)}, D_{y_3}) - \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k \right) u = 0, \quad (10)$$

де $D_t - \sum\limits_{|k|=2b} a_k D^k_x$ — параболічний за Петровським оператор зі сталими коефіцієнтами.

Ф.р. задачі Коші (10), (2) задовольняє нерівності [6]

$$|D^i_{y_1} D^j_{y_2} D^s_{y_3} D^k_x Z(t, X; \tau, \Xi)| \leq C(t-\tau)^{-N_2/(2b)} exp\{-\rho_1(t, X; \tau, \Xi)\}, \quad (11)$$

де $N_2 = |k| + n + (2b+1)(m_1 + |i|) + (4b+1)(m_2 + |j|) + (6b+1)(m_3 + |s|)$,

$$\begin{aligned} \rho_1(t, X; \tau, \Xi) = {} & \left(|x - \zeta|(t-\tau)^{-1/(2b)}\right)^q + \left(|y_1 - \eta_1 + x^{(1)}|(t-\tau)^{-(2b+1)/(2b)}\right)^q \\ & + \left(\left| y_2 - \eta_2 + y_1^{(2)}(t-\tau) + \frac{x^{(2)}(t-\tau)^2}{2} \right| (t-\tau)^{-(4b+1)/(2b)} \right)^q \\ & + \left(\left| y_3 - \eta_3 + y_2^{(3)}(t-\tau) + \frac{y_1^{(3)}(t-\tau)^2}{2} + \frac{x^{(3)}(t-\tau)^3}{6} \right| (t-\tau)^{-(6b+1)/(2b)} \right)^q, \end{aligned}$$

$q = 2b/(2b-1)$. Нехай $u_0(X)$ має граничне середнє

$$\lim_{b_1 \to \infty, \ldots, b_N \to \infty} \frac{1}{2^{2N} \prod_{s=1}^N b_s} \int_{-b_1}^{b_1} \ldots \int_{-b_N}^{b_N} u_0(\Xi) d\Xi = \iota, \quad (12)$$

де $b_j \to \infty$ незалежно одне від одного, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Теорема 3. *Для того, щоб інтеграл Пуассона рівняння* (10) *рівномірно стабілізувався до* l *при* $t \to \infty$ *необхідно і достатньо, щоб* $u_0(X)$ *мала граничне середнє, яке дорівнює* l*.*

Доведення. Нехай $u_0(X)$ має рівномірне граничне середнє, що дорівнює 0. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $b_0(\varepsilon)$, що при всіх $b_j > b_0(\varepsilon)$ і при будь-якому X виконується

$$\left|\frac{1}{2^{2N}\prod_{s=1}^{N} b_s}\int_{-b_1+x_{11}}^{b_1+x_{11}}\cdots\int_{-b_N+y_{3m_3}}^{b_N+y_{3m_3}} u_0(\Xi)d\Xi\right| = 0.$$

Звідси випливає, що $u_0(X)$ має кутові граничні середні, що дорівнюють 0.

Зробивши в інтегралі Пуассона заміну змінних

$$x-\zeta = -\zeta' t^{1/(2b)}, \qquad y_1-\eta_1+x^{(1)}t = -\eta_1' t^{(2b+1)/(2b)},$$

$$y_2-\eta_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2} = -\eta_2' t^{(4b+1)/(2b)}, \quad y_3-\eta_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6} = -\eta_3' t^{(6b+1)/(2b)},$$

одержимо

$$u(t,X) = t^{N_3/(2b)}\int_{\mathbb{R}^N} Z^*(t,X;0,\Xi')u_0\Big(x+\zeta' t^{1/(2b)}, y_1+x^{(1)}t+\eta_1' t^{(2b+1)/(2b)},$$
$$y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\eta_2' t^{(4b+1)/(2b)}, y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{(6b+1)/(2b)}\Big)d\Xi',$$

де $Z^*(t,X;0,\Xi')$ — ф.р. задачі Коші (10), (2) у нових змінних,

$$N_3 = n+(2b+1)m_1+(4b+1)m_2+(6b+1)m_3,$$

або інакше

$$u(t,X) = t^{N_3/(2b)}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} Z^*(t,X;0,\Xi')\frac{\partial^N}{\partial\zeta_1\ldots\partial\eta_{3m_3}}\int_0^{\zeta_1}\cdots\int_0^{\eta_{3m_3}} u_0\Big(x+\zeta' t^{1/(2b)},$$
$$y_1+x^{(1)}t+\eta_1' t^{(2b+1)/(2b)}, y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\eta_2' t^{(4b+1)/(2b)},$$
$$y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{(6b+1)/(2b)}\Big)d\Xi' d\Xi.$$

Проінтегрувавши частинами, матимемо

$$u(t,X) = (-1)^N t^{N_3/(2b)}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\frac{\partial^N Z^*(t,X;0,\Xi')}{\partial\zeta_1\ldots\partial\eta_{3m_3}}\int_0^{\zeta_1}\cdots\int_0^{\eta_{3m_3}} u_0\Big(x+\zeta' t^{1/(2b)},\ldots,$$
$$y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+\frac{1}{6}x_{m_3}t^3-\eta_{3m_3}' t^{(6b+1)(2b)}\Big)d\Xi' d\Xi = I_1+I_2+I_3, \tag{13}$$

