ISSN 2075-9827 e-ISSN 2313-0210
Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (2), 197–208
doi:10.15330/cmp.7.2.197-208

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2015, Т.7, №2, С.197–208

МИТРОФАНОВ М.А.

ВІДОКРЕМЛЮВАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ТА РІВНОМІРНО АНАЛІТИЧНІ І ВІДОКРЕМЛЮВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Наведено основні результати з теорії відокремлювальних поліномів та рівномірно аналітичних та відокремлювальних функцій на сепарабельних дійсних банахових просторах. Розглянуто основні властивості відокремлювальних поліномів та рівномірно аналітичних та відокремлювальних функцій. Вказано зв'язок між слабкою поліноміальною топологією та топологією норми за наявності відокремлювального полінома на просторі. Наведено достатні умови існування рівномірно аналітичних та відокремлювальних функцій. Досліджено композицію рівномірно аналітичної та відокремлювальної функції та лінійного відображення.

Ключові слова і фрази: відокремлювальні поліноми, відокремлювальні функції, аналітичні функції.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
E-mail: mishmit@rambler.ru

ВСТУП

У 1954 році Я. Курцвейл у праці [17] встановив умови апроксимації неперервних функцій аналітичними на відкритих підмножинах сепарабельних дійсних банахових просторів. Автором, у цьому випадку, доведено що достатньою умовою для апроксимації є існування відокремлювального полінома на просторі. У 2012 у праці [2], за наявності відокремлювального полінома, встановлено зв'язок між слабкою поліноміальною топологією та топологією норми на банаховому просторі. У подальших дослідженнях апроксимації найбільш ґрунтовний результат отримали М. Боісо та П. Гаєк, у 2001 році у праці [9]. Зокрема вони довели, що для випадку апроксимації рівномірно неперервної функції на просторі умова існування відокремлювального полінома може бути послаблена до існування рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції. Проте, незважаючи на подальші дослідження (зокрема, працю [8] авторів Д. Азгарда, Р. Фрай, Л. Кінер), таких достатніх умов існування апроксимації досі не вдалося позбутися. Тому актуальним залишається питання про те, які саме простори допускають відокремлювальні поліноми та відокремлювальні рівномірно аналітичні функції.

З теорії відокремлювальних поліномів на банахових просторах суттєві результати отримано у 1989 році М. Фабіаном, Д. Преіссом, Дж. Вайтфіелдом та В. Зізлером у статті [13] та дано ґрунтовний огляд у 1997 році Р. Гонзало, Х. Хараміло у статті [14]. З теорії рівномірно аналітичних і відокремлювальних функції на банахових просторах основні

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 46G20, 46T20.

результати викладені у 2001 році у праці [9]. Проте всі ці результати викладено англійською мовою, крім того після 2001 року отримано деякі нові результати як з теорії відокремлювальних поліномів, так і з теорії рівномірно аналітичних і відокремлювальних функцій, зокрема праці [2, 6, 4]. Метою цієї статті є ґрунтовний огляд сучасних результатів у цих напрямках. Оскільки дана стаття є оглядовою, то значна частина результатів у ній подається без доведень які є наведеними у попередніх статтях з цієї тематики, проте надаються посилання на доведення цих результатів.

1 Відокремлювальні поліноми та їх властивості

Всі поліноми, котрі ми будемо розглядати в цій статті, вважаються неперервними.

Існує кілька (не еквівалентних) означень відокремлювального полінома. З них найбільш вживаними є наступні.

Означення 1.1. *Нехай X є нормованим простором над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Дійсний поліном $q : X \to \mathbb{R}$ називається відокремлювальним поліномом, якщо q задовольняє умову*

$$\inf_{x\in X\ ||x||=1} |q(x) - q(0)| > 0. \tag{1}$$

Це означення неявно введене Курцвейлем у [18].

Означення 1.2. *Нехай X є нормованим простором над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Дійсний поліном $q : X \to \mathbb{R}$ називається відокремлювальним поліномом, якщо q задовольняє умови:*

1. $q(0) = 0,$
2. $| \ q(x) \ | \geq 1$ *для кожного* $x \in X$*, такого що* $\|x\| = 1.$

Це означення часто використовують у літературі.

У праці [14] введено не еквівалентне до попередніх наступне означення відокремлювального полінома.

