ISSN 2075-9827 **http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp**
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 96–103 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.96–103
doi:10.15330/cmp.6.1.96-103

Лукашів Т.О.

АСИМПТОТИЧНА СТОХАСТИЧНА СТІЙКІСТЬ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З ПОСТІЙНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Використано метод функціоналів Ляпунова-Красовського для дослідження асимптотичної стохастичної стійкості в цілому стохастичних дифузійних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням, які перебувають під впливом зовнішніх імпульсних збурень типу ланцюга Маркова.

Ключові слова і фрази: метод функціоналів Ляпунова-Красовського, динамічна система випадкової структури, зовнішні марковські перемикання, асимптотична стохастична стійкість в цілому.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: t.lukashiv@gmail.com

Вступ

Стійкість стохастичних диференціальних рівнянь з марковськими перемиканнями обговорювалася багатьма авторами, наприклад, І.Я. Кац [5], Є.Ф. Царков [10], К. Мао [6], Л.Ю. Шайхет [7], [11], М. Марітон [8], Г.К. Басак [1].

У даній роботі для дослідження асимптотичної стохастичної стійкості нового класу стохастичних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням і зовнішніми марковськими перемиканнями використано методику [9], яка, в свою чергу, є об’єднанням методики дослідження систем випадкової структури за І.Я. Кацом [5] та методики врахування зовнішніх марковських перемикань за Є.Ф. Царковим [10].

1 Постановка задачі

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ [4] розглянемо дифузійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння (СДРР)

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), x(t-r))dt + b(t, \xi(t), x(t), x(t-r))dw(t), \tag{1}$$

із зовнішніми марковськими перемиканнями

$$\begin{gathered} \Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_k-) = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)), \\ t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in \mathbf{N}\}, \end{gathered} \tag{2}$$

УДК 519.217; 519.718
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60J10, 60J27, 60H10, 68U20.

і з початковими умовами

$$x_t = \varphi \in \mathbf{D} \equiv \mathbf{D}\left([t_0 - r, t_0], \mathbf{R}^m\right), \xi(t_0) = y \in \mathbf{Y},\ \eta_{k_0} = h \in \mathbf{H}. \tag{3}$$

Тут $\xi(t)$ — марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y}$ з перехідною ймовірністю $\mathbf{P}(s, y, t, A)$; $(\eta_k, k \geq 0)$ — ланцюг Маркова із значеннями в метричному просторі $\mathbf{H}$ з перехідною ймовірністю на k-ому кроці $\mathbf{P}_k(h, G)$; $x_t = x(t+s), -r \leq s \leq 0$; $\theta \in [t_0 - r, t_0], r > 0$; $w(t)$ — одновимірний стандартний вінерів процес [4]; $\mathbf{D}$ — простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [12] з нормою

$$\|\varphi\| = \sup_{t_0 - r \leq \theta \leq t_0} |\varphi(\theta)|. \tag{4}$$

Зауваження 1. *Простір* $\mathbf{D}$ *не є повним відносно* (4)*, тому будемо працювати у розширеному просторі Скорохода* $\overline{\mathbf{D}}$*, який містить всі границі фундаментальних послідовностей [12]. Надалі* $\mathbf{D}$ *будемо розуміти як розширений простір* $\overline{\mathbf{D}}$.

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних відображення $a : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \times \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$; $b : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$; $g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ задовольняють умову Ліпшиця

$$\begin{gathered} |a(t, y, \varphi_1, \varphi_2) - a(t, y, \psi_1, \psi_2)|^2 + |b(t, y, \varphi_1, \varphi_2) - b(t, y, \psi_1, \psi_2)|^2 \\ + |g(t, y, h, \varphi_3) - g(t, y, h, \psi_3)|^2 \leq L\left(\|\varphi_1 - \psi_1\|^2 + \|\varphi_2 - \psi_2\|^2 + \|\varphi_3 - \psi_3\|^2\right) \end{gathered} \tag{5}$$

