Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.956.4

Буртняк І.В., Малицька Г.П.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ МАТРИЦІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Буртняк І.В., Малицька Г.П. *Фундаментальні матриці розв'язків одного класу вироджених параболічних систем* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 12–22.

Розглянуто один клас ультрапараболічних систем рівнянь другого порядку, що мають три групи змінних, за якими є виродження, і коефіцієнти залежать тільки від часової змінної. Побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші, одержано оцінки цієї матриці та всіх її похідних.

Ця стаття є продовженням робіт [1], [2], [5], де розглянуто системи вироджених параболічних рівнянь колмогоровського типу. Зауважимо, що детальний опис досліджень і розвитку теорії вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами змінних, за якими є виродження параболічності, зроблено в роботі С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, А.І. Кочубея [4]. Ми розглянули один клас систем рівнянь колмогоровського типу другого порядку, що мають три групи виродження параболічності з коефіцієнтами залежними від часової змінної, для яких виконуються умови типу умов Лаппо-Данилевського, встановили існування, єдиність фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК), дослідили властивості і оцінки похідних ФМРЗК.

1 Позначення і постановка задачі Коші

Нехай n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 — фіксовані натуральні числа, причому $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4$ і $\sum\limits_{j=1}^{4} n_j = n_0$; $p = \sum\limits_{j=1}^{4}(2j-1)n_j$; $x = (x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^{n_0}$, де $x_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$. Для $x, s \in \mathbb{R}^{n_0}$ маємо $(x, s) = \sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{m=1}^{n_j} x_{jm}s_{jm}$. Всюди далі будемо використовувати позначення $\bar{x}_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn_{j+1}})$, $\bar{\bar{x}}_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn_{j+2}})$, $x'_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn_4})$, $x''_j = (x_{jn_4+1}, \ldots, x_{jn_3})$, $x'''_j = (x_{jn_3+1}, \ldots, x_{jn_2})$, $x^*_j = (x_{jn_{j+1}+1}, \ldots, x_{jn_j})$, $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x_4)$, $x^* = (x^*_1, x^*_2, x^*_3, x_4)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Ключові слова і фрази: фундаментальна матриця розв'язків, рівняння Колмогорова, ультрапараболічні системи.

Нехай

$$\rho(t,x;\tau,\xi) = |x_1-\xi_1|^2/4(t-\tau) + 3|x_2 + (\overline{x}_1 + \overline{\xi}_1)(t-\tau)/2 - \xi_2|^2(t-\tau)^{-3}$$

$$+180|x_3 + (t-\tau)(\bar{x}_2 + \bar{\xi}_2)/2 + (\bar{\bar{x}}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^2/12 - \xi_3|^2(t-\tau)^{-5} + 63000|x_4 + (\bar{x}_3 + \bar{\xi}_3)(t-\tau)/2$$

$$+(\bar{\bar{x}}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)(t-\tau)^2/10 + (\bar{\bar{x}}_1 + \bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^3/120 + \xi_4|^2(t-\tau)^{-7}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_0},$$

$$d(t,x;\tau,y) = \sum_{j=1}^{4} |x_j - y_j|^2 (t-\tau)^{-(2j-1)}.$$

Розглянемо систему рівнянь виду

$$\partial_t u_r(t,x) - \sum_{j=1}^{3} \sum_{m=1}^{n_{j+1}} x_{jm} \partial_{x_{j+1 m}} u_r(t,x) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k,m=1}^{n_1} [a_{km}^{rl}(t,x) \partial^2_{x_{1m} x_{1k}} \quad (1)$$

$$+ a_m^{rl}(t,x)\partial_{x_{1m}} + a_0^{rl}(t,x)] u_l(t,x), \qquad r = 1,\dots,n, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де $\Pi_{(0,T]} = \{(t,x), t \in (0,T], T > 0, x \in \mathbb{R}^{n_0}\}$. Припускатимемо, що коефіцієнти $a_{km}^{rl}(t,x)$, $a_m^{rl}(t,x)$, $a_0^{rl}(t,x)$ цієї системи комплекснозначні функції і такі, що система

$$\partial_t w_r(t,x) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k,m=1}^{n_1} [a_{km}^{rl}(t,x)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}} + a_m^{rl}(t,x)\partial_{x_{1m}} + a_0^{rl}(t,x)] w_l(t,x), \quad r = 1,\dots,n, \quad (2)$$

є рівномірно параболічною за Петровським у замиканні $\Pi_{[0,T]}$ множини $\Pi_{(0,T]}$, в якій (x_2, x_3, x_4) вважаються параметрами.