Означення 1.3. *Нехай X є нормованим простором над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Дійсний поліном $q : X \to \mathbb{R}$ називається відокремлювальним поліномом, якщо q задовольняє умови:*

1. $q(0) = 0,$
2. $\inf\{q(x) \ : \ ||x|| = 1\} > 0.$

Означення 1.4. *Нехай X є нормованим простором над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Дійсний поліном $q : X \to \mathbb{R}$ називається відокремлювальним поліномом, якщо q задовольняє умови:*

1. $q(0) = 0,$
2. $\inf\{|q(x)| \ : \ ||x|| = 1\} > 0.$

Проте, як легко переконатися, питання про існування відокремлювального полінома на просторі має однакову відповідь у сенсі класичних означенħ 1.1, 1.2 та означення 1.3. Надалі ми будемо використовувати означення 1.3.

1.1 Властивості відокремлювальних поліномів.

Означення 1.5. *Поліном $P \in \mathcal{P}(^n X)$ називають поліномом скінченного типу, якщо він є скінченною сумою скінченних добутків лінійних функціоналів.*

Простір поліномів скінченного типу позначають $\mathcal{P}_f(^n X)$.

Означення 1.6. *Поліном $P \in \mathcal{P}(^n X)$ називають апроксимовним, якщо він належить до замикання множини всіх поліномів скінченного типу.*

Зауважимо, що всі апроксимовні поліноми скінченного типу є слабко неперервними, оскільки всі лінійні функціонали є слабко неперервними.

Зауважимо, що якщо розмірність простору X дорівнює одиниці, то кожне ненульове лінійне відображення L таке, що $L(0) = 0$, наприклад $L(x) = x$, буде відокремлювальним поліномом.

У випадку, коли розмірність нормованого простору X над полем $\mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) є не меншою за два, з результатів Алексанрова [1] випливає, що сфера в просторі X є лінійно зв'язною множиною. У подальшому будемо вважати, що простори X та Y мають розмірність не меншу за два.

Твердження 1.1 ([5]). *Відокремлювальний поліном нескінченновимірного простору X не є апроксимовним.*

Доведення. За теоремою Голдстайна [3, ст. 460] образ одиничної сфери з X слабко щільний в одиничній сфері другого спряженого простору X''. Отже, існує напрямленість на одиничній сфері в X, яка слабко прямує до нуля. Оскільки поліном є відокремлювальним, його значення на цій напрямленості не прямують до нуля. Отже, він не є слабко неперервним. Враховуючи, що всі поліноми скінченного типу є слабко неперервними, вказаний поліном не наближається поліномами скінченного типу, а, отже, він не є апроксимовним. □

Гільбертів простір є найпростішим прикладом нескінченновимірного простору, який допускає відокремлювальний поліном. Насправді, якщо B — білінійна форма визначена скалярним добутком гільбертового простору H, тоді поліном $q(x) = B(x,x) = ||x||^2$ є відокремлювальним поліномом на H. З іншого боку, припустимо, що X є банаховим простором, що допускає однорідний відокремлювальний поліном q степеня 2. Нехай A є білінійною симетричною формою, асоційованою з q, і нехай $\alpha := \inf\{|q(x)| \ : \ ||x|| = 1\}$. З однорідності випливає, що

$$\alpha||x||^2 \leqslant |q(x)| = |A(x,x)| \leqslant ||A||||x||^2.$$

Це означає, що

$$||x|| = (|q(x)|)^{\frac{1}{2}}$$

є гільбертовою еквівалентною нормою на просторі X (інакше кажучи простір X є ізоморфним до гільбертового простору).

У просторах ℓ_{2n} та L_{2n} для $n \in \mathbb{N}$ існують відокремлювальні поліноми, які ми описуємо у наступному прикладі.

Приклад 1. *Визначимо поліном F у дійсному просторі ℓ_{2n} поклавши*

$$F(x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{2n}, \qquad x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_{2n}.$$

Легко бачити, що F є $2n$-однорідним відокремлювальним поліномом.

В загальному випадку, нехай (Ω, μ) — вимірний простір з мірою μ. На дійсному просторі $L_{2n}(\Omega, \mu)$ поліном

$$F(x) = \int_{\Omega} (x(t))^{2n} d\mu, \qquad x(t) \in L_{2n}(\Omega, \mu),$$

буде відокремлювальним $2n$-однорідним поліномом.

Простір c_0 не допускає відокремлювального полінома. Це випливає з факту, доведеного у [23], що кожен поліном на просторі c_0 є слабко секвенціально неперервним. Отже, якщо q є поліномом на просторі c_0 таким, що $q(0) = 0$ та $\{e_j\}$ є відповідним базисом на c_0, тоді

$$\inf_{f \in \mathbb{N}} |q(e_j)| = 0$$

та q не може бути відокремлювальним поліномом.