при $\forall t \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi_i, \psi_i \in \mathbf{D}, i \in \{1, 2, 3\}$, та умову

$$|a(t, y, 0, 0)| + |b(t, y, 0, 0)| + |g(t, y, h, 0)| = c < \infty. \tag{6}$$

Вказані умови щодо a, b і g гарантують існування сильного розвязку задачі (1)–(3) з точністю до стохастичної еквівалентності при будь-яких $t_0 \geq 0, \varphi \in \mathbf{D}$ і заданих реалізаціях марковського процесу $\{\xi(t), t \geq t_0\} \in \mathbf{Y}$ і ланцюга Маркова $(\eta_k, k \geq k_0)$ [13, 14].

2 Поведінка траєкторій

Обговоримо вплив процесу $\{\xi(t), t \geq t_0\}$ і ланцюга Маркова $(\eta_k, k \geq k_0)$ на траєкторії системи (1)–(3).

Випадкові зміни структури системи (1) викликаються зміною значення параметра $\xi(t)$, який має наступний зміст.

I. Нехай $\xi(t) \in \mathbf{Y}$ — суто розривний скалярний марковський процес, умовна ймовірність якого допускає розклад [3]

$$\mathbf{P}\left\{\xi(t + \Delta t) \in [\beta, \beta + \Delta\beta]/\xi(t) = \alpha \neq \beta\right\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\left\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau < t + \Delta t/\xi(t) = \alpha\right\} = 1 - p'(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t).$$

II. Скалярний процес $\xi(t)$ — однорідний марковський ланцюг із скінченним числом станів $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ і відомими параметрами q_{ij} за умови $q_i = \sum\limits_{j \neq i} q_{ij},\ i, j = \overline{1, k}$. При цьому умовні ймовірності допускають розклад

$$\mathbf{P}\left\{\xi(t + \Delta t) = y_i/\xi(t) = y_j\right\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\left\{\xi(\tau) = y_i, t < \tau < t + \Delta t/\xi(t) = y_i\right\} = 1 - q_i\Delta t + o(\Delta t).$$

III. Зміна розв'язку $x(t)$. У момент τ зміни структури системи $y_i \to y_j$ відбувається випадкова стрибкоподібна зміна фазового вектора $x(\tau - 0) = x$, $x(\tau) = z$, для якого задана умовна щільність $p_{ij}(\tau, z)$, а саме:

$$\mathbf{P}\left\{x(\tau) \in [z, z+dz]/\xi(t-0) = x\right\} = p_{ij}(\tau, z/x)dz + o(dz).$$

Розглянемо спочатку першу особливість, яка виникає при моделюванні системи (1), що знаходиться під впливом внутрішнього (параметричного) збурення $\xi(t)$ [5] з початковими даними (3) (без урахування зовнішніх марковських перемикань (2)).

Припустимо, для спрощення, що $\xi(t)$ — простий марковський ланцюг зі скінченним числом станів, тобто $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ (випадок II), що означає майже кускову сталість всіх реалізацій $\xi(t)$, а переходи — перемикання системи — відбуваються у випадкові моменти часу.

Тоді на випадковому інтервалі $t \in [\tau - s, \tau,)$, де $\xi(t) = y_i \in \mathbf{Y}$, рух буде відбуватися, на підставі СДРР (1), для $t \in [\tau - s, \tau)$ в силу системи

$$dx(t) = a(t, y_i, x(t), x(t-r))dt + b(t, y_i, x(t), x(t-r))dw(t), \tag{7}$$
$$x(t-s) = x(\theta), \theta \in [\tau - s - r, \tau - s]; \;\; \xi(t-s) = y_i.$$

Далі, якщо τ — момент переходу значення $\xi(t-0) = y_i$ до значення $\xi(\tau) = y_j \neq y_i$, то на наступному інтервалі сталості $\xi(\tau) = y_j$ слід розв'язувати СДРР (7) з y_j замість y_i.