Для зручності запишемо систему (1) у матричній формі

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{3} \bar{x}_j \partial_{x_{j+1}} u(t,x) = \sum_{|k| \le 2} a_k(t,x) \partial_{x_1}^k u(t,x).$$

Знайдемо розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову

$$u(t,x)|_{t=\tau} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad (3)$$

де τ — задане число, $u_0(x) := col(u_{01}(x), \dots, u_{0n}(x))$ — задана матриця-стовпчик.

Означення. *Під ФМРЗК (1), (3) будемо розуміти квадратну матрицю* $G(t,x;\tau,y)$, $\{x,y\} \subset \mathbb{R}^{n_0}, 0 \le \tau < t \le T$, *порядку* n *таку, що для будь-якої гладкої фінітної функції* $u_0(x)$ *та довільного* $\tau \in [0,T]$ *формула* $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{n_0}} G(t,x;\tau,y)u_0(y)dy$, $(t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}$, *визначає розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову (3).*

2 Розв'язання задачі Коші для системи із коефіцієнтами залежними тільки від t

Розглянемо задачу Коші для системи (1), в якої коефіцієнти $a_{km}^{rl}(t), a_m^{lr}(t), a_0^{lr}(t)$ — неперервні функції на $[0,T]$

$$\partial_t u_r(t,x)-\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}}x_{jm}\partial_{x_{j+1m}}u_r(t,x)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[a_{km}^{rl}(t)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}} \tag{4}$$

$$+a_m^{rl}(t)\partial_{x_{1m}}+a_0^{rl}(t)]u_l(t,x),\quad 0\le\tau<t\le T,\ x\in\mathbb{R}^{n_0},\ r=1,\dots,n,$$

$$u_r(t,x)|_{t=\tau}=u_{0r}(x),x\in\mathbb{R}^{n_0},r=1,\dots,n, \tag{5}$$

де $u_{0r}(x)$ — досить гладкі фінітні функції. Оскільки система (2) параболічна, то (див. [1]) корені $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ рівняння $\det\left\{\Big(\sum\limits_{k,m=1}^{n_1}a_{km}^{rl}(t)(is_{1k})(is_{1m})\Big)_{r,l=1}^{n}-\lambda I\right\}=0$, де I — одинична матриця порядку n, i — уявна одиниця, задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda_r(t,s_1)\le-\delta_0|s_1|^2$, $s_1\in\mathbb{R}^{n_1},r=1,\dots,n$ з деякою сталою $\delta_0>0$, незалежною від $t, 0\le t\le T$.

Будемо вважати, що виконуються умови Лаппо-Данилевського для такої матриці $\sum\limits_{|k|=2}a_k(t_0)(iP_1(t,s^*,c))^k$ для будь-якого фіксованого $t_0\in[0,T]$, де

$$P_1(t,s^*,c):=(t^3s_{41}/6+t^2c'_{11}/2+tc'_{21}+c'_{31},\dots,t^3s_{4n_4}/6+t^2c'_{1n_4}/2+tc'_{2n_4}+c'_{3n_4};$$

$$t^2s_{3n_4+1}/2+tc''_{1n_4+1}+c''_{2n_4+1},\dots,t^2s_{3n_3}/2+tc''_{1n_3}+c''_{2n_3};$$

$$ts_{2n_3+1}+c'''_{1n_3+1},\dots,ts_{2n_2}+c'''_{1n_2},s_{1n_2+1},\dots,s_{1n_1}),$$

$c'_{lj},c''_{kr},c'''_{1s}$ — дійсні сталі, $l=1,2,3;k=1,2;j=1,\dots,n_4;r=n_4+1,\dots,n_3;s=n_3+1,\dots,n_2$.