Твердження 1.2 ([14]). *Якщо на просторі X існує відокремлювальний поліном q степеня m, то існує $2(m!)$-однорідний невід'ємний відокремлювальний поліном d.*

Доведення. Нехай відокремлювальний поліном q має вигляд $q = q_0 + q_1 + \dots q_m$, де q_k — k-однорідні поліноми та q_0 є константою в X. З умови 1 означення 1.3 випливає, що $q_0 = 0$. Визначимо поліном d наступним чином

$$d := (q_1)^{2(m!)} + (q_2)^{2(m!)/2} + (q_m)^{2(m!)/m}.$$

Нескладно показати, що d є $2(m!)$-однорідним відокремлювальним поліномом на просторі X. □

Скінчена сім'я поліномів $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ на просторі X називається *відокремлювальною сім'єю*, якщо для кожного $x \in X$ такого, що $||x|| = 1$, ми маємо

$$\max_{i \leqslant 1 \leqslant n} \{q_i(x)\} \geqslant 1.$$

Звичайно, якщо існує відокремлювальна сім'я поліномів $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ на просторі X, то цей простір допускає відокремлювальний поліном. Насправді, розглянемо поліном $q(x) = (q_1 + q_2 + \dots + q_n)^2$, який, як легко бачити, буде відокремлювальним поліномом. Невідомою залишається відповідь на питання: чи допускає простір X відокремлювальний поліном степеня, що не перевищує m, якщо на ньому існує відокремлювальна сім'я поліномів, степені яких не перевищують m?

Властивість мати відокремлювальний поліном є інваріантною відносно ізоморфізмів, тобто якщо ми маємо ізоморфізм між двома банаховими просторами, та один з цих просторів допускає відокремлювальний поліном, тоді другий простір також допускає відокремлювальний поліном. Скінчений добуток просторів, які допускають відокремлювальний поліном, також допускає відокремлювальний поліном. Також, якщо підпростір скінченої корозмірності допускає відокремлювальний поліном, то весь простір допускає відокремлювальний поліном.

З результатів доведених у праці [15] легко отримати теорему 3.1 наведену у праці [14], яку ми сформулюємо.

Теорема 1. *Нехай простір X є банаховим простором з симетричним базисом. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) *простір X допускає відокремлювальний поліном;*

2) *простір X є ізоморфний до простору ℓ_{2k} для деякого цілого k.*

З означення відокремлювального полінома випливає, що дійсний поліном $q : X \to \mathbb{R}$ *не є відокремлювальним*, якщо $q(x)$ задовольняє умову:

$$\inf_{x \in X \ ||x||=1} |q(x) - q(0)| = 0. \tag{2}$$

Лема 1.1. *Якщо дійсний поліном $q(x)$ не є відокремлювальним на кулі радіуса 1 в банаховому просторі X, то він не є відокремлювальним на кулі довільного радіуса r в X.*

Твердження 1.3. *Якщо поліном p відокремлювальний на X, то він додатно або від'ємно визначений на одиничній сфері, тобто або $p(x) > 0$ для всіх таких $x \in X$, що $||x|| = 1$, або $p(x) < 0$ для всіх таких $x \in X$, що $||x|| = 1$.*

Доведення. Оскільки сфера є лінійно зв'язною множиною, а відокремлювальний поліном є неперервною функцією, то якщо би він змінював знак на сфері, то приймав би нульове значення в деякій її точці, що суперечить означенню відокремлювального полінома. Отже, p є знаковизначеним на сфері. □

З твердження 1.3 легко випливає наступне твердження, аналог якого доведений у праці [14].

Твердження 1.4. *Якщо поліном p відокремлювальний на X, то поліном p_e, складений з однорідних компонент p парних степенів, також є відокремлювальним на X.*

З твердження 1.4 випливає, що якщо p — відокремлювальний поліном на X, то $p_e \neq 0$, тобто p має ненульову парну однорідну компоненту.

Твердження 1.5. *Якщо поліном p_e відокремлювальний на X, та додатний (від'ємний) на одиничній сфері, то поліном p_{e_+} (p_{e_-}), складений з однорідних компонент p невід'ємних (недодатних) парних степенів, також є відокремлювальним на X.*