де I_1 — інтеграл по області, для якої виконується хоч одна із нерівностей

$$|\zeta_s| > B_s, |\eta_{ij}| > B_{ij}, \quad s=1,2,\ldots, \quad n, i=1,2,3, \quad j=1,2,\ldots,m_i,$$

I_2 — інтеграл по області $\{0 < h_s \le |\zeta_s| \le B_s,\ 0 < h_{ij} \le |\eta_{ij}| \le B_{ij}\}$; I_3 — інтеграл по області $\{|\zeta_s| \le h_s, |\eta_{ij}| \le h_{ij}\}$.

Оскільки

$$\left|\frac{\partial^N Z^*(t,X;0,\Xi')}{\partial\zeta_1\ldots\partial\eta_{3m_3}}\right| \le C_N t^{-N_3/(2b)} exp\{-c|\Xi|^q\},$$

то звідси випливає, що можна вибрати великі B_s, B_{ij} і достатньо малі h_s, h_{ij}, залежні тільки від ε, що для всіх X і t виконується

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}, |I_3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Перейдемо до оцінки I_2. Позначимо

$$g_t(\Xi) = \int_0^{\zeta_1} \dots \int_0^{\zeta_{3m_3}} u_0\Big(x + \zeta' t^{1/(2b)}, y_3 + y_2^{(3)} t + \frac{y_1^{(3)} t^2}{2} + \frac{x^{(3)} t^3}{6} + \eta_3' t^{(6b+1)/(2b)}\Big) d\Xi.$$

Зробивши заміну змінних

$$\begin{aligned} x + \zeta' t^{1/(2b)} = a, y_1 + x^{(1)} + t' \eta_1 t^{(2b+1)/(2b)} = \alpha_1, \\ y_2 + y_1^{(2)} t + \frac{x^{(2)} t^2}{2} + \eta_2' t^{(4b+1)/(2b)} = \alpha_2, \\ y_3 + y_2^{(3)} t + \frac{y_1^{(3)} t^2}{2} + \frac{x^{(3)} t^3}{6} + \eta_3' t^{(6b+1)/(2b)}) = \alpha_3, \end{aligned}$$

$g_t(\Xi)$ запишемо у вигляді

$$g_t(\Xi) = t^{N_3/(2b)} \int\limits_{x_{11}}^{x_{11}+\zeta_{11} t^{1/(2b)}} \dots \int\limits_{y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+x_{m_3}\frac{t^3}{6}}^{y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+x_{3m_3}\frac{t^3}{6}+\eta_{3m_3}t^{(6b+1)/(2b)}} u_0(A) dA.$$

Оскільки $u_0(X)$ має кутові граничні середні, то для будь-яких X, $|X| \leq K$, $t > N_0$, $|g_t(\Xi)|(\zeta_{11} \dots \eta_{3m_3})^{-1} < \delta$ виберемо

$$\delta = C_N^{-1} \frac{\varepsilon}{3} \left(\prod_{s=1}^{N} B_s \cdot \prod_{i,j} B_{i,j} \int_{\mathbb{R}^N} exp\{-c_0 |A|^q\} dA \right)^{-1},$$

тому $|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$, а $|u(t, X)| < \varepsilon$.

Необхідність умови теореми доведемо методом від супротивного. Нехай

$$u(t, X) = \int_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; 0, \Xi) d\Xi \to 0, \quad t \to \infty,$$

рівномірно по X, а початкова функція $u_0(X)$ не має рівномірного граничного середнього (12), де $l = 0$. Це означає, що знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що для будь-якого додатного n_0 знайдеться $\mathcal{B} > n_0$ і така точка $\mathcal{M}$, що

$$|S(\mathcal{B}, \mathcal{M})| = \left| \frac{1}{2\mathcal{B}^N} \int_{V_{\mathcal{B}}^{\mathcal{M}}} u_o(\Xi) d\Xi \right| \geq \varepsilon_0,$$

де $V_{\mathcal{B}}^{\mathcal{M}}$ — куб зі стороною $\mathcal{B}$ і центром у точці $\mathcal{M}$.

Оскільки ф.р. $Z(t, X; 0, 0)$ можна записати як

$$Z(t, X; 0, 0) = t^{-N_3/(2b)} Z_1 \Big(x t^{-1/(2b)}, (y_1 + x^{(1)} t) t^{-(2b+1)/(2b)},$$

$$\Big(y_2 + y_1^{(2)} t + \frac{x^{(2)} t^2}{2} \Big) t^{-(4b+1)/(2b)}, \Big(y_3 + y_2^{(3)} t + \frac{{y_1^{(3)}}^2}{t} 2 + \frac{x^{(3)} t^3}{6} \Big) t^{-(6b+1)/(2b)} \Big),$$

де Z_1 — ціла функція вказаних аргументів при $t > 0$, і

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} Z(t,X;0,0)dx = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} Z_1(A)dA = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} Z_1(A)dA = \int_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}-V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA,$$