Зведемо задачу Коші (4), (5) до задачі Коші для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку. Для цього компоненти $u_1,\dots,u_n$ розв'язку задачі Коші (4), (5) будемо шукати у вигляді оберненого перетворення Фур'є по s від невідомих функцій $v_1,\dots,v_n$, тобто

$$u_r(t,x):=F^{-1}[v_r(t,s)](t,x):=(2\pi)^{-n_0}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_0}}\exp\{i(x,s)\}v_r(t,s)ds,$$

$0\le\tau<t\le T,x\in\mathbb{R}^{n_0},r=1,\dots,n$. Враховуючи рівності $\partial_tF^{-1}[v_r]=F^{-1}[\partial_tv_r]$, $x_{jm}\partial_{x_{j+1,m}}F^{-1}[v_r]=F^{-1}[-s_{j+1,m}\partial_{s_{j,m}}v_r]$, а також $\partial^2_{x_{1k}x_{1m}}F^{-1}[v_r]=F^{-1}[(is_{1m})(is_{1k})v_r]=F^{-1}[-s_{1m}s_{1k}v_r]$, одержимо для $v_1,\dots,v_n$ таку задачу Коші

$$\partial_tv_r(t,s)+\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}}s_{j+1,m}\partial_{s_{jm}}v_r(t,s)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{rl}(t)s_{1m}s_{1k} \tag{6}$$

$$+a_m^{rl}(t)s_{1m}i+a_0^{rl}(t)]v_l(t,s),0\le\tau<t\le T,s\in\mathbb{R}^{n_0},r=1,\dots,n.$$

$$v_r(t,s)|_{t=\tau}=v_{0r}(s),s\in\mathbb{R}^{n_0},r=1,\dots,n, \tag{7}$$

Оскільки функції $u_{0r}(x)$ досить гладкі і фінітні, то їх перетворення Фур'є є аналітичними функціями, для яких виконуються нерівності: $|v_{0r}(s)|\le C(1+|s|)^{-m},s\in\mathbb{R}^{n_0},m\ge n_0+1$, де

$$v_{0r}(s):=F[u_{0r}(x)]=\int_{\mathbb{R}^{n_0}}\exp\{-i(x,s)\}u_{0r}(x)dx. \tag{8}$$

У задачі (6), (7) s^* — параметр. Система (6) є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку, які мають однакові головні частини. Згідно з [2, с. 146–148] така система еквівалентна однорідному лінійному диференціальному рівнянню з частинними похідними першого порядку для функції w від $n+1+n_0-n_1$ незалежних змінних $t, s_{11}, \dots, s_{1n_2}, s_{21}, \dots, s_{2n_3},\ s_{31}, \dots, s_{3n_4},\ v_1, \dots, v_n$

$$\partial_t w + \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}} s_{j+1,m}\partial_{s_{jm}} w - \sum_{r,l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{rl}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{rl}(t)s_{1m} + a_0^{rl}(t)]v_r\partial_{v_l} w = 0,$$

яке в свою чергу, як відомо, еквівалентно системі звичайних диференціальних рівнянь

$$dt = \frac{ds_{11}}{s_{21}} = \dots = \frac{ds_{1n_2}}{s_{2n_2}} = \frac{ds_{21}}{s_{31}} = \dots = \frac{ds_{2n_3}}{s_{3n_3}} = \frac{ds_{31}}{s_{41}} = \dots = \frac{ds_{3n_4}}{s_{4n_4}}$$

$$= \frac{dv_1}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{1l}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{1l}(t)s_{1m} + a_0^{1l}(t)]v_l}$$

$$= \dots = \frac{dv_n}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{nl}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{nl}(t)s_{1m} + a_0^{nl}(t)]v_l}.$$