Наступний приклад, наведений у праці [4], показує, що існує банахів простір X з безумовним, але не симетричним базисом, який допускає неоднорідний відокремлювальний поліном, жодна однорідна компонента якого не є відокремлювальною. При цьому простір X не ізоморфний до ℓ_{2n} для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 ([4])**.** *Нехай X є рівномірно опуклим дійсним сепарабельним банаховим простором із субсиметричним базисом. Нехай G є відкритою підмножиною в X. Неперервні функції на G апроксимуються аналітичними функціями рівномірно на всьому G тоді і лише тоді, коли простір X є ізоморфним до ℓ_{2n} для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Приклад 2. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$. В якості X візьмемо пряму суму просторів ℓ_{2n} та ℓ_{2m} з відповідними базисами e_k та g_k. Елемент цього простору має вигляд $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k$, або $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)$. Можна також вважати $x = x_1 + x_2$, якщо x_1 — проекція x на ℓ_{2n}, а x_2 — проекція x на ℓ_{2m}. Відповідно, норму x визначаємо наступним чином*

$$||x|| = ||x_1||_{\ell_{2n}} + ||x_2||_{\ell_{2m}}.$$

Нехай поліном P визначається формулою

$$P(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{2m} = ||x_1||_{\ell_{2n}}^{2n} + ||x_2||_{\ell_{2m}}^{2m} = P_1(x) + P_2(x).$$

Легко бачити, що P є відокремлювальним поліномом степеня $2n$. Кожна з його однорідних компонент P_1 та P_2 не відокремлювальні.

Для компоненти P_2 візьмемо такий елемент $x \in X$ з нормою одиниця, що він є тотожнім нулем на ℓ_{2m} і $||x||_{\ell_{2n}} = 1$. Тоді $P_2(x) = 0$, а, отже, поліном P_2 не є відокремлювальним. Для компоненти P_1 візьмемо такий $x \in X$ з нормою одиниця, що він є тотожнім нулем на ℓ_{2n} і $||x||_{\ell_{2m}} = 1$. Тоді аналогічно $P_1(x) = 0$ і поліном P_1 також не є відокремлювальним.

Базис $\{e_k, g_k\}$ є безумовним базисом в X, але не симетричним. Справді, якщо X має симетричний базис, то за теоремою 2 простір X ізоморфний до ℓ_p для деякого парного p. Оскільки X містить доповнювальну копію ℓ_{2n}, то і простір ℓ_p має містити доповнювальну копію ℓ_{2n}. Згідно з [20] це можливо тоді і лише тоді, коли $p = 2n$. З аналогічних міркувань випливає, що $p = 2m$, але це суперечить припущенню.

Зауважимо, що аналогічно в якості X можна взяти скінченну пряму суму просторів ℓ_{2n_i} де $n_k \neq n_l$ для $k \neq l$. В цьому випадку однорідні компоненти на ℓ_{2n_i} відокремлювального полінома на X також не будуть відокремлювальними поліномами на X.

Лема 1.2. *Якщо поліном p відокремлювальний на X та всі його однорідні компоненти невід'ємно визначені на X, то для довільної послідовності $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ елементів простору X з того, що $p(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$ випливає, що $y_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нехай існує така послідовність $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ елементів простору X, що $p(y_n) \to 0$, але y_n не прямує до 0. Переходячи до підпослідовності, можемо вважати, що існує таке дійсне число $\varepsilon \in (0,1)$, що $||y_n|| > \varepsilon$ для всіх n. Розглянемо послідовність $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ елементів одиничної сфери, визначену умовою $z_n = \frac{y_n}{||y_n||}$ для всіх n. Тоді

$$p(z_n) = \sum_k \frac{1}{||y_n||^k} p_k(y_n) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^m} \sum_k p_k(y_n) = \frac{1}{\varepsilon^m} p(y_n) \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де m — степінь полінома p, а p_k — його однорідна компонента степеня k. Це суперечить тому, що p відокремлювальний поліном, отже, наше припущення не вірне. $\square$

Наведемо приклад відокремлювального полінома, який змінює знак в середині кулі.

Приклад 3. *Нехай* $X = \ell_2$. *Для* $x = \sum_k e_k x_k \in \ell_2$ *розглянемо поліном* $p(x) = \sum\limits_k 2x_k^4 - x_k^2$. *Легко бачити, що* p *— відокремлювальний поліном та* $p(1) = 1$. *Оскільки* x_k^4 *прямує до нуля швидше, ніж* x_k^2, *то існують сфери меншого радіусу (що не перевищують* $\frac{1}{\sqrt{2}}$*), на яких* p *є нульовим та від'ємним.*

Теорема 3. *Якщо* $F : X \to Y$ *поліноміальний автоморфізм (поліноміальне бієктивне відображення таке, що* F^{-1} *— поліном та* $F(0) = 0$*),* $p : Y \to \mathbb{R}$ *відокремлювальний поліном та всі його однорідні компоненти невід'ємно визначені на* Y, *тоді* $p(F) : X \to R$ *буде відокремлювальним поліномом.*

Доведення. Відомо, що композиція поліноміальних відображень є поліноміальним відображенням, тому $p(F)$ є поліномом. Крім того, $p(F)(0) = 0$. Припустимо, що $p(F)$ не є відокремлювальним поліномом. Тоді існує така послідовність $\{x_n\}$ елементів одиничної сфери в X, що $p(F(\{x_n\})) \to 0$ при $n \to \infty$. Нехай $F(\{x_n\}) = \{y_n\}$. Оскільки p задовольняє умови леми 1.2, то $\{y_n\} \to 0$. Оскільки $F : X \to Y$ поліноміальний автоморфізм, то $F^{-1}\{y_n\} = \{x_n\} \to 0$, що суперечить вибору $\{x_n\}$. Отже, $p(F)$ — відокремлювальний поліном. ☐

Наступна теорема узагальнює приклад 1.

