ISSN 2075-9827 e-ISSN 2313-0210
Carpathian Math. Publ. 2015, 7 (2), 191–196
doi:10.15330/cmp.7.2.191-196

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2015, Т.7, №2, С.191–196

Маслюченко О.В.[1,2], Онипа Д.П.[2]

ГРАНИЧНІ КОЛИВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

У цій роботі доведено, що для довільної напівнеперервної зверху функції $f : F \to [0; +\infty]$, що визначена на межі $F = \overline{G} \setminus G$ деякої відкритої множини G в метризовному просторі X, існує неперервна функція $g : G \to \mathbb{R}$, граничне коливання $\widetilde{\omega}_g$ якої рівне f.

Ключові слова і фрази: граничне коливання, дискретно досяжний простір, напівнеперервна зверху функція.

[1] Institute of mathematics, Akademia Pomorska in Słupsk, 22d Arciszewskiego str, 76-200, Słupsk, Poland
[2] Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: ovmasl@gmail.com (Маслюченко О.В.), denys.onypa@gmail.com (Онипа Д.П.)

Вступ

Задача про побудову функції з даним коливанням вперше розглядалася в статті П. Костирка [5], в якій було встановлено, що для довільної напівнеперервної зверху функції $f : X \to [0; +\infty]$, що визначена на метризовному берівському просторі X без ізольованих точок, існує функція $g : X \to \mathbb{R}$, коливання якої рівне f. Ці дослідження були продовжені в роботах С. Пономарьова, Я. Еверт, З. Ґранде, З. Душинського, С. Ковальчика [4, 2, 6]. Питання про побудову функцій з певного функціонального класу з даним коливанням вивчалося в роботах [7, 9, 10, 11, 13, 14].

Ми продовжуємо дослідження функцій на межах їх областей визначення, розпочате нами в [12]. Там було встановлено, що кожна неперервна функція $f : F \to [0; +\infty)$, визначена на замкненій ніде не щільній множині $F \subseteq \mathbb{R}$ без ізольованих точок, є граничним коливанням деякої локально сталої функції $g : G \to \mathbb{R}$, що визначена на доповненні $G = \mathbb{R} \setminus F$. Досі не з'ясовано, чи можна побудувати таку локально сталу функцію g для довільної напівнеперервної зверху функції $f : F \to [0; +\infty]$. В даній роботі буде доведено існування неперервної функції g з такими властивостями, чим буде дано відповідь на проблему 1 з [12] для випадку, коли P — це властивість неперервності.

Нагадаємо, що для деякої підмножини D топологічного простору X, і деякої функції $g : D \to \mathbb{R}$, коливання цієї функції $\omega_g : \overline{D} \to [0; +\infty]$ визначається формулою

$$\omega_g(x) = \inf_{U\text{- окіл } x} \sup_{u,v \in U \cap D} |g(u) - g(v)|, \quad x \in \overline{D}.$$

Верхня та нижня граничні функції $g^\vee, g^\wedge : \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$ визначаються формулами

$$g^\vee(x) = \limsup_{u \to x} g(u) = \inf_{U\text{- окіл } x} \sup_{u \in U \cap G} g(u),$$

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 54C10.

$$g^{\wedge}(x) = \liminf_{u \to x} g(u) = \sup_{U\text{- окіл } x} \inf_{u \in U \cap G} g(u), \quad x \in \overline{D}.$$

Як відомо, $\omega_g = g^{\vee} - g^{\wedge}$. Множина $\mathrm{supp} g = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ називається *носієм функції* g. *Граничним коливанням* називається звуження $\widetilde{\omega}_g = \omega_g|_{\overline{D} \setminus D}$.