З цієї системи виділимо $\sum\limits_{j=2}^{4} n_j + n + 1$ рівнянь для знаходження $\sum\limits_{j=2}^{4} n_j + n + 1$ незалежних інтегралів. З рівнянь $dt = \frac{ds_{3j}}{s_{4j}}, j = 1, \dots, n_4$, знаходимо

$$s_{3j} = ts_{4j} + c'_{1j}, j = 1, \dots, n_4, \tag{9}$$

із $dt = \frac{ds_{2j}}{s_{3j}}, j = 1, \dots, n_4$, враховуючи (9), маємо

$$s_{2j} = t^2 s_{4j}/2 + tc'_{1j} + c'_{2j}, \tag{10}$$

а із $dt = ds_{1j}/s_{2j}, j = 1, \dots, n_4$ і (10) одержимо

$$s_{1j} = t^3 s_{4j}/6 + t^2 c'_{1j}/2 + tc'_{2j} + c'_{3j}. \tag{11}$$

При $j = n_4 + 1, \dots, n_3$ із $dt = ds_{2j}/s_{3j}$ маємо

$$s_{2j} = ts_{3j} + c''_{1j}, \tag{12}$$

тому із $dt = ds_{1j}/s_{2j}$ при $j = n_4 + 1, \dots, n_3$

$$s_{1j} = t^2 s_{3j}/2 + tc''_{1j} + c''_{2j}. \tag{13}$$

Розглядаючи $j = n_3 + 1, \dots, n_2$, із $dt = ds_{1j}/s_{2j}$ одержимо

$$s_{1j} = ts_{2j} + c'''_{1j}. \tag{14}$$

Враховуючи (9)–(14), запишемо

$$s_1=(s_{11},\dots,s_{1n_1})=(t^3s_{41}/6+t^2c'_{11}/2+tc'_{21}+c'_{31},\dots,t^3s_{4n_4}/6+t^2c'_{1n_4}/2+tc'_{2n_4}+c'_{3n_4},\\ t^2s_{3n_4+1}/2+tc''_{1n_4+1}+c''_{2n_4+1},\dots,t^2s_{3n_3}/2+tc''_{1n_3}+c''_{2n_3},ts_{2n_3+1}+c'''_{1n_3+1},\dots,\\ ts_{2n_2}+c'''_{1n_2},s_{1n_2+1},\dots,s_{1n_1}):=P_1(t,s^*,c), \tag{15}$$

$$s_2=(s_{21},\dots,s_{2n_2})=(t^2s_{41}/2+tc'_{11}+c'_{21},\dots,t^2s_{4n_4}/2+tc'_{1n_4}+c'_{2n_4},ts_{3n_4+1}+\\ +c''_{1n_4+1},\dots,ts_{3n_3}+c''_{1n_3},s_{2n_3+1},\dots,s_{2n_2}):=P_2(t,s^*,c), \tag{16}$$

$$s_3=(ts_{41}+c'_{11},\dots,ts_{4n_4}+c'_{1n_4},s_{3n_4+1},\dots,s_{3n_3}):=P_3(t,s^*,c),s_4\in\mathbb{R}^{n_4}. \tag{17}$$

Нехай $P(t,s^*,c):=(P_1(t,s^*,c),P_2(t,s^*,c),P_3(t,s^*,c)),c:=(c',c'',c''')$.

Підставимо (15)–(17) в систему рівнянь $dv=\sum_{|k|\le 2}a_k(t)(is_1)^kvdt$, одержимо систему рівнянь на характеристиках (9)–(14)

$$dv(t,P(t,s^*,c),s_4)=\sum_{|k|\le 2}a_k(t)(iP_1(t,s^*,c))^kvdt \tag{18}$$

з початковою умовою

$$v(t,P(t,s^*,c),s_4)|_{t=\tau}=v_0(P(\tau,s^*,c),s_4). \tag{19}$$

Задача Коші (18), (19) має єдиний розв'язок для $0\le\tau<t\le T<+\infty$ і має вигляд

$$v(t,P(t,s^*,c),s_4)=Q(t,\tau,P(t,s^*,c),s_4)v_0(P(\tau,s^*,c),s_4),0\le\tau<t\le T, \tag{20}$$

де $Q(t,\tau,P(t,s^*,c),s_4)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язків системи (18), $Q(t,\tau,P(t,s^*,c),s_4)|_{t=\tau}=I$.