Теорема 4 ([12])**.** *Нехай* $1 < p, q < +\infty$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними.*

1. *Простір* $X = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_q^{(n)})_{\ell_p}$ *допускає відокремлювальний поліном.*
2. *Обидва* p *і* q *є парними цілими, та* p *є кратне* q.

Теорема 5 ([12])**.** *Для* $1 < p, q < +\infty$ *розглянемо простір* $L^p(L^q)$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними.*

1. *Простір* $L^p(L^q)$ *допускає відокремлювальний поліном.*
2. *Обидва* p *і* q *є парними цілими, та* p *є кратне* q.

1.2 Слабко поліноміальна топологія і відокремлювальні поліноми.

Визначимо *слабко поліноміальну топологію* на дійсному банаховому просторі X як найслабшу топологію w_P, відносно якої всі неперервні поліноми на X зі значеннями в полі $\mathbb{R}$ є неперервними. Ця топологія породжується прообразами відкритих множин з $\mathbb{R}$ поліноміальних функціоналів на X. Базу цієї топології утворюють околи точок $x_0 \in X$, кожен з яких залежить від скінченного набору поліномів $p_1, \ldots, p_n$ і додатних чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ та має вигляд:

$$U(x_0)_{p_1,\ldots,p_n}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \{x \in X \colon |p_1(x) - p_1(x_0)| < \varepsilon_1, \ldots, |p_n(x) - p_n(x_0)| < \varepsilon_n\}. \tag{3}$$

Напрямленість (x_α) збігається у топологій w_P до $x_0 \in X$ тоді (і тільки тоді), коли $p(x_\alpha) \to p(x_0)$ для кожного $p \in \mathcal{P}(X)$.

Теорема 6 ([2])**.** *Слабко поліноміальна топологія на дійсному просторі* X *співпадає з топологією норми тоді і тільки тоді, коли на* X *існує відокремлювальний поліном.*

Зауважимо, що оскільки неперервні поліноми розділяють точки простору X, то слабко поліноміальна топологія є гаусдорфовою. Тому, за теоремою Стоуна-Вейєрштраса (див. [7, Теорема 3.2.21]), кожна w_P-неперервна функція на X наближається поліномами рівномірно на компактах у топології w_P. У випадку, коли X допускає відокремлювальний поліном, w_P-компакти є компактами в $(X, \|\cdot\|)$ і мають порожню внутрішність, якщо $\dim X = \infty$. Проте, саме в цьому випадку (теорема Курцвейля) кожна рівномірно неперервна функція на X апроксимується аналітичними функціями рівномірно на всьому просторі. Можливий інший крайній випадок, коли слабко поліноміальна топологія співпадає зі слабкою топологією на обмежених множинах. Тоді замкнена куля в $\overline{B}_X \in X$ є w_P-відносно компактним простором і теорема Стоуна-Вейєрштраса гарантує, що кожна $*$-слабко неперервна функція на $\overline{B}_{X''}$ апроксимується поліномами рівномірно на $\overline{B}_X$. Проте і в цьому випадку може трапитись, що X допускає рівномірно аналітичну відокремлювальну функцію (як наприклад $X = c_0$) і кожна рівномірно неперервна функція апроксимується аналітичними рівномірно на X [9]. З іншого боку існує багато просторів (як наприклад ℓ_p для непарних p), для яких w_P є строго сильнішою за слабку топологію на обмежених множинах і строго слабшою за топологію норми і в яких не кожна неперервна функція наближається аналітичними на X. Ці приклади показують, що апроксимація аналітичними функціями суттєво відрізняється від поліноміальної апроксимації і умови існування такої апроксимації суттєво відрізняються від умов теореми Стоуна-Вейєрштраса.

Добре відомо, що у нескінченновимірному банаховому просторі одинична сфера є щільною в одиничній кулі у слабкій топології. Наступна теорема показує, що при певних умовах w_P має таку ж властивість.

