ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (1), 28–37
doi:10.15330/cmp.7.1.28-37

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2015, Т.7, №1, С.28–37

Вельгач А.В.

НЕПЕРЕРВНО-ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНІЄЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Встановлено достатні умови існування неперервно-диференційовних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків однієї граничної задачі для систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу зі скінченною кількістю постійних відхилень аргументу, запропоновано метод їх побудови та досліджено асимптотичні властивості таких розв'язків.

Ключові слова і фрази: неперервно-диференційовний обмежений розв'язок, гранична задача, система лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

Volodymyr Gnatiuk Ternopil National Pedagogical University, 2 Kryvonosa str., 46027, Ternopil, Ukraine
E-mail: velgandr@ukr.net

У даній статті розглядається система рівнянь вигляду

$$x'(t+1) = Ax'(t) + \sum_{m=1}^{k} A_m(t)x(t+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(t)x'(t+\beta_m) + F(t), \tag{1}$$

де A — стала $(n \times n)$-матриця, $A_m(t)$, $B_m(t)$, $m = 1,\ldots,k$ — неперервні при $t \in \mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$ $(n \times n)$-матриці, $\alpha_m > 0$, $\beta_m > 0$, $m = 1,..,k$, $F(t)$ — неперервна при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функція розмірності n. Зауважимо, що системи вигляду

$$x'(t+1) = Ax'(t) + F(t, x(t), x(f(t)), x'(g(t))), \tag{2}$$

були предметом розгляду багатьох математиків [1, 2]. При цьому, як правило, вивчалися задачі, які характерні для звичайних диференціальних рівнянь — існування і єдиність розв'язків задачі Коші, основної початкової задачі, різного роду крайових задач. Але при дослідженні таких рівнянь дуже часто виникає необхідність в дослідженні задач, які враховують їх специфіку. Одна із таких задач полягає в дослідженні питання про існування неперервно-диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків систем (2), які задовольняють умову

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t+1) - Ax(t)] = 0. \tag{3}$$

Зокрема, в [3, 4] у випадку коли $A = E$ та [5] при $det A \neq 0$ вивчалася структура множини неперервно-диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків граничної задачі (2), (3).

В даній роботі досліджується питання існування неперервно-диференційовних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків задачі (1), (3) у випадку, коли виконуються наступні умови:

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 37H10.

1) $\Big|\int\limits_t^{+\infty} F(\tau)d\tau\Big| \le M$, $|F(t)| \le M$, де M — деяка додатна стала, $t \in \mathbb{R}^+$,
$\Big|\int\limits_t^{+\infty} |A_m(\tau)|d\tau\Big| \le a_m$, $|A_m(t)| \le a_m$, $\Big|\int\limits_t^{+\infty} |B_m(\tau)|d\tau\Big| \le b_m$, $|B_m(t)| \le b_m$,
$m = 1, .., k$, $t \in \mathbb{R}^+$;

2) $|A^{-1}| < 1$, $\Delta = \dfrac{|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|}\Big(\sum\limits_{m=1}^{k} a_m + \sum\limits_{m=1}^{k} b_m\Big) < 1$.

Для розв'язання задачі (1), (3) достатньо, очевидно, довести, що система інтегральних рівнянь

$$x(t+1) = Ax(t) - \int\limits_t^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau)x(\tau+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau)x'(\tau+\beta_m) + F(\tau)\Big)d\tau \qquad (4)$$

має неперервно-диференційовний при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок.

Покажемо, що система (4) має розв'язок у вигляді ряду

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \qquad (5)$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервно-диференційовні при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функції.

Дійсно, підставляючи ряд (5) в (4), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = A\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) - \int\limits_t^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau)\sum_{i=0}^{\infty} x_i(\tau+\alpha_m)$$
$$+ \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau)\sum_{i=0}^{\infty} x_i'(\tau+\beta_m) + F(\tau)\Big)d\tau.$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) - \int\limits_t^{+\infty} F(\tau)d\tau, \qquad (6)$$

$$x_i(t+1) = Ax_i(t) - \int\limits_t^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau)x_{i-1}(\tau+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau)x_{i-1}'(\tau+\beta_m)\Big)d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (7)$$

то ряд (5) є формальним розв'язком системи рівнянь (4).