1 Випадок дискретної області визначення

Нагадаємо, що ніде не щільна підмножина E топологічного простору X називається *слабко парно досяжною* [8], якщо для довільної відкритої множини G в X, такої, що $E \subseteq \overline{G} \setminus G$, існують неперетинні відкриті множини $A, B \subseteq G$, такі, що $\overline{A} \setminus G = \overline{B} \setminus G = E$. Простір X називатимемо *слабко парно досяжним*, якщо кожна замкнена ніде не щільна в X множина є слабко парно досяжною. Підмножину S метричного простору X називатимемо *ε-відокремною* [7], якщо $d(s,t) \geq \varepsilon$ для довільних різних точок $s, t \in S$. Казатимемо, що S *відокремна*, якщо вона є ε-відокремною для деякого $\varepsilon > 0$. Крім того, позначатимемо

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}, \quad B(E,\varepsilon) = \bigcup_{x \in E} B(x,\varepsilon), \quad d(x,E) = \inf_{y \in E} d(x,y),$$

для $\varepsilon > 0$, $x \in X$ і $E \subseteq X$. Множину S називатимемо *σ-дискретною*, якщо існує послідовність дискретних множин S_n, така, що $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

Теорема 1. *Нехай X — метризовний топологічний простір, F замкнена в X і D дискретна в X, такі, що $F = \overline{D} \setminus D$ і $f : F \to [0; +\infty]$ напівнеперервна зверху. Тоді існує $g : D \to [0; +\infty)$ така, що $\widetilde{\omega}_g = f$.*

Доведення. Зафіксуємо метрику d, що породжує топологію X. З [7, лема 3] випливає, що існує функція $f_1 : F \to [0; +\infty)$, така, що $f_1^{\vee} = f$, і носій $S = \mathrm{supp} f_1$ є σ-дискретним в F. Кожна σ-дискретна підмножина метризовного простору подається у вигляді зліченного об'єднання відокремних множин [7, лема 2], зокрема, існує диз'юнктна послідовність відокремних множин S_n таких, що $S = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

Покажемо, що множину D можна подати у вигляді $D = D_1 \sqcup D_2$, так, що $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = F$. Покладемо $X_0 = \overline{D}$. Оскільки простір X_0 метризовний, то він є слабко парно досяжним [8]. Далі з того, що всі точки множини D є ізольованими, випливає, що D відкрита в X_0. Але множина $F \subseteq \overline{D} \setminus D$ є слабко парно досяжною. Тому існують неперетинні відкриті в X_0 множини $A, B \subseteq D$ такі, що $\overline{A} \setminus D = \overline{B} \setminus D = F$. Покладемо $D_1 = A$ і $D_2 = D \setminus A$. Тоді $\overline{D_1} \setminus D = \overline{A} \setminus D = F$. Оскільки $D_2 = D \setminus A \supseteq B$, то $\overline{D_2} \setminus D \supseteq \overline{B} \setminus D = F$. Крім того, $\overline{D_2} \setminus D \subseteq \overline{D} \setminus D = F$. Отже, $\overline{D_2} \setminus D = F$. Таким чином, ми довели, що $\overline{D_1} \setminus D = \overline{D_2} \setminus D = F$. Оскільки D — дискретний підпростір, то всі його підмножини замкнені в D. Зокрема, матимемо, що $\overline{D_1} \cap D = D_1$ і $\overline{D_2} \cap D = D_2$. Тепер отримуємо, що

$$\begin{aligned} \overline{D_1} \cap \overline{D_2} &= ((\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) \setminus D) \cup ((\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) \cap D) = ((\overline{D_1} \setminus D) \cap (\overline{D_2} \setminus D)) \\ &\cup ((\overline{D_1} \cap D) \cap (\overline{D_2} \cap D)) = (F \cap F) \cup (D_1 \cap D_2) = F \cup \varnothing = F. \end{aligned}$$

Оскільки множини S_n відокремні, то і для деякої послідовності чисел δ_n множини S_n будуть δ_n-відокремними. Виберемо деяку нескінченно малу послідовність $\varepsilon_n < \delta_n$ так, щоб $0 < \varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$ для довільного $n > 1$. Тоді множини S_n будуть ε_n-відокремними. Побудуємо сім'ї точок $(p_n(x) : x \in S, \quad n \in \mathbb{N})$ так, щоб для довільних $x, y \in S$, $n, m \in \mathbb{N}$ виконувались умови:

$$p_n(x) \in D_1; \tag{1}$$

$$p_n(x) \neq p_m(y), \text{ якщо } (n,x) \neq (m,y); \tag{2}$$
$$d(x, p_n(x)) < \frac{\varepsilon_{n+m}}{3}, \ x \in S_m. \tag{3}$$