Теорема 7 ([2]). *Нехай X — нескінченновимірний дійсний банахів простір. Одинична сфера S_X є щільною в одиничній кулі $\overline{B}_X$ у слабко поліноміальній топології тоді і тільки тоді, коли X не допускає відокремлювального полінома.*

2 Рівномірно аналітичні і відокремлювальні функції

У праці [9] введені в розгляд рівномірно аналітичні і відокремлювальні функції на банахових просторах.

Означення 2.1. *Нехай X є дійсним нормованим простором. Будемо говорити, що дійсна функція d, визначена на X, є рівномірно аналітичною і відокремлювальною, якщо вона задовольняє наступні умови:*

1) *d є дійсною аналітичною функцією на X з радіусом збіжності R_{d_x} в кожній точці $x \in X$ більшим або рівним за R_d для деякого $R_d > 0$;*

2) *існує таке $\alpha \in \mathbb{R}$, що множина $\{x \in X \ : \ d(x) < \alpha\}$ є непорожньою та лежить у відкритій одиничній кулі B.*

З умови 2) випливає, що існує таке $x_0 \in X$, що $d(x_0) = \beta < \alpha$. Враховуючи аналітичність, з умови 2) випливає, що існує таке $\alpha \in \mathbb{R}$, що множина $\{x \in X \ : \ d(x) \geq \alpha\}$ не належить одиничній кулі B.

Теорема 8. *Нехай X є сепарабельним дійсним банаховим простором. На просторі X існує рівномірно аналітична і відокремлювальна функція, якщо виконується одна з наступних умов:*

1) *на просторі X існує відокремлювальний поліном;*

2) *простір X є замкненим підпростором в c_0.*

Доведення. 1) Нехай на просторі X існує відокремлювальний поліном P. Тоді на X, згідно з твердженням 1.2, існує невід'ємний однорідний відокремлювальний поліном d. Радіус збіжності $d = \infty$, отже умова 1 означення 2.1 виконується. Зафіксуємо $\alpha = 1$. Тоді для всіх $x \in X$, $|x| < 1$, $d(x)$ лежить у відкритій одиничній кулі B. Таким чином умова 2 означення 2.1 виконується. Тому d є рівномірно аналітичною і відокремлювальною функцією.

2) В [13] показано, що наступна аналітична функція

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^{2n}$$

для довільного $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ задає аналітичну норму на c_0. Легко бачити, що $||\cdot||_\infty$-радіус збіжності d в кожній точці $x_n \in c_0$ дорівнює одиниці (наприклад, див. [21, приклад 5.5]). Також зауважимо, що d є відокремлювальною функцією, а саме:

$$0 \in \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0, \ : d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) < 1\} \subseteq B_{c_0}.$$

Оскільки довільний підпростір в c_0 характеризується існуванням нормуючої $*$-слабко збіжної до нуля послідовності на одиничній кулі спряженого простору, то таким самим методом, як в c_0, отримаємо функцію, яка є рівномірно аналітичною і відокремлювальною. □

Зрозуміло, що умови існування рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції успадковуються скінченими прямими сумами просторів. За відповідних обставин можна також перейти до нескінченних прямих сум. Наприклад, припустимо, що всі члени послідовності банахових просторів $(X_n, ||\cdot||_n)_{n\in\mathbb{N}}$ допускають рівномірно аналітичні і відокремлювальні функції $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ з радіусами збіжності $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Припустимо, що $R_d := \inf_{n\in\mathbb{N}} R_n > 0$ і що існує така послідовність додатних цілих чисел $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{B_{X^{\mathbb{C}}}\left(\frac{R_d}{4e}\right)} |d_n^{\mathbb{C}}|^{a_n} < 1 \ \text{ та } \ \sup_{n\in\mathbb{N}} diam\left(d_n^{-1}((-\infty,1))\right) < +\infty,$$

де $d_n^{\mathbb{C}}$ є комплексифікацією для d_n. Отже, для $X := (\oplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{c_0}$

$$d : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{c_0} \xrightarrow{d} d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x_n)^{2na_n}$$

d є рівномірно аналітичною і відокремлювальною функцією. Тому, наприклад,

$$(c_0 \oplus \oplus_{n=1}^{\infty} \ell_{2n})_{c_0}$$

допускає рівномірно аналітичну і відокремлювальну функцію.

Оскільки повна класифікація просторів, що допускають рівномірно аналітичну і відокремлювальну функцію, є доволі складним завданням, то спробуємо її отримати для окремих випадків, коли, наприклад, $c_0 \not\hookrightarrow X$ або $\ell_p \not\hookrightarrow X$ для кожного парного p.

Перший випадок приводить до просторів з відокремлювальними поліномами [10]. Дослідимо другий випадок.