Цим, власне, і пояснюється визначення системи (1) як системи випадкової структури.

Найцікавішими в більшості випадків є наступні варіанти поведінки траєкторії сильного розв'язку СДРР (1) з початковою умовою (3).

В1. У момент стрибкоподібної зміни структури $\xi(t)$ фазовий вектор $x(t)$ змінюється неперервно з імовірністю 1, тобто в момент τ зміна структури системи не відбувається $x(\tau - 0) = x(\tau)$.

В2. У момент $\tau > 0$ стрибкоподібної зміни структури фазовий вектор однозначно визначається станом, в якому знаходилась система безпосередньо перед зміною структури і переходом $\xi(\tau - 0) = y_i$ в $\xi(\tau) = y_j \neq y_i$.

В цьому випадку природно припустити, що $x(\tau) = \varphi_{ij}(x(\tau - 0))$, $i \neq j$, де $\varphi_{ij} \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^m)$, причому $\varphi_{ij}(0) = 0$.

В3. Найзагальніший випадок виникає тоді, коли для випадкового моменту τ зміни структури системи (1) $y_i \to y_j$ слід задати умовний закон розподілу початкового стану $x(\tau) \equiv x(\tau, \omega) \in \mathbf{R}^m$, $\tau \in \mathbf{R}_+$, $\omega \in \Omega$ для зміненої структури СДРР (1):

$$\mathbf{P}\left\{x(\tau) \in [z, z+dz]/x(\tau-0) = x\right\} = p_{ij}(\tau, z/x)dz + \sigma(dz),$$

де $p_{ij}(\tau, z/x)$ означає умовну ймовірність вказаного m-вимірного розподілу.

Щодо зовнішніх перемикань (2), які визначаються ланцюгом Маркова $\{\eta_k, k \geq 0\}$, то їх врахування дозволяє розглядати скінченні стрибки траєкторій розв'язку системи (1) в перетині із вищевказаними випадками.

3 Асимптотична стохастична стійкість за ймовірністю в цілому

Позначимо через $\mathbf{P}_k((y,h), \Gamma \times G)$ перехідну ймовірність ланцюга Маркова $(\xi(t_k), \eta_k)$ на k-ому кроці. Ввівши індекси $\mathbf{P}^{t_k}_{y,h}(\xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G) \equiv \mathbf{P}_k((y,h), \Gamma \times G)$, введемо функцію

$$\mathbf{P}_k((y,h,\varphi), \Gamma \times G \times C) \equiv \mathbf{P}^{t_k}_{y,h}(x(t_k, y, h, \varphi) \in C, \xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G)$$

при всіх $t_k \in S \bigcup \{t_0\}$, $k \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, $\varphi \in \mathbf{D}$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ і борелевих $C \subset \mathbf{D}$, $\Gamma \subset \mathbf{Y}$, $G \subset \mathbf{H}$, де $x(t_k, y, h, \varphi)$ — розв'язок системи (1), (2) з початковими умовами (3).

Означення 1. *Оператор Ляпунова $(lv_k)(y,h,\varphi)$ на послідовності вимірних функціоналів $v_k(y,h,\varphi) : \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}^1, k \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, для СДРР (1) із зовнішніми марковськими перемиканнями (2) визначаємо рівністю [3]*

$$(lv_k)(y,h,\varphi) \equiv \int\limits_{\mathbf{Y}\times\mathbf{H}\times\mathbf{D}} \mathbf{P}_k(y,h,\varphi)(du \times dz \times dl) v_{k+1}(u,z,l) - v_k(y,h,\varphi).$$

Означення 2. *Функціоналом Ляпунова-Красовського для системи випадкової структури (1)–(3) назвемо послідовність таких невід'ємних функцій $\{v_k(y,h,\varphi), k \geq 0\}$, що виконуються умови:*

1) при $s \to +\infty$

$$\underline{v}(s) \equiv \inf_{k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \|\varphi\| \geq s} v_k(y,h,\varphi) \to +\infty; \tag{8}$$

2) при $s \to 0$

$$\overline{v}(s) \equiv \sup_{k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \|\varphi\| \leq s} v_k(y,h,\varphi) \to 0;$$

причому $\underline{v}(s)$ і $\overline{v}(s)$ неперервні і монотонні.