Побудуємо спочатку точки $p_n(x)$ для $x \in S_1$. Зафіксуємо деяке $x \in S_1$. Тоді $x \in S_1 \subseteq S \subseteq F \subseteq \overline{D}_1$. Міркуючи індуктивно по $n \in \mathbb{N}$, виберемо точки $p_n(x) \in B(x, \frac{\varepsilon_{n+1}}{3}) \cap D_1 \setminus \{p_k(x) : k < n\}$. Припустимо, що для деякого $m > 1$ уже побудовані точки $p_n(x)$ для $n \in \mathbb{N}$, $k < m$ і $x \in S_k$ з виконанням умов (1) — (3). Оскільки для таких x матимемо, що $p_n(x) \to x$, то множина $F(x) = \{p_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ замкнена. Крім того, для $x \in S_k$, $k < m$ маємо, що $F(x) \subseteq B(x, \frac{\varepsilon_k}{3})$. З того, що S_k є ε_k-відокремними випливає, що сім'я куль $\{B(x, \frac{\varepsilon_k}{3}), x \in S_k\}$ є дискретною. А значить, дискретною буде і сім'я $\{F(x) : x \in S_k\}$. Отже, множини $F_k = \bigcup\limits_{x \in S_k} F(x)$ замкнені. Крім того, $F(x) \cap F = \{x\}$ для кожного $x \in S_k$. Тому $F_k \cap F = S_k$. Зафіксуємо точку $x \in S_m$. Визначимо послідовність точок $p_n(x)$, що задовольняють умови (1) — (3). Оскільки $x \in S_m \subseteq F \subseteq \overline{D}_1$ і $x \notin S_k = F_k \cap F$ для $k < m$, то існує $p_1(x) \in B(x, \frac{\varepsilon_{m+1}}{3}) \cap D_1 \setminus (\bigcup\limits_{k<m} F_k)$. Припустимо, що для деякого $n > 1$ вже визначені $p_j(x)$ для $j < n$. Тоді виберемо $p_n(x) \in B\big(x, \frac{\varepsilon_{n+m}}{3}\big) \cap D_1 \setminus \Big(\{p_j(x) : j < n\} \cup \bigcup\limits_{k<m} F_k\Big)$. Зрозуміло, що умови (1) — (3) виконуються. Таким чином, сім'я $(p_n(x) : n \in \mathbb{N}, x \in S)$ побудована.

Для довільних $x \in S$ і $E \subseteq F$ покладемо

$$P(x) = \{p_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \quad P(E) = \{p_n(x) : n \in \mathbb{N}, x \in E \cap S\}.$$

Доведемо, що виконується така властивість:

$(*)$ $\qquad \overline{P(E)} \cap F \subseteq E$ для довільної замкненої множини $E \subseteq F$.

Візьмемо замкнену множину $E \subseteq F$ і позначимо $E_m = E \cap S_m$. Оскільки $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m = E \cap \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_m = E \cap S$, то $P(E) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} P(E_m)$. Далі зауважимо, що $P(E_m) = \bigcup\limits_{x \in E_m} P(x)$. Крім того, з монотонності (ε_m) і властивості (3) матимемо, що $P(x) \subseteq B(x, \frac{\varepsilon_m}{3})$ при $x \in E_m$, адже $d(x, p_n(x)) < \frac{\varepsilon_{n+m}}{3} < \frac{\varepsilon_m}{3}$ при $x \in E_m$. Але множина E_m є ε_m-відокремною. Тоді сім'я $(B(x, \frac{\varepsilon_m}{3}))_{x \in E_m}$, а значить і сім'я $(P(x))_{x \in E_m}$ є дискретною. Крім того, оскільки $p_n(x) \to x$, то $\overline{P(x)} \cap F = \{x\}$ для кожного $x \in E_m$. Отже,

$$\overline{P(E_m)} \cap F = \overline{\bigcup_{x \in E_m} P(x)} \cap F = \bigcup_{x \in E_m} \overline{P(x)} \cap F = \bigcup_{x \in E_m} \{x\} = E_m \subseteq E.$$