Система рівнянь (6) має формальний розв'язок у вигляді ряду

$$x_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)}\int\limits_{t+j}^{+\infty} F(\tau)d\tau, \qquad (8)$$

який внаслідок умов 1), 2) рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ разом із своєю похідною і виконуються умови

$$|x_0(t)| \le \widetilde{M}, \quad |x_0'(t)| \le \widetilde{M}, \tag{9}$$

де $\widetilde{M} = \frac{|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|}M$. Оскільки при $i = 1, 2, \ldots$ ряди

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau) x_{i-1}(\tau + \alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau) x_{i-1}'(\tau + \beta_m) \Big) d\tau, \tag{10}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (7) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (10) в (7)), то залишається показати, що вони рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ разом із своїми похідними і виконуються оцінки:

$$|x_i(t)| \le \widetilde{M}\Delta^j, \quad |x_i'(t)| \le \widetilde{M}\Delta^j, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Справді, при $i = 1$ маємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} |A_m(\tau)||x_0(\tau + \alpha_m)| + \sum_{m=1}^{k} |B_m(\tau)||x_0'(\tau + \beta_m)| \Big) d\tau \Big|$$

$$\le \widetilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big(\sum_{m=1}^{k} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} |A_m(\tau)| d\tau \Big| + \sum_{m=1}^{k} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} |B_m(\tau)| d\tau \Big| \Big)$$

$$\le \widetilde{M} \frac{|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|} \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m + \sum_{m=1}^{k} b_m \Big) \le \widetilde{M}\Delta,$$

$$|x_1'(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big(\sum_{m=1}^{k} |A_m(t+j)||x_0(t+j+\alpha_m)| + \sum_{m=1}^{k} |B_m(t+j)||x_0'(t+j+\beta_m)| \Big)$$

$$\le \widetilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m + \sum_{m=1}^{k} b_m \Big) \le \widetilde{M}\Delta$$

і, отже, оцінки (11) мають місце. Розмірковуючи по індукції, припустимо, що оцінка (11) доведена уже для деякого $i \ge 1$, і покажемо, що вона зберігається для $i+1$. Дійсно, на підставі (10), (11) і умов 1), 2) отримуємо

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} |A_m(\tau)||x_i(\tau + \alpha_m)| + \sum_{m=1}^{k} |B_m(\tau)||x_i'(\tau + \beta_m)| \Big) d\tau \Big|$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \widetilde{M}\Delta^i \Big(\sum_{m=1}^{k} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} |A_m(\tau)| d\tau + \sum_{m=1}^{k} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} |B_m(\tau)| d\tau \Big) \Big|$$

$$\le \widetilde{M}\Delta^i \frac{|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|} \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m + \sum_{m=1}^{k} b_m \Big) \le \widetilde{M}\Delta^{i+1},$$

$$|x_{i+1}'(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big(\sum_{m=1}^{k} |A_m(t+j)||x_i(t+j+\alpha_m)| + \sum_{m=1}^{k} |B_m(t+j)||x_i'(t+j+\beta_m)| \Big)$$

$$\le \widetilde{M}\Delta^i \frac{|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|} \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m + \sum_{m=1}^{k} b_m \Big) \le \widetilde{M}\Delta^{i+1}.$$

Отже, системи рівнянь (7), $i = 0,1,\ldots$, мають неперервно-диференційовні при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язки $x_i(t)$, $i = 0,1,\ldots$, у вигляді рядів (10), $i = 0,1,\ldots$, які рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}^+$, і задовольняють умови (11), $i = 0,1,\ldots$. Звідси і умови 2) безпосередньо випливає, що ряд (5) (разом із своєю першою похідною) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}^+$, його сума $\overline{x}(t)$ є неперервно-диференційовним розв'язком системи рівнянь (4) і задовольняє умови

$$|\overline{x}(t)| \le \frac{\widetilde{M}}{1-\Delta}, \quad |\overline{x}'(t)| \le \frac{\widetilde{M}}{1-\Delta}.$$

Покажемо тепер, що побудований у вигляді ряду (5) розв'язок $\overline{x}(t)$ системи рівнянь (4) є єдиним при виконанні умов 1), 2). Дійсно, припустимо, що існує ще один неперервно-диференційовний обмежений при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок $y(t)$ такий, що $y(t) \not\equiv \overline{x}(t)$. Тоді із тотожностей

$$\overline{x}(t+1) = A\overline{x}(t) - \int\limits_t^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^k A_m(\tau)\overline{x}(\tau+\alpha_m) + \sum_{m=1}^k B_m(\tau)\overline{x}'(\tau+\beta_m) + F(\tau)\Big)d\tau,$$

$$y(t+1) = Ay(t) - \int\limits_t^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^k A_m(\tau)y(\tau+\alpha_m) + \sum_{m=1}^k B_m(\tau)y'(\tau+\beta_m) + F(\tau)\Big)d\tau$$