Знайдемо c',c'',c''' із (9)–(14):

$$c'_{1j}=s_{3j}-ts_{41},c'_{2j}=s_{2j}-ts_{3j}+t^2s_{4j}/2,\\ c'_{3j}=s_{1j}-ts_{2j}+t^2s_{3j}/2-t^3s_{4j}/6,j=1,\dots,n_4, \tag{21}$$

$$c''_{1j}=s_{2j}-ts_{3j},c''_{2j}=s_{1j}-ts_{2j}+t^2s_{3j}/2,j=n_4+1,\dots,n_3, \tag{22}$$

$$c'''_{1j}=s_{1j}-ts_{2j},j=n_3+1,\dots,n_2. \tag{23}$$

Підставивши (21)–(23) в $P_1(\tau,s^*,c)$, маємо

$$\tau^3s_{4j}/6+c'_{1j}\tau^2+c'_{2j}\tau+c'_{3j}=s_{1j}-(t-\tau)s_{2j}+(t-\tau)^2s_{3j}/2-(t-\tau)^3s_{4j}/6,\\ j=1,\dots,n_4;\tau^2s_{3j}/2+c''_{1j}\tau+c'_{2j}=s_{1j}-(t-\tau)s_{2j}+(t-\tau)^2s_{3j}/2,\\ j=n_4+1,\dots,n_3;\tau s_{2j}+c'''_{1j}=s_{1j}-(t-\tau),j=n_3+1,\dots,n_2. \tag{24}$$

Аналогічно підставивши (21)–(23) в $P_2(\tau, s^*, c), P_3(\tau, s^*, c)$, одержимо

$$\tau^2 s_{4j}/2 + c'_{1j}\tau + c'_{2j} = s_{2j} - (t-\tau)s_{3j} + (t-\tau)^2 s_{4j}/2, j = 1, \ldots, n_4;$$
$$\tau s_{3j} + c''_{1j} = s_{2j} - (t-\tau)s_{3j}, j = n_4+1, \ldots, n_3;$$
$$\tau s_{4j} + c'_{1j} = s_j - (t-\tau)s_{4j}, j = 1, \ldots, n_4, \tag{25}$$

Враховуючи (24), (25), одержимо

$$v(t,s) = Q(t,\tau,s)v_0(s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2 s'_3/2 - (t-\tau)^3 s_4/6,$$
$$s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2 s^*_3/2, s'''_1 - (t-\tau)s^*_2, s^*_1, s'_2 - (t-\tau)s'_3 + (t-\tau)^2 s_4/2,$$
$$s''_2 + (t-\tau)s^*_3, s^*_2, s'_3 - (t-\tau)s_4, s^*_3, s_4). \tag{26}$$

За побудовою, ця формула виражає розв'язок задачі Коші для системи (6) з початковою умовою (7). Далі обґрунтуємо, що $u(t,x)$ — розв'язок задачі (4), (5) має вигляд

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n_0} \int_{R^{n_0}} \exp xQ(t,\tau,s)v_0(s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2 s'_3/2$$
$$-(t-\tau)^3 s_4/6, s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2 s^*_3/2, s'''_1 - (t-\tau)s^*_2, s^*_1, s'_2 - (t-\tau)s'_3$$
$$+(t-\tau)^2 s_4/2, s''_2 - (t-\tau)s^*_3, s^*_2, s'_3 - (t-\tau)s_4, s^*_3, s_4)ds. \tag{27}$$

У інтегралі (27) зробивши заміну змінних $s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2 s'_3/2 - (t-\tau)^3 s_4/6 = y'_1$, $s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2 s^*_3/2 = y''_1$, $s'''_1 - (t-\tau)s^*_2 = y'''_1$, $s^*_1 = y^*_1$, $s'_2 - (t-\tau)s'_3 + (t-\tau)^2 s_4/2 = y'_2$, $s''_2 - (t-\tau)s^*_3 = y''_2$, $s^*_2 = y^*_2$, $s'_3 - (t-\tau)s_4 = y'_3$, $s^*_3 = y^*_3$, $s_4 = y_4$, матимемо

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n_0} \int_{R^{n_0}} \exp\{i(x_1, y_1) + i(x_2 + \bar{x}_1(t-\tau), y_2) + i(x_3 + \bar{x}_2(t-\tau)$$
$$+(t-\tau)^2 \bar{\bar{x}}_1/2, y_3) + i(x_4 + \bar{x}_3(t-\tau) + \bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2 + x'_1(t-\tau)^3/6, y_4)\}$$
$$\times Q(t,\tau; B(t,\tau,y))v_0(y)dy, \tag{28}$$