Далі позначимо $G_m = B(E, \varepsilon_m)$. Знову використавши (3), матимемо, що $P(E_k) \subseteq G_m$ при $k \geq m$. Таким чином, для довільного $m \in \mathbb{N}$ маємо, що

$$\overline{P(E)} = \overline{\bigcup_{k<m} P(E_k) \cup \bigcup_{k \geq m} P(E_k)} = \bigcup_{k<m} \overline{P(E_k)} \cup \overline{\bigcup_{k \geq m} P(E_k)} \subseteq \bigcup_{k<m} \overline{P(E_k)} \cup \overline{G_m}.$$

І нарешті, оскільки за доведеним вище $\overline{P(E_k)} \cap F \subseteq E$, то $\overline{P(E)} \cap F \subseteq \bigcup\limits_{k<m} (\overline{P(E_k)} \cap F) \cup \overline{G}_m \subseteq E \cup \overline{G}_m$ для кожного номера m. Тоді з $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{G}_m = E$ одержуємо

$$\overline{P(E)} \cap F \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} (E \cup \overline{G}_m) = E \cup \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{G}_m = E.$$

Отже, властивість $(*)$ доведена.

Позначимо $P = \{p_n(x) : n \in \mathbb{N},\ x \in S\}$. Зауважимо, що $P \subseteq D_1$ і $D_2 \subseteq D \setminus P$. Визначимо функцію $g : D \to [0; +\infty)$ наступним чином:

$$g(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \in D \setminus P, \\ f_1(x), & \text{якщо } y = p_n(x) \text{ і } f_1(x) < \infty, \\ n, & \text{якщо } y = p_n(x) \text{ і } f_1(x) = \infty. \end{cases}$$

Покажемо, що g є шуканою. Зафіксуємо $x_0 \in F$. Покажемо спершу, що $g^\wedge(x_0) = 0$. Візьмемо деякий окіл U точки x_0. Оскільки $\overline{D}_2 \setminus D = F$, то існує $u \in D_2 \cap U$. За означенням функції g маємо, що $g(u) = 0$. Крім того, $g(x) \geq 0$ для кожного $x \in D$. Тому $\inf\limits_{u \in U} g(u) = 0$. В такому разі $g^\wedge(x_0) = \sup\limits_{U-\text{окіл } x_0} \inf\limits_{u \in U} g(u) = 0$.

Покажемо тепер, що $g^\vee(x_0) = f(x_0)$. Доведемо спочатку, що $g^\vee(x_0) \geq f(x_0)$. Якщо $f(x_0) = 0$, то ця нерівність очевидна. Нехай $f(x_0) > 0$. Візьмемо $\gamma \in (0; f(x_0))$ і деякий окіл U точки x_0. Оскільки $\sup f_1(U) \geq f_1^\vee(x_0) = f(x_0) > \gamma$, то існує $u_0 \in U$ таке, що $f_1(u_0) > \gamma$. З того, що $p_n(u_0) \to u_0$ при $n \to \infty$, випливає, що існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для довільного $n \geq n_0$ матимемо $p_n(u_0) \in U$. За означенням функції g маємо, що $g(p_n(u_0))) \to f_1(u_0)$ при $n \to \infty$. Тому існуватиме $n_1 > n_0$ таке, що для довільного $n \geq n_1$ виконується нерівність $g(p_n(u_0)) > \gamma$. Отже, $\sup\limits_{u \in U \cap D} g(u) \geq g(p_{n_1}(u_0)) > \gamma$. Але U — довільний окіл x_0. Тому $g^\vee(x_0) = \inf\limits_{U-\text{окіл } x_0} \sup\limits_{u \in U} g(u) > \gamma$. Спрямувавши γ до $f(x_0)$, матимемо, що $g^\vee(x_0) \geq f(x_0)$.