і умов 1), 2) отримуємо

$$\begin{aligned}
|\overline{x}(t) - y(t)| \le |A^{-1}||\overline{x}(t+1) - y(t+1)| + |A^{-1}|\Big|\int\limits_t^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^k |A_m(\tau)||\overline{x}(\tau+\alpha_m) - y(\tau+\alpha_m)| \\
+ \sum_{m=1}^k |B_m(\tau)||\overline{x}'(\tau+\alpha_m) - y'(\tau+\beta_m)|\Big)d\tau\Big| \\
\le |A^{-1}|\ \|\overline{x}(t) - y(t)\| + |A^{-1}|\big(\sum_{m=1}^k a_m + \sum_{m=1}^k b_m\big)\|\overline{x}(t) - y(t)\| \\
= (|A^{-1}| + \Delta(1 - |A^{-1}|))\|\overline{x}(t) - y(t)\| = \Delta'\|\overline{x}(t) - y(t)\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\overline{x}'(t) - y'(t)| \le |A^{-1}||\overline{x}'(t+1) - y'(t+1)| + |A^{-1}|\Big|\Big(\sum_{m=1}^k |A_m(t)||\overline{x}(t+\alpha_m) - y(t+\alpha_m)| \\
+ \sum_{m=1}^k |B_m(t)||\overline{x}'(t+\alpha_m) - y'(t+\beta_m)|\Big)d\tau\Big| \\
\le |A^{-1}||\|\overline{x}(t) - y(t)\| + |A^{-1}|\big(\sum_{m=1}^k a_m + \sum_{m=1}^k b_m\big)\|\overline{x}(t) - y(t)\| \\
= (|A^{-1}| + \Delta(1 - |A^{-1}|))\|\overline{x}(t) - y(t)\| = \Delta'\|\overline{x}(t) - y(t)\|,
\end{aligned}$$

де $\|\overline{x}(t) - y(t)\| = max\Big\{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}|\overline{x}(t) - y(t)|, \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}|\overline{x}'(t) - y'(t)|\Big\}$, $0 < \Delta' < 1$. Звідси випливає $\|\overline{x}(t) - y(t)\| \le \Delta'\|\overline{x}(t) - y(t)\|$, що є можливим лише у випадку, коли $\overline{x} \equiv y$. Отже, отримане протиріччя показує, що побудований вище неперервно-диференційовний обмежений при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок $\overline{x}(t)$ у вигляді ряду (5) є єдиним при виконанні умов 1), 2).

Підсумовуючи наведені вище результати, приходимо до наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1), 2). Тоді система рівнянь* (4) *має єдиний неперервно-диференційовний обмежений при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язок* $\overline{x}(t)$ *у вигляді ряду* (5)*, в якому вектор-функції* $x_i(t)$*,* $i = 0, 1, \ldots$*, визначаються формулами* (10)*,* $i = 0, 1, \ldots$.

Розглянемо тепер систему рівнянь вигляду (1) у випадку, коли виконуються умови:

3) Ряди $\widetilde{F}(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} |F(\tau)| d\tau \Big|$, $\widetilde{F}'(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} |F(t+j)|$ рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ і $\widetilde{F}(t) \le P$, $\widetilde{F}'(t) \le P$, $P > 0$;

4) $|A_m(t)| \le a_m(t)$, $|B_m(t)| \le b_m(t)$, $m = 1, \ldots, k$, $\sum\limits_{m=1}^{k} a_m(t) = a(t)$, $\sum\limits_{m=1}^{k} b_m(t) = b(t)$, де $a_m(t)$, $b_m(t)$, $m = 1, \ldots, k$, — деякі неперервні при $t \in \mathbb{R}^+$, невід'ємні функції такі, що

$$\sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} (a(\tau) + b(\tau)) d\tau \Big| \le \theta < 1,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \big(a(t+j) + b(t+j) \big) \le \theta < 1.$$

Як і раніше будемо досліджувати питання про існування неперервно-диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків, що задовольняють умову (3). Для цього, очевидно, достатньо вивчити це питання для системи інтегральних рівнянь (4). Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 3), 4). Тоді система рівнянь* (4) *має неперервно-диференційовний обмежений при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язок* $\widetilde{x}(t)$.