Означення 3. *Систему випадкової структури (1)–(3) назвемо:*
— стійкою за ймовірністю в цілому, якщо $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з нерівності $\|x_{t_0}\| < \delta$ випливає нерівність

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t \geq t_0} |x(t_0, y, h, \varphi)| > \varepsilon_1 \right\} < \varepsilon_2$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}$ і $t_0 \geq 0$;
— асимптотично стохастично стійкою в цілому, якщо вона стійка за ймовірністю, і для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_1 > 0$, що

$$\lim_{T \to \infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_{t \geq T} |x(t, y, h, \varphi)| > \varepsilon \right\} = 0$$

при всіх $\|x_t\| < \delta_1$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}$ і $T \geq t_0 \geq 0$.

Для подальших викладок використовуватимемо оцінку розв'язку задачі (1)–(3) на інтервалах $[t_k, t_{k+1})$, $k \geq 0$.

Лема 1. *При виконанні умов (5), (6) при всіх $k \geq 0$ для сильного розв'язку задачі Коші (1)–(3) має місце нерівність*

$$\mathbf{E}\left\{ \sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |x(t)|^2 \right\} \leq 15(1+4L) e^{5L(1+4L)(t_{k+1}-t_k)^2} \cdot \left(\mathbf{E}\left\{ x^2(t_k) \right\} + 2c^2(t_{k+1} - t_k) \right). \tag{9}$$

Доведення. При всіх $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_k \geq t_0$, використовуючи інтегральну форму запису розв'язку СДРР (1) [2, 14], легко записати нерівність

$$|x(t)| \leq |x(t_k)| + \int\limits_{t_k}^{t} |a(\tau, y, x(\tau), x(\tau - r)) - a(\tau, y, 0, 0)| d\tau$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t} |a(\tau, y, 0, 0)| d\tau + \left| \int\limits_{t_k}^{t} b(\tau, y, x(\tau), x(\tau - r)) - b(\tau, y, 0, 0) dw(\tau) \right| + \left| \int\limits_{t_k}^{t} b(\tau, y, 0, 0) dw(\tau) \right|.$$

Піднесемо до квадрату ліву і праву частини одержаної нерівності, обчислимо sup від одержаного виразу, використовши нерівність Коші-Буняковського і нерівність для оцінки умовного математичного сподівання від квадрата супремума інтеграла Вінера-Іто. Врахувавши (5), (6), одержимо

$$\mathbf{E}\Big\{\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}|x(t)|^2\Big\}\le 5\Big[\mathbf{E}\left\{x^2(t_k)\right\}+2c^2(t_{k+1}-t_k)$$
$$+\Big(L(t_{k+1}-t_k)+4L^2(t_{k+1}-t_k)\Big)\cdot\mathbf{E}\Big\{\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}|x(\tau)|^2d\tau\Big\}\Big].$$

Далі, застосовуючи нерівність Гронуолла [14], легко побачити, що

$$\mathbf{E}\Big\{\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}|x(t)|^2\Big\}\le 5\left[\mathbf{E}\left\{x^2(t_k)\right\}+2c^2(t_{k+1}-t_k)\right]e^{5L(1+4L)(t_{k+1}-t_k)^2}.$$