де $B(t,\tau,y) := (y'_1 + (t-\tau)y'_2 + y'_3(t-\tau)^2/2 + y_4(t-\tau)^3/6, y''_1 + (t-\tau)y''_2 + y^*_3(t-\tau)^2/2;$ $y'''_1 + (t-\tau)y^*_2, y^*_1, y'_2 - (t-\tau)y'_3 + (t-\tau)^2 y_4/2, y''_2 + (t-\tau)y^*_3, y^*_2, y'_3 + (t-\tau)y_4, y^*_3, y_4)$.

Інтеграли (27), (28) одночасно збіжні або розбіжні. Далі буде доведено оцінку

$$|Q(t,\tau; B(t,\tau,y))| \le A \exp\{-c_0 \sum_{j=1}^{4} |y_j|^2 (t-\tau)^{2j-1}\}. \tag{29}$$

з деякими сталими $A > 0, c_0 > 0$. Внаслідок виконання (29) є збіжність (28), можливість в (27) диференціювання під знаком інтеграла, а також граничного переходу $u(t,x) \to F^{-1}Fu_0 = u_0$ при $t \to \tau^+$.

Скориставшись виразом (8), оцінкою (29) і змінивши порядок інтегрування у формулі (28), одержимо

$$u(t,x) = \int_{R^{n_0}} G(t,x;\tau,\xi)u_0(\xi)d\xi, 0 \le \tau < t \le T, \{\xi, x\} \subset R^{n_0}, \tag{30}$$

де

$$G(t,x;\tau,\xi) = (2\pi)^{-n_0} \int_{R^{n_0}} \exp\{i((x_1 - \xi_1), y_1) + i((x_2 + \bar{x}_1(t-\tau) - \xi_2), y_2)$$
$$+i((x_3 - \xi_3 + \bar{x}_2(t-\tau) + \bar{\bar{x}}_1(t-\tau)^2/2), y_3) + i((x_4 - \xi_4 + \bar{x}_3(t-\tau)$$
$$+\bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2 + x'_1(t-\tau)^3/6), y_4)\}Q(t,\tau; B(t,\tau,y))\}dy.$$

3 Доведення оцінки (29) у випадку сталих коефіцієнтів системи (6)

Розглянемо систему рівнянь виду

$$dv(t, P(t, s^*, c), s_4) = \sum_{|k|=2} a_k (iP_1(t, s^*, c))^k v(t, P(t, s^*, c), s_4) dt$$

таку, що

$$\sum_{|k|=2} a_k (iP_1(t, s^*, c))^k \int_\tau^t \sum_{|k|=2} a_k (iP_1(\beta, s^*, c))^k d\beta = \int_\tau^t \sum_{|k|=2} a_k (iP_1(\beta, s^*, c))^k d\beta \times \sum_{|k|=2} a_k (iP_1(t, s^*, c))^k. \quad (31)$$

Якщо $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, то (31) завжди виконується. Як вище доведено, розв'язок задачі Коші для такої системи рівнянь запишеться у вигляді (20)

$$v(t, P(t, s^*, c), s_4) = Q(t, \tau; P(t, s^*, c), s_4) v_0(P(\tau, s^*, c), s_4),$$

але оскільки виконується (31), то

$$Q(t, \tau; P(t, s^*, c), s_4) = \exp\Big\{ \int_\tau^t \sum_{|k|=2} a_k (iP_1(\beta, s^*, c))^k d\beta \Big\}.$$

Враховуючи (22)–(25), одержимо (26) з $Q(t, \tau, s) = \exp\{- \sum\limits_{|k|=2} a_k \int\limits_\tau^t (\alpha(t-\beta, s))^k d\beta\}$, де $\alpha(t-\tau, s) := (s_1' - (t-\tau)s_2' + (t-\tau)^2 s_3'/2 - (t-\tau)^3 s_4/6,\ s_1'' - (t-\tau)s_2'' + (t-\tau)^2 s_3^*/2,\ s_1''' - (t-\tau)s_2^*, s_1^*)$.