Доведення. Покажемо, що при виконанні умов 3), 4) система рівнянь (4) має неперервно-диференційовний обмежений при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок $\widetilde{x}(t)$ у вигляді ряду

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t), \tag{12}$$

де $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, — деякі неперервно-диференційовні обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функції. Дійсно, підставляючи ряд (12) у (4), одержимо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t+1) = A \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t) - \int\limits_{t}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau) \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(\tau + \alpha_m)$$
$$+ \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau) \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}'_i(\tau + \beta_m) + F(\tau) \Big) d\tau,$$

звідки приходимо до висновку, що якщо вектор-функції $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\widetilde{x}_0(t+1) = A \widetilde{x}_0(t) - \int\limits_{t}^{+\infty} F(\tau) d\tau, \tag{13}$$

$$\widetilde{x}_i(t+1) = A\widetilde{x}_i(t) - \int\limits_t^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau)\widetilde{x}_{i-1}(\tau+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau)\widetilde{x}'_{i-1}(\tau+\beta_m) \Big) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{14}$$

то ряд (12) є формальним розв'язком системи (4). Згідно умови 3) ряди

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_0(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \int\limits_{t+j}^{+\infty} F(\tau)d\tau, \\ \widetilde{x}'_0(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} F(t+j) \end{aligned} \tag{15}$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}^+$, вектор-функція $\widetilde{x}_0(t)$ задовольняє систему рівнянь (13) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (15) в (13)) і умови

$$|\widetilde{x}_0(t)| \le P, \tag{16}$$

$$|\widetilde{x}'_0(t)| \le P. \tag{17}$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (14), $i = 1, 2, \dots$, можна переконатися, що ряди

$$\widetilde{x}_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau)\widetilde{x}_{i-1}(\tau+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau)\widetilde{x}'_{i-1}(\tau+\beta_m) \Big) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{18}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (14), $i = 1, 2, \dots$. Доведемо, що ці ряди рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ до деяких вектор-функцій $\widetilde{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, які є неперервно-диференційовними і задовольняють умови

$$|\widetilde{x}_i(t)| \le P\theta^i, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

$$|\widetilde{x}'_i(t)| \le P\theta^i, \quad i = 1, 2, \dots. \tag{20}$$

Дійсно, на підставі умови 4), (18), (16) і (17) отримуємо

$$\begin{aligned} |\widetilde{x}_1(t)| &\le \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} |A_m(\tau)||\widetilde{x}_0(\tau+\alpha_m)| + \sum_{m=1}^{k} |B_m(\tau)||\widetilde{x}'_0(\tau+\beta_m)| \Big) d\tau \Big| \\ &\le P \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \big(a(\tau) + b(\tau)\big) d\tau \Big| \le P\theta, \end{aligned}$$

тобто в цьому випадку оцінка (19) має місце. Оскільки згідно 4) ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(t+j)\widetilde{x}_0(t+j+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(t+j)\widetilde{x}'_0(t+j+\beta_m) \Big)$$

рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}^+$, то вектор-функція $\widetilde{x}_1(t)$ є неперервно-диференційовною при $t \in \mathbb{R}^+$ і має місце оцінка (20).

Розмірковуючи по індукції, припустимо, що співвідношення (19), (20) доведені уже для деякого $i \geq 1$, і доведемо, що вони зберігаються при переході від i до $i+1$. Справді, внаслідок (18), (19), (20) і умови 4) отримуємо

$$|\widetilde{x}_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} |A_m(\tau)||\widetilde{x}_i(\tau+\alpha_m)| + \sum_{m=1}^{k} |B_m(\tau)||\widetilde{x}_i'(\tau+\beta_m)| \Big) d\tau \Big|$$
$$\leq P\theta^i \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int_{t+j}^{+\infty} \big(a(\tau)+b(\tau)\big) d\tau \Big| \leq P\theta^{i+1}.$$

Вектор-функція $\widetilde{x}_{i+1}(t)$ є неперервно-диференційовною при $t \in \mathbb{R}^+$ і виконується оцінка (20). Це випливає із 4), (19), (20) і рівномірної збіжності ряду

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(t+j)\widetilde{x}_i(t+j+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(t+j)\widetilde{x}_i'(t+j+\beta_m) \Big).$$