Перевіримо, що $g^\vee(x_0) \leq f(x_0)$. Якщо $f(x_0) = \infty$, то все ясно. Нехай $f(x_0) < \infty$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і доведемо, що $g^\vee(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$. Оскільки f напівнеперервна зверху, то існує відкритий окіл U_1 точки x_0, для якого $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ при $x \in U_1$. Розглянемо замкнену множину $E = F \setminus U_1$. За властивістю $(*)$ матимемо, що $\overline{P(E)} \cap F \subseteq E$. Далі, оскільки $x_0 \in F$ і $x_0 \notin E$, то $x_0 \notin \overline{P(E)}$. Тому відкрита множина $U_0 = U_1 \setminus \overline{P(E)}$ є околом точки x_0.

Покажемо, що $g(y) < f(x_0) + \varepsilon$ при $y \in U_0 \cap D$. Візьмемо $y \in U_0 \cap D$. Якщо $y \notin P$, то $g(y) = 0 < f(x_0) + \varepsilon$. Нехай $y \in P$. Тоді існують $n \in \mathbb{N}$ і $x \in S$ такі, що $y = p_n(x)$. Але $p_n(x) = y \in U_0 = U_1 \setminus \overline{P(E)}$. Тому $p_n(x) \notin P(E)$. Отже, $x \notin E$. Значить, $x \in F \setminus E = F \setminus (F \setminus U_1) = F \cap U_1 \subseteq U_1$. Отже, $g(y) \leq f_1(x) \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$. Таким чином, $g(y) < f(x_0) + \varepsilon$ при $y \in U_0 \cap D$. Отже, $g^\vee(x_0) = \inf\limits_{U-\text{окіл } x_0} \sup\limits_{y \in U \cap D} g(y) \leq \sup\limits_{y \in U_0 \cap D} g(y) \leq f(x_0) + \varepsilon$. Залишилось спрямувати $\varepsilon \to 0$. □

2 Продовження за Дуґунжі

Для метризовного простору Y, замкненої множини A в Y і неперервної функції $f : A \to \mathbb{R}$ розглянемо покриття $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{4}d(x, A)) : x \in Y \setminus A\}$ метризовного простору $Y \setminus A$. За [3] існує локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_s)_{s \in S}$ на $Y \setminus A$, яке підпорядковане покриттю $\mathcal{B}$. Позначимо $U_s = \operatorname{supp}\varphi_s$, тоді $\{U_s : s \in S\}$ — локально скінченне покриття $Y \setminus A$, вписане в покриття $\mathcal{B}$. Для кожного $s \in S$ існує $x_s \in Y \setminus A$ таке, що $U_s \subseteq B(x_s, \frac{1}{4}d(x_s, A))$. За означенням відстані від точки до множини існує така точка $a_s \in A$, що $d(x_s, a_s) < \frac{5}{4}d(x_s, A)$.

Покладемо $g(x) = \triangle_{A,Y} f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{s\in S} \varphi_s(x) f(a_s), & x \in Y \setminus A \\ f(x), & x \in A. \end{cases}$

Функція $g = \triangle_{A,Y} f(x) : Y \to [0; +\infty)$ називається *продовженням за Дуґунжі* функції $h : D \to [0; +\infty)$. В роботі [1] доведено, що g є неперервним продовженням f.

Лема 1. *Нехай X — метризовний топологічний простір, $Y \subseteq X$, A замкнена в Y, $f : A \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і $g = \triangle_{A,Y} f : Y \to \mathbb{R}$ — продовження за Дуґунжі функції f. Тоді в кожній точці $x_0 \in \overline{A} \setminus Y$ виконується, що $\omega_f(x_0) = \omega_g(x_0)$.*

Доведення. Нехай U_s, x_s, a_s такі як в означенні функції $\triangle_{A,Y}$. Зафіксуємо точку $x_0 \in \overline{A} \setminus Y$ і покажемо, що $\omega_f(x_0) = \omega_g(x_0)$. Позначимо $S_x = \{s \in S : x \in U_s\}$, матимемо $g(x) = \sum\limits_{s\in S_x} \varphi_s(x) f(a_s)$ для $x \in Y \setminus A$.