$V_{\mathcal{B}^*}$ — куб зі стороною $\mathcal{B}^*$, що

$$\int_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA < \frac{\varepsilon_0}{4}, \qquad \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}-V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Після відповідної заміни змінних інтеграл Пуассона запишемо у такому вигляді:

$$u(t,X) = \int\limits_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)u_0\Big(x + \alpha t^{1/(2b)}, y_1 + x^{(1)}t + \beta_1 t^{(2b+1)/(2b)},$$

$$y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \beta_2 t^{(4b+1)/(2b)}, y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \beta_3 t^{(6b+1)/(2b)}\Big)dA$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}-V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)u_0\Big(x + \alpha t^{1/(2b)}, y_1 + x^{(1)}t + \beta_1 t^{(2b+1)/(2b)}, y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \beta_2 t^{(4b+1)/(2b)},$$

$$y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \beta_3 t^{(6b+1)/(2b)}\Big)dA = I_1 + I_2.$$

Для простоти будемо вважати, що $|u_0(X)| \leq 1$, $\mathcal{B}^*$ вибрано так, що $|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Виберемо послідовність $n_0^k \to \infty$, за нею знайдемо послідовність $\mathcal{B}_{(k)} \to \infty$ і $\mathcal{M}_{i(k)}$ такі, що $|S(\mathcal{B}_{i(k)}, \mathcal{M}_{i(k)})| \geq \varepsilon_0$, та означимо послідовність $t_{i(k)} = \left(\frac{\varepsilon_0}{8N\mathcal{B}^*}\mathcal{B}_{i(k)}\right)^{2b}$. Розглянемо

$$\left|\frac{1}{2^N \mathcal{B}_{i(k)}^N} \int_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} u(t_{i(k)}, X)dX\right| = \int_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dAS(\mathcal{B}_{i(k)}, \mathcal{M}_{i(k)})$$

$$- \int_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)dA \left|\frac{1}{2^N \mathcal{B}_{i(k)}^N}\Big[\int_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} u_0\Big(x + \alpha t^{1/(2b)}, y_1 + x^{(1)}t + \beta_1 t^{(2b+1)/(2b)},\right.$$

$$y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \beta_2 t^{(4b+1)/(2b)}, y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \beta_3 t^{(6b+1)/(2b)}\Big)dX$$

$$\left. - \int_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} u_0(X)dX\Big]\right| - \frac{1}{2^N \mathcal{B}_{i(k)}^N} \int_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} |I_2|dX \geq \frac{\varepsilon_0}{4}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{4}\right) - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} \geq \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Із цієї нерівності випливає, що в кожному кубі $V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}$ є хоча б одна точка $X_{(k)}$, у якій $u(t_{(k)}, X_{(k)}) \geq \frac{\varepsilon}{4}$, а $t_{(k)} \to \infty$, що суперечить рівномірній збіжності. □

Зауваження. *При $n = n_1$, $n_2 = n_3 = 0$ одержимо результат робіт [2, 6].*

REFERENCES

[1] Burtnyak I.V., Malytska H.P. *Option prices calculation by spectral analysis methods.* Business Inform 2013, **4**, 152–158. (in Ukrainian)

[2] Malytska H.P., Eidelman S.D. *On fundamental solutions and solution stabilization of Cauchy problem for some class of degenerated parabolic equations.* Differential equations 1975, **11** (7), 1316–1330. (in Russian)

[3] Malytska H.P. *Fundamental solution construction of Cauchy problem solution for diffusion equation with variable inertia.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1999, **42** (3), 56–60. (in Ukrainian)

[4] Malytska H.P. *Fundamental solution matrix of the Cauchy problem for a class of systems of Kolmogorov type equations.* Differential Equations 2010, **46** (5), 753–757.

[5] Malytska H.P. *On the structure of fundamental solution of Cauchy problem for elliptic-parabolic equations, which generalize diffusion equation with inertia.* Bull. National Univ. "Lvivs'ka Politechnika". Appl. Math. Series 2000, **411**, 221–228. (in Ukrainian)

[6] Malytska H.P., Repnikov V.D., Eidelman S.D. *On stabilization of Cauchy problem solution for diffusion equation with inertia.* Works Sci. Inst. Math. Voronezh Univ. 1972, **5**, 86–92. (in Russian)

Надійшло 03.07.2013

Malytska H.P., Burtnyak I.V. *On stabilization of Poisson integral for equations of Kolmogorov type*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 290–297.

Stabilization of Poisson integral for Kolmogorov equations is studied. Such equations have three groups of variables with degeneration of parabolicity.

Key words and phrases: ultraparabolic equations, Kolmogorov equations, stabilization, Poisson integral.

Малицкая А.П., Буртняк И.В. *О стабилизации интеграла Пуассона уравнений типа Колмогорова* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 290–297.

Исследуется стабилизация интеграла Пуассона для уравнений типа Колмогорова, что имеют три группы переменных, за которыми есть вырождение параболичности.

Ключевые слова и фразы: ультрапараболические уравнения, уравнения Колмогорова, стабилизация, интеграл Пуассона.