Отже, оцінки (19), (20) мають місце при всіх $i \geq 1$. Звідси безпосередньо випливає, що ряд (12) рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ до деякої неперервно-диференційовної вектор-функції $\widetilde{x}(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (4) і задовольняє умову

$$|\widetilde{x}(t)| \leq \frac{P}{1-\theta}. \tag{21}$$

Теорема 2 доведена. □

Таким чином, на підставі теореми 2 система рівнянь (4) має неперервно-диференційовний обмежений при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок $\widetilde{x}(t)$ у вигляді ряду (12). Більше цього, далі ми покажемо, що при деяких додаткових умовах система рівнянь (4) має нескінченно багато неперервно-диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, \omega(t))$, де $\omega(t)$ — деяка 1-періодична вектор-функція, які задовольняють умову

$$\lim_{t\to+\infty} [x(t) - \widetilde{x}(t)] = 0. \tag{22}$$

Виконаємо в (4) взаємно-однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \widetilde{x}(t), \tag{23}$$

де $\widetilde{x}(t)$ — розв'язок системи (4) у вигляді ряду (12). У результаті отримаємо систему рівнянь

$$y(t+1) = Ay(t) - \int_{t}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau) y(\tau+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau) y'(\tau+\beta_m) \Big) d\tau, \tag{24}$$

відносно якої будемо припускати виконаня умови 4) і умови

5) $|A|<1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 4), 5). Тоді система рівнянь* (24) *має сім'ю неперервно-диференційовних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків* $y(t) = y(t, \omega(t))$ *у вигляді ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{25}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ *— деякі неперервно-диференційовні обмежені при* $t \in \mathbb{R}^+$ *вектор-функції, які задовольняють умову*

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0. \tag{26}$$

Доведення. Ряд (25) є формальним розв'язком системи рівнянь (24), тобто виконується співвідношення

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = A \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) - \int_t^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau) \sum_{i=0}^{\infty} y_i(\tau + \alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau) \sum_{i=0}^{\infty} y_i'(\tau + \beta_m) \Big) d\tau,$$

у випадку, коли вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = Ay_0(t), \tag{27}$$

$$y_i(t+1) = Ay_i(t) - \int_t^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau) y_{i-1}(\tau + \alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau) y_{i-1}'(\tau + \beta_m) \Big) d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{28}$$

Система рівнянь (27) має сім'ю неперервно-диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = A^{[t]} \varphi(t - [t]), \tag{29}$$

де $[t]$ — ціла частина t, $\varphi(\tau)$ — довільна неперервно-диференційовна при $\tau \in [0, 1)$ вектор-функція, що задовольняє умови

$$\varphi(1 - 0) = A\varphi(0), \quad \varphi'(1 - 0) = A\varphi'(0).$$

Легко переконатися, що якщо $y_0(t)$ є один із розв'язків, що визначаються формулою (29), то мають місце оцінки

$$|y_0(t)| \leq \widetilde{P} |A|^t, \tag{30}$$

$$|y_0'(t)| \leq \widetilde{P} |A|^t, \tag{31}$$

де $\widetilde{P}$ — деяка додатна стала.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (28), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що ряди

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \int_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(\tau) y_{i-1}(\tau + \alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(\tau) y_{i-1}'(\tau + \beta_m) \Big) d\tau, \tag{32}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (28), $i = 1, 2, \ldots$. Покажемо тепер, що ряди (32), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ до деяких вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які є неперервно-диференційовними при $t \in \mathbb{R}^+$ і задовольняють умови

$$|y_i(t)| \leq \widetilde{P}\theta^i |A|^t, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

$$|y_i'(t)| \leq \widetilde{P}\theta^i |A|^t, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Справді, приймаючи до уваги (32), (30), (31) і умови 4), 5), отримуємо

$$\begin{aligned}
|y_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} |A_m(\tau)||y_0(\tau+\alpha_m)| + \sum_{m=1}^{k} |B_m(\tau)||y_0'(\tau+\beta_m)| \Big) d\tau \Big| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m(\tau)\widetilde{P}|A|^{\tau+\alpha_m} + \sum_{m=1}^{k} b_m(\tau)\widetilde{P}|A|^{\tau+\beta_m} \Big) d\tau \Big| \\
&\leq \widetilde{P} \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m(\tau)|A|^{\tau-t+\alpha_m} + \sum_{m=1}^{k} b_m(\tau)|A|^{\tau-t+\beta_m} \Big) d\tau \Big| |A|^t \\
&\leq \widetilde{P} \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \big(a(\tau) + b(\tau) \big) d\tau \Big| |A|^t \leq \widetilde{P}\theta |A|^t.
\end{aligned}$$

Отже, оцінка (33) має місце. Диференціюючи (32), отримуємо ряд

$$y_1'(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(t+j) y_0(t+j+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(t+j) y_0'(t+j+\beta_m) \Big),$$

який на підставі умов 4), 5) і співвідношень (30), (31) рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ і його сума $y_1'(t)$ задовольняє умову $|y_1'(t)| \leq \widetilde{P}\theta|A|^t$.