За означенням верхньої та нижньої граничних функцій маємо, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0, що для кожного $x \in U \cap A$ виконується нерівність:

$$\alpha = f^{\wedge}(x_0) - \varepsilon < f(x) < f^{\vee}(x_0) + \varepsilon = \beta.$$

Виберемо таке $\delta > 0$, що $B(x_0, 3\delta) \subseteq U$. Позначимо $U_0 = B(x_0, \delta)$. Далі зафіксуємо деякі $x \in U_0 \cap (Y \setminus A)$ і $s \in S_x$. Тоді $x \in U_s \subseteq B(x_s, \frac{1}{4} d(x_s, A))$. Звідси $d(x, x_s) < \frac{1}{4} d(x_s, A)$. З іншого боку $d(x_s, a_s) < \frac{5}{4} d(x_s, A)$. Значить, $d(x, a_s) \le d(x, x_s) + d(x_s, a_s) < \frac{1}{4} d(x_s, A) + \frac{5}{4} d(x_s, A) = \frac{3}{2} d(x_s, A)$. Таким чином, ми довели, що $d(x, a_s) < \frac{3}{2} d(x_s, A)$.

Візьмемо $a \in A$. Тоді $d(x, A) \le d(x, a)$. Оскільки $x_0 \in \overline{A}$, то $d(x, A) \le \lim\limits_{a \to x_0} d(x, a) = d(x, x_0) < \delta$, адже $x \in U_0$. Отже, $d(x, A) < \delta$. Тепер $d(x_s, A) \le d(x_s, x) + d(x, A) < \frac{1}{4} d(x_s, A) + \delta$. Звідси $\frac{3}{4} d(x_s, A) < \delta$, а отже, $d(x_s, A) < \frac{4}{3}\delta$. Тоді $d(x, a_s) < \frac{3}{2} d(x_s, A) < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\delta = 2\delta$. За нерівністю трикутника маємо, що $d(x_0, a_s) \le d(x_0, x) + d(x, a_s) < \delta + 2\delta = 3\delta$.

Отже, ми довели, що для довільних $x \in U_0 \cap (Y \setminus A)$ і $s \in S_x$ виконується, що $a_s \in B(x_0, 3\delta) \subseteq U$. Тоді для функції f виконується, що $\alpha < f(a_s) < \beta$. Відповідно матимемо

$$\alpha = \sum_{s\in S_x} \varphi_s(x) \cdot \alpha < g(x) = \sum_{s\in S_x} \varphi_s(x) f(a_s) < \sum_{s\in S_x} \varphi_s(x) \cdot \beta = \beta.$$

Таким чином $\alpha < g(x) < \beta$ для кожного $x \in U_0 \cap (Y \setminus A)$. Якщо $x \in U_0 \cap A$, то з того, що $U_0 \subseteq U$, випливає, що $g(x) = f(x) \in (\alpha, \beta)$.

Отже, ми довели, що для кожного $x \in U_0 \cap Y$ виконується нерівність $\alpha < g(x) < \beta$. Значить,

$$\begin{aligned} \omega_g(x_0) \le \omega_g(U_0) = \sup_{x', x'' \in U_0 \cap Y} |g(x') - g(x'')| &\le \beta - \alpha = f^{\vee}(x_0) + \varepsilon - (f^{\wedge}(x_0) - \varepsilon) \\ &= f^{\vee}(x_0) - f^{\wedge}(x_0) + 2\varepsilon = \omega_f(x_0) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Спрямувавши $\varepsilon \to 0$, матимемо $\omega_g(x_0) \le \omega_f(x_0)$. З іншого боку, функція g є продовженням функції f, а тому $\omega_g(x_0) \ge \omega_f(x_0)$. Таким чином, $\omega_g(x_0) = \omega_f(x_0)$. □

3 Основний результат

Підмножину E топологічного простору X називатимемо *слабко дискретно досяжною* [8], якщо для довільної відкритої в X множини G, такої, що $E \subseteq \overline{G} \setminus G$, існує замкнена дискретна в G множина A, така, що $\overline{A} \setminus G = E$. В [8] доведено, що в метризовному просторі усі замкнені ніде не щільні множини є слабко дискретно досяжними.