Для $t=t_{k+1}$ сильний розв'язок системи (1)–(3), очевидно, повинен задовольняти нерівність

$$\mathbf{E}\left\{|x(t_{k+1})|^2\right\}\le 3\left[\mathbf{E}\left\{x^2(t_{k+1}-)\right\}\right.$$
$$+2\mathbf{E}\left\{|g(t_{k+1}-,\xi(t_{k+1}-),\eta_{k+1},x(t_{k+1}-))-g(t_{k+1}-,\xi(t_{k+1}-),\eta_{k+1},0)|^2\right\}$$
$$\left.+2\mathbf{E}\left\{|g(t_{k+1}-,\xi(t_{k+1}-),\eta_{k+1},0)|^2\right\}\right]\le 3\Big[(1+2L)\mathbf{E}\Big\{\sup_{t_k\le t\le t_{k+1}}|x(t)|^2\Big\}+2c^2\Big].$$

Об'єднуючи дві останні нерівності, одержимо потрібну нерівність (9). □

Теорема 1. *Нехай:*
1) $0<|t_{k+1}-t_k|\le\Delta$, $k\ge 0$, $\Delta>0$;
2) виконується умова Ліпшиця (5);
3) існують такі послідовності функціоналів Ляпунова-Красовського $v_k(y,h,\varphi)$ *і* $a_k(y,h,\varphi)$, $k>0$, *що на підставі системи (1)–(3) правильна нерівність*

$$(lv_k)(y,h,\varphi)\le -a_k(y,h,\varphi). \tag{10}$$

Тоді сильний розв'язок системи випадкової структури (1), (3) із зовнішніми перемиканнями типу ланцюга Маркова (2) асимптотично стохастично стійкий в цілому.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{U}_{t_k}$ мінімальну σ-алгебру, відносно якої вимірні $\xi(t)$ при всіх $t\in[t_0,t_k]$ і η_n при $n\le k$. Тоді умовне математичне сподівання можна обчислити за формулою [3]

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathcal{U}_{t_k}\}$$
$$=\int_{\mathbf{Y}\times\mathbf{H}\times\mathbf{D}}\mathbf{P}_k(y,h,\varphi)(du\times dz\times dl)\cdot v_{k+1}(u,z,l)\Bigg|_{\substack{y=\xi(t_k)\\ h=\eta_k\\ \varphi=x(t)|_{t_k-r\le t\le t_k}}}. \tag{11}$$

Тут $v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))$ означає, що розглядається функціонал Ляпунова-Красовського $v_k(y,h,\varphi)$ на інтервалі $[t_k,t_{k+1})$.

У цьому випадку за означенням дискретного оператора Ляпунова $(lv_k)(y,h,\varphi)$ з рівності (11) одержимо, враховуючи (10), нерівність

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathcal{U}_{t_k}\} = v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) + (lv_k)(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) \leq \bar{v}(\|x_{t_k}\|), \tag{12}$$

яка виконується м.н., як і всі подальші нерівності.

З нерівності (9) (за нерівністю Ляпунова для моментів [4] з існування другого моменту випливає існування першого моменту) і властивостей функції $\bar{v}$ випливає існування умовного математичного сподівання лівої частини нерівності (12).

Тепер, на основі (11), запишемо дискретний оператор Ляпунова $(lv_k)(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))$ вздовж розв'язків (1)–(3):

$$\begin{aligned}(lv_k)(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) &= \mathbf{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathcal{U}_{t_k}\} - v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) \\ &\leq -a_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) \leq 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Тоді при $k \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathcal{U}_{t_k}\} \leq v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)).$$

За означенням супермартингала [4], послідовність випадкових величин $\{v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\}$ при $k \in \mathbf{N}$ утворює супермартингал відносно $\mathcal{F}_{t_k}$ [10].

Далі, знайшовши математичне сподівання від обох частин нерівності (13), і просумувавши за k від $n \geq k_0$ до N, одержимо

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}),\eta_{N+1},x(t_{N+1}))\} - \mathbf{E}\{v_n(\xi(t_n),\eta_n,x(t_n))\} \\ &= \sum_{k=n}^{N}\mathbf{E}\{(lv_k)(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\} \leq -\sum_{k=n}^{N}\mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\} \leq 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Тому маємо