Теорема 9 ([9]). *Нехай X є банаховим простором, на якому існує рівномірно аналітична і відокремлювальна функція. Припустимо, що всі скалярні поліноми на X відображають слабко збіжні до нуля послідовності в збіжні до нуля послідовності. Тоді X є ізоморфним до підпростору в c_0.*

За результатами [22, 24] простори з властивістю Дамфорда-Петіса (зокрема, всі простори неперервних на компакті K функції $C(K)$ і всі підпростори в c_0) задовольняють згадану вище умову секвенціальної неперервності поліномів.

Зауваження 2.1. *Можна показати [16], що якщо замінити припущення рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції в теоремі 9 на існування рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції на відкритій обмеженій підмножині в X, то звідси випливатиме, що X є сепарабельним поліедральним простором.*

Пригадаємо результат [19], який стверджує, що кожен $C(K)$ простір, який ізоморфний до підпростору в c_0, є ізоморфний до c_0.

Наслідок 2.1. *Нехай X є банаховим простором, який ізоморфний до $C(K)$ і допускає рівномірно аналітичну і відокремлювальну функцію. Тоді X є ізоморфним до c_0.*

Зауваження 2.2. *Цей наслідок можна порівняти з [11], де показано, що кожен сепарабельний поліедральний банаховий простір (наприклад $C(K)$, де K є тотально не зв'язний) допускає відокремлювальну аналітичну опуклу функцію, визначену на деякій обмеженій опуклій множині.*

Теорема 10. *Нехай X та Y дійсні банахові простори, $f : Y \to \mathbb{R}$ є рівномірно аналітичною і відокремлювальною функцією такою, що $f(0) = 0$, $g : X \to Y$ — лінійне відображення, що не зменшує норму. Тоді композиція $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ є рівномірно аналітичною і відокремлювальною функцією.*

Доведення. Позначимо $f \circ g$ через $\widetilde{g}$. Функція $\widetilde{g}$ буде аналітичною як композиція двох аналітичних функцій. Перевіримо, що вона задовольняє умови означення 2.1.

1. Нехай x — довільна точка простору X. Для норми k-тої компоненти $\widetilde{g}_k = f_k(g)$ розкладу функції $\widetilde{g}$ в ряд в околі точки x, ми маємо оцінку

$$||f_k(g)|| \leqslant ||f_k|| ||g||^k,$$

де f_k — k-та компонента розкладу функції $\widetilde{g}$ в околі точки $g(x)$. Нехай радіус збіжності R_{f_y} в кожній точці $y \in Y$ є не меншим, ніж $R_f(0)$. Оцінимо, радіус збіжності $R_{\widetilde{g}_x}$ функції $\widetilde{g}$ в точці x :

$$0 \leqslant \frac{1}{R_{\widetilde{g}_x}} = \limsup_{k\to\infty} ||\widetilde{g}_k||^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k\to\infty} \left(||f_k|| ||g||^k\right)^{\frac{1}{k}} = ||g|| \limsup_{k\to\infty} (||f_k||)^{\frac{1}{k}} = \frac{||g||}{R_{f_{g(x)}}}.$$

Отже,

$$R_{\widetilde{g}_x} \geqslant \frac{R_{f_{g(x)}}}{||g||} \geqslant \frac{R_f}{||g||} > 0.$$

2. Оскільки f є рівномірно аналітичною і відокремлювальною функцією, то існує таке число $\alpha \in \mathbb{R}$, що $\{y \in Y : f(y) < \alpha\} \subset B_Y$. Нехай $x \in X$ та $\widetilde{g}(x) < \alpha$. Тоді $f(g(x)) < \alpha$ і тому $g(x) \in B_Y$. Оскільки відображення g не зменшує норму, то $x \in B_X$. Крім того, оскільки g — лінійне відображення, то $g(0) = 0$ і тому $\widetilde{g}(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$. □

Твердження 2.1. *Розглянемо лінійний простір $X = \oplus_{k=1}^{\infty}\ell_{2k}$, який є нескінченною прямою сумою просторів ℓ_{2k}. Якщо на X задати ℓ_p норму за формулою*

$$||x|| = \left(\sum_k ||x_k||^p_{\ell_{2k}}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad x = (x_k) \in X, \tag{4}$$

то для непарного $p > 0$ простір X з такою нормою не буде допускати ні відокремлювального полінома, ні рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції.