Теорема 2. *Нехай X — метризовний топологічний простір, G відкрита в X, $F = \overline{G} \setminus G$ і $f : F \to [0; +\infty]$ — напівнеперервна зверху функція. Тоді існує неперервна функція $g : G \to \mathbb{R}$ така, що $\widetilde{\omega}_g = f$.*

Доведення. За означенням дискретної досяжності існує дискретна множина $D \subseteq G$ така, що $\overline{D} \setminus D = \overline{G} \setminus G = F$. За теоремою 1 існує $h : D \to [0; +\infty)$, така, що $\widetilde{\omega}_h = f$. Підпростір D є замкненим в G. Нехай функція $g = \triangle_{D,G}h$. В [1] доведено, що g є неперервним продовженням h. За лемою 1 матимемо, що для довільного $x \in F = \overline{D} \setminus G$ виконується, що $\omega_g(x) = \omega_h(x)$. Отже, $\widetilde{\omega}_g = \widetilde{\omega}_h$. Але $\widetilde{\omega}_h = f$. Тому $\widetilde{\omega}_g = f$. Отже, функція g є шуканою. □

REFERENCES

[1] Arens R. *Extension of functions on fully normal spaces*. Pacific J. Math. 1952, **2** (1), 11–22.

[2] Duszynski Z., Grande Z., Ponomarev S. *On the ω–primitives*. Math. Slovaca 2001, **51**, 469–476.

[3] Engelking R. General topology. Mir, Moscow, 1986. (in Russian)

[4] Ewert J., Ponomarev S. *On the existence of ω-primitives on arbitrary metric spaces*. Math. Slovaca 2003, **53**, 51–57.

[5] Kostyrko P. *Some properties of oscillation*. Math. Slovaca 1980, **30**, 157–162.

[6] Kowalczyk S. *The ω-problem*. Diss. math. 2014, **501**, 1–55. doi:10.4064/dm501-0-1

[7] Maslyuchenko O.V. *Decomposition of semi-continuous functions into the sum of quasi-continuous functions and the oscillation of almost continuous functions*. Math. Stud. 2011, **35** (2), 205–214. (in Ukrainian)

[8] Maslyuchenko O.V. *The attainable spaces and their analogues*. Math. Stud. 2012, **37** (1), 98–105. (in Ukrainian)

[9] Maslyuchenko O.V., Maslyuchenko V.K. *The construction of a separately continuous function with given oscillation*. Ukrainian Math. J. 1998, **50** (7), 1080–1090. doi:10.1007/BF02528836 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1998, **50** (7), 948–959. (in Ukrainian))

[10] Maslyuchenko O.V. *The construction of ω-primitives: strongly attainable spaces*. Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2009, **6**, 155–178. (in Ukrainian)

[11] Maslyuchenko O.V. *The construction of ω-primitives: the oscillation of sum of functions*. Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2008, **5**, 151–163. (in Ukrainian)

[12] Maslyuchenko O.V., Onypa D.P. *The limiting oscillations of locally constant functions*. Bukovinian Math. J. 2013, **1** (3–4), 97–99. (in Ukrainian)

[13] Herasymchuk V.H., Maslyuchenko O.V. *The oscillation of separately locally Lipschitz functions*. Carpathian Math. Publ. 2011, **3** (1), 22–33. (in Ukrainian)

[14] Maslyuchenko O.V. *The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces*. Houston J. Math. 2009, **35** (1), 113–130.

Надійшло 08.12.2014

Після переробки 15.12.2015

Maslyuchenko O. V., Onypa D. P. *The limiting oscillations of continuous functions*. Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (2), 191–196.

We prove that for any upper semicontinuous function $f : F \to [0; +\infty]$ defined on the boundary $F = \overline{G} \setminus G$ of some open set G in metrizable space X there is a continuous function $g : G \to \mathbb{R}$ such that its limiting oscillation $\widetilde{\omega}_g$ equals f.

Key words and phrases: limiting oscillation, discreetly attainable space, upper semicontinuous function.