Аналогічно можна довести, що ряди (32), $i = 1, 2, \ldots, r$, рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ до деяких неперервно-диференційовних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, що задовольняють умови (33), (34), $i = 1, 2, \ldots, r$. На підставі (32), (33), (34) і умов 4), 5) отримуємо

$$\begin{aligned}
|y_{r+1}(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} |A_m(\tau)||y_r(\tau+\alpha_m)| + \sum_{m=1}^{k} |B_m(\tau)||y_r'(\tau+\beta_m)| \Big) d\tau \Big| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m(\tau)\widetilde{P}\theta^r|A|^{\tau+\alpha_m} + \sum_{m=1}^{k} b_m(\tau)\widetilde{P}\theta^r|A|^{\tau+\beta_m} \Big) d\tau \Big| \\
&\leq \widetilde{P}\theta^r \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m(\tau)|A|^{\tau-t+\alpha_m} + \sum_{m=1}^{k} b_m(\tau)|A|^{\tau-t+\beta_m} \Big) d\tau \Big| |A|^t \\
&\leq \widetilde{P}\theta^r \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \Big| \int\limits_{t+j}^{+\infty} \big(a(\tau) + b(\tau) \big) d\tau \Big| |A|^t \leq \widetilde{P}\theta^{r+1} |A|^t.
\end{aligned}$$

Отже, оцінка (33) виконується при всіх $i \geq 1$. Внаслідок (33), (34) і умов 4), 5) ряд

$$y'_{r+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \Big(\sum_{m=1}^{k} A_m(t+j) y_r(t+j+\alpha_m) + \sum_{m=1}^{k} B_m(t+j) y'_r(t+j+\beta_m) \Big),$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ і виконується умова $|y'_{r+1}(t)| \leq \widetilde{P}\theta^{r+1}|A|^t$.

Тим самим доведено, що ряди (32), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ до деяких неперервно-диференційовних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умови (33), (34), $i = 1, 2, \ldots$. Звідси безпосередньо випливає, що ряд (25) і ряд

$$y'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y'_i(t)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ і виконуються співвідношення

$$|y(t)| \leq \frac{\widetilde{P}}{1-\theta}|A|^t, \quad |y'(t)| \leq \frac{\widetilde{P}}{1-\theta}|A|^t.$$

Приймаючи до уваги останні співвідношення і умову 5), отримуємо, що побудовані розв'язки задовольняють умову

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

Теорема 3 доведена. □

References

[1] Bellman R., Cooke K.L. Differential-Difference Equations. Academic Press, New York, 1963.

[2] Hale J. Theory of Functional Differential Equations. Springer, New York, 1977.

[3] Pelyukh G.P. *Asymptotic properties of solutions to systems of nonlinear functional-differential equations.* Differ. Equ. 2003, **39** (1), 46–50. doi:10.1023/A:1025163807158

[4] Pelyukh G.P. *On the structure of the set of solutions of one class of systems of nonlinear functional differential equations of neutral type.* Nonlinear Oscil. 2002, **5** (1), 53–59. doi:10.1023/A:1014652927323 (translation of Neliniini Koliv. 2002, **5** (1), 58–56. (in Ukrainian))

[5] Vel'hach A.V. *Asymptotic properties of solutions of systems of nonlinear functional differential equations of neutral type.* Nonlinear Oscil. 2009, **12** (1), 19–26. doi:10.1007/s11072-009-0056-6 (translation of Neliniini Koliv. 2009, **12** (1), 20–26. (in Ukrainian))

Надійшло 04.03.2014

Vel'hach A.V. *Continuously differentiable solutions of one boundary value problem for systems of linear difference differential equations of neutral type and their properties*. Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (1), 28–37.

Conditions of the existence of continuously differentiable bounded for $t \in \mathbb{R}^+$ solutions of one boundary value problem for systems of linear and nonlinear difference differential equations of neutral type have been obtained. The method of their construction has been developed and the asymptotic properties of these solutions are investigated.

Key words and phrases: continuously differentiable solutions, boundary value problem, system of linear difference differential equations of neutral type.