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq t_0}|x(t,y,h,\varphi)| > \varepsilon_1\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}}\sup_{t_{k_0+n-1}\leq t\leq t_{k_0+n}}|x(t,y,h,\varphi)| > \varepsilon_1\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}}|x(t_{k_0+n-1},y,h,\varphi)| > \varepsilon_1\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}}v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}),\eta_{k_0+n-1},x(t_{k_0+n-1})) \geq \bar{v}(\varepsilon_1)\right\}, \quad \forall\varepsilon_1 > 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Дійсно, якщо $\sup\limits_{k\geq k_0}\|x_{t_k}\| \geq s$, то на основі (8) виконується нерівність

$$\sup_{k\geq k_0}v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) \geq \inf_{k\geq k_0, y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}, ||\varphi||\geq s}v_k(y,h,\varphi) = \bar{v}(s).$$

Тепер скористаємося відомою нерівністю для невід'ємних супермартингалів й одержимо, що (15):

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}}v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}),\eta_{k_0+n-1},x(t_{k_0+n-1})) \geq \bar{v}(\varepsilon_1)\right\} \leq \frac{1}{\bar{v}(\varepsilon_1)}v_{k_0}(y,h,\varphi) \leq \frac{\bar{v}(\|\varphi\|)}{\bar{v}(\varepsilon_1)}. \tag{16}$$

На основі нерівності (15) нерівність (16) дає можливість гарантувати виконання нерівності

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq t_0}|x(t_0,y,h,\varphi)| > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2,\ \forall\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0,$$

а це означає, що система (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому.

З нерівності (14) випливають оцінки

$$\mathbf{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}),\eta_{N+1},x(t_{N+1}))\} \leq v_{k_0}(y,h,\varphi),$$

$$\sum_{k=k_0}^{N} \mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\} \leq v_{k_0}(y,h,\varphi), \qquad (17)$$

при всіх $N \geq k_0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}$.

На підставі того, що послідовність $\{a_k\}$, $k \geq 0$, є функціоналами Ляпунова-Красовського, існують такі неперервні строго монотонні функції $\underline{a}(s)$ і $\overline{a}(s)$, що

$$\underline{a}(\|\varphi\|) \leq a_k(y,h,\varphi) \leq \overline{a}(\|\varphi\|),$$

для $\forall k \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}$ $\underline{a}(0) = \overline{a}(0) = 0$.

Таким чином, із збіжності ряду у (17) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mathbf{E}\{\underline{a}(|x(t_k,y,h,\varphi)|\}$$

для $\forall t_0 \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}$.

Тоді в силу неперервності $\underline{a}(s)$ і рівності $\underline{a}(0) = 0$ матимемо $\lim\limits_{k\to\infty} |x(t_k,y,h,\varphi)| = 0$. Звідси випливає прямування до нуля за ймовірністю послідовності $\bar{v}(|x(t_k,\, y,h,\varphi)|)$ при $k \to \infty$ для $\forall t_0 \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}$.

Отже, з властивостей функціоналів Ляпунова-Красовського [2, 10] робимо висновок, що невід'ємний супермартингал $v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))$ при $k \to \infty$ прямує до нуля за ймовірністю при всіх реалізаціях процесу $\xi(t) \equiv \xi(t,w)$ і послідовності $\{\eta_k\}$, $k \leq 1$.

Далі, невід'ємний обмежений зверху супермартингал має границю з імовірністю одиниця [4]. Тоді, використовуючи (9), одержимо

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{t\geq T} |x(t_k,y,h,\varphi)| > \varepsilon\} = 0,$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}$ і $T \geq t_0 \geq 0$, що означає, асимптотичну стохастичну стійкість в цілому сильного розв'язку системи (1)–(3). Теорема доведена. □

Як наслідок теореми 1, випливає твердження.

Теорема 2. *Нехай:*
1) виконуються умови 1), 2) теореми 1;
2) на підставі системи (1)–(3) для послідовності функціоналів Ляпунова-Красовського $\{v_k, k \geq 0\}$ *виконується нерівність* $(lv_k)(y,h,\varphi) \leq 0$ *для* $\forall k \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}$.