Доведення. Нехай X_0 — підпростір в X, який складається з елементів вигляду $x = \sum x_k$, де $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \ell_{2k}$, $x_k = (a_k, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Тоді для довільного $x \in X_0$ за умовою $||x|| = \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p}$. Тому X_0 є ізоморфним до ℓ_p. Оскільки на ℓ_p для непарного p не існує відокремлювального полінома, то такого полінома не існує і на X. І оскільки на ℓ_p для непарного p не існує рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції (бо інакше, за [9, Теорема 1] норма простору ℓ_p апроксимувалась би аналітичними функціями, що не так [17, ст. 227], то такої функції не існує і на X. □

References

[1] Aleksandrov A.D. Internal geometry of convex surfaces. Gostechizdat, Moscow, 1948. (in Russian)

[2] Zagorodnyuk A.V., Mytrofanov M.A. *Weak polynomial topology and weak analytic topology on Banach spaces and on Freshet spaces*. Carpathian Math. Publ. 2012, **4** (1), 49–57.

[3] Dunford N., Schwartz J. T. Linear operators. General Theory. Wiley, New-York, 1988.

[4] Mytrofanov M.A. *Approximation of continuous functions on real Banach spaces*. Prykl. Probl. Math. Mech. 2007, **5**, 48–51. (in Ukrainian)

[5] Mitrofanov M.A. *Approximation of continuous functions on complex Banach spaces*. Math. Notes 2009, **86** (3-4), 530–541. doi:10.1134/S0001434609090302 (translation of Mat. Zametki 2009, **86** (4), 557–570. doi:10.4213/mzm5161 (in Russian))

[6] Mytrofanov M.A. *Properties of separating polynomials and separating uniformly analytical functions*. Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya 2012, **55** (2), 23–29. (in Ukrainian)

[7] Engelking R. General topology. Mir, Moscow, 1986. (in Russian)

[8] Azagra D., Fry R., Keener L. *Real analytic approximation of Lipschitz functions on Hilbert space and other Banach spaces*. J. Funct. Anal. 2012, **262** (1), 124–166. doi:10.1016/j.jfa.2011.09.009

[9] Boiso M.C., Hájek P. *Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces*. J. Math. Anal. Appl. 2001, **256** (1), 80–98. doi:10.1006/jmaa.2000.7291

[10] Deville R. *Geometrical implications of the existence of very smooth bump functions in Banach spaces*. Israel J. Math. 1989, **67**, 1–22.

[11] Deville R., Fonf V., Hajek P. *Analytic and polyhedral approximation of convex bodies in separable polyhedral Banach spaces*. Israel J. Math. 1998, **105**, 139–154.

[12] Deville R., Gonzalo R., Jaramillo J.A. *Renormings of* $L_p(L_q)$. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1999, **126** (1), 155–169.

[13] Fabian M., Preiss D., Whitfield J.H.M., Zizler V.E. *Separating polynomials on Banach spaces*. Q. J. Math. 1989, **40** (4), 409–422. doi:10.1093/qmath/40.4.409

[14] Gonzalo R. Jaramillo J.A. *Separating polynomials on Banach spaces*. Extracta Math. 1997, **12** (2), 145–164.

[15] Gonzalo R. Jaramillo J.A. *Smoothness and estimates of sequences in Banach spaces*. Israel J. Math. 1995, **89**, 321–341.

[16] Hajek P., Troyanski S. *Analytic norms in Orlicz spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 2001, **129** (3), 713–717. doi:10.1090/S0002-9939-00-05773-7

[17] Kurzweil J. *On approximation in real Banach spaces*. Studia Math. 1954, **14** (2), 214–231.

[18] Kurzweil J. *On approximation in real Banach spaces by analytic operations*. Studia Math. 1957, **16** (2), 124–129.

[19] Lindenstrauss J., Peiczynski A. *Contributions to the theory of the classical Banach spaces*. J. Funct. Anal. 1971, **8** (2), 225–249. doi:10.1016/0022-1236(71)90011-5

[20] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1977. doi:10.1007/978-3-642-66557-8

[21] Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.

[22] Pelczynski A. *On weakly compact polynomial operators on B-spaces with Dunford-Pettis property*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astronom. Phys. 1963, **11**, 371–378.

[23] Pelczynski A. *A property of multilinear operations*. Studia Math. 1957, **16** (2), 173–182.

[24] Ryan R. *Dunford-Pettis properties*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. 1979, **27**, 373–379.

Надійшло 06.08.2015

Mytrofanov M.A. *Separating polynomials, uniform analytical and separating functions*. Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (2), 197–208.

We present basic results of the theory of separating polynomials, uniformly analytic and separating functions on separable real Banach spaces. We consider basic properties of separating polynomials, uniformly analytic and separating functions. We indicate a relation between weak polynomial topology and norm topology of a space, provided it admits a separating polynomial. We present sufficient conditions for the existence of analytic and uniformly separating functions. We investigate a composition of an uniformly analytic and separating function and a linear mapping.

Key words and phrases: separating polynomials, separating functions, analytical functions.