Тоді динамічна система випадкової структури (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому.

Висновки

Знайдено достатні умови стійкості за ймовірністю в цілому, асимптотичної стохастичної стійкості в цілому сильного розв'язку дифузійних стохастичних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням і зовнішніми перемиканнями типу ланцюга Маркова.

References

[1] Basak G.K., Bisi A., Ghosh M.K. *Stability of a random diffusion with linear drift*. J. Math. Anal. Appl. 1996, **202** (2), 604–622. doi:10.1006/jmaa.1996.0336

[2] Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Stochastic Differential Equations and its Applications. Naukova dumka, Kyiv, 1982. (in Russian)

[3] Dynkin E.B. Markov processes. Phyzmatgiz, Moscow, 1969. (in Russian)

[4] Doob J. Stochastic processes. Phyzmatgiz, Moscow, 1963. (in Russian)

[5] Katz I.Ya. Lyapunov functions method for the stability and stabilization problems of the systems with random structure. UGAPS, Ekaterinburg, 1998. (in Russian)

[6] Mao X. *Stability of stochastic differential equations with Markovian switching*. Stochastic Process. Appl. 1999, **79** (1), 45–67. doi:10.1016/S0304-4149(98)00070-2

[7] Mao X., Matasov A., Piunovskiy A.B. *Stochastic differential delay equations with Markovian switching*. Bernoulli 2000, **6** (1), 73–90. doi:10.2307/3318634

[8] Mariton M. Jump Linear Systems in Automatic Control. Marcel-Dekker, New York, 1990.

[9] Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. *Lyapunov functions method for the investigation of the stability of the stochastic Ito's systems with random structure and impulse Markov switchings. I. General theorem on stability of the impulse stochastic systems*. Cybernet. Systems Anal. 2009, **45** (2), 281–290. doi:10.1007/s10559-009-9102-8 (translation of Kibernet. Sistem. Anal. 2009, **2**, 135–145. (in Russian))

[10] Sverdan M.L., Tsarkov Ye.F. Stability of the stochastic impulse systems. RTU, Riga, 1994. (in Russian)

[11] Shaikhet L. *Stability of stochastic hereditary systems with Markov switching*. Theory Stoch. Process. 1996, **2**, 180–184.

[12] Skorokhod A.V. Asymptotic methods of the theory of the stochastic differential equations. Naukova dumka, Kyiv, 1987. (in Russian)

[13] Tsarkov Ye.F. Random disturbances of the functional differential equations. Zinatne, Riga, 1989. (in Russian)

[14] Yasynskyy V.K., Yasynskyy Ye.V. Problems of the stability and stabilization of the dynamical systems with finite aftereffect. TViMS, Kyiv, 2005. (in Ukrainian)

Надійшло 22.02.2014

Lukashiv T.O. *Asymptotic stochastic stability of the stochastic dynamical systems of the random structure with constant delay*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 96–103.

The method of Lyapunov-Krasovskyy functionals is used for the researching of the asymptotic stochastic stability in whole of the stochastic diffusion dynamical systems of the random structure with constant delay, which is under the influence of external impulse disturbances of the Markov's chain type.

Key words and phrases: Lyapunov-Krasovskyy functionals method, dynamical system of the random structure, external Markov switchings, asymptotic stochastic stability in the whole.

Лукашив Т.О. *Асимптотическая стохастическая устойчивость стохастических динамических систем случайной структуры с постоянным запаздыванием* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 96–103.

Использован метод функционалов Ляпунова-Красовского для исследования асимптотической стохастической устойчивости в целом стохастических диффузионных динамических систем случайной структуры с постоянным запаздыванием, которые пребывают под влиянием внешних импульсных возмущений типа цепи Маркова.

Ключевые слова и фразы: метод функционалов Ляпунова-Красовского, динамическая система случайной структуры, внешние марковские переключения, асимптотическая стохастическая устойчивость в целом.