А відповідно $Q(t, \tau; B(t, \tau, y))$ має вигляд

$$Q(t, \tau; B(t, \tau, y)) = \exp\Big\{ - \sum_{|k|=2} a_k \int\limits_\tau^t (B_1(\beta, \tau, y))^k d\beta \Big\}, \quad (32)$$

де $B_1(t, \tau, y) := (y_1' + (t-\tau)y_2' + (t-\tau)^2 y_3'/2 + (t-\tau)^3 y_4/6, y_1'' + (t-\tau)s_2'' + (t-\tau)^2 y_3^*/2, y_1''' + (t-\tau)y_2^*, y_1^*)$.

Обчислимо всі можливі інтеграли, що містяться в $\int\limits_\tau^t (B_1(\beta, \tau))^k d\beta$. Зробимо заміну змінних $\beta - \tau = \theta(t-\tau)$ і перепозначимо $y_j(t-\tau)^{(2j-1)/2} = \sigma_j$, $j = 1, \ldots, 4$. Тоді $\int\limits_\tau^t (B_1(\beta, \tau))^k d\beta = \int\limits_0^1 B_1^k(\theta(t-\tau), \sigma_1(t-\tau)^{-1/2}, \sigma_2(t-\tau)^{-3/2}, \sigma_3(t-\tau)^{-5/2}, \sigma_4(t-\tau)^{-7/2}) d\theta(t-\tau)$.

У випадку $|k| = 2$ маємо інтеграли

$$\int_0^1 (\sigma_{1j} + \sigma_{2j} p_1 \theta + \sigma_{3j} p_2 \theta^2/2 + \sigma_{4j} p_3 \theta^3/6)(\sigma_{1m} + \sigma_{2m} q_1 \theta + \sigma_{3m} q_2 \theta^2/2 + \sigma_{4m} q_3 \theta^3/6) d\theta = (\sigma_{1j} + p_1 \sigma_{2j}/2 + p_2 \sigma_{3j}/6 + p_3 \sigma_{4j}/24)(\sigma_{1m} + q_1 \sigma_{2m}/2 + q_2 \sigma_{3m}/6 + q_3 \sigma_{4m}/24) + (\sigma_{2m} q_1 + \sigma_{3m} q_2/2 + 3q_3 \sigma_{4m}/20)(\sigma_{2j} p_1 + \sigma_{3j} p_2/2 + 3\sigma_{4j} p_3/20)/12 + \frac{(\sigma_{3m} q_2 + \sigma_{4m} q_3/2)(p_2 \sigma_{3j} + p_3 \sigma_{4j}/2)}{720} + \frac{p_3 q_3 \sigma_{4m} \sigma_{4j}}{25200}, \quad (33)$$

де, якщо

1) $(p_1, p_2, p_3) = (q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1)$, то $m, j = 1, \ldots, n_4$;

2) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1), (q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0)$, то $m = n_4 + 1, \ldots, n_3, j = 1, \ldots, n_4$;

3) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1), (q_1, q_2, q_3) = (1, 0, 0)$, то $m = n_3 + 1, \ldots, n_2$, $j = 1, \ldots, n_4$;

4) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1), (q_1, q_2, q_3) = (0, 0, 0)$, то $m = n_2 + 1, \ldots, n_1, j = 1, \ldots, n_4$;

5) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 0), (q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0)$, то $m, j = n_4 + 1, \ldots, n_3$;

6) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 0), (q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0)$, то $m = n_4 + 1, \ldots, n_3$, $j = n_3 + 1, \ldots, n_2$;

7) $(p_1, p_2, p_3) = (q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0)$, то $m, j = n_3 + 1, \ldots, n_2$;

8) $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 0), (q_1, q_2, q_3) = (1, 0, 0)$, то $j = n_2 + 1, \ldots, n_1$, $m = n_3 + 1, \ldots, n_2$;

9) $(p_1, p_2, p_3) = (q_1, q_2, q_3) = (0, 0, 0)$, то $m, j = n_2 + 1, \ldots, n_1$.

Проаналізувавши вираз (33), прийдемо до висновку, що, підставивши в $\sum\limits_{|k|=2} a_k (is_1)^k$ замість s_1 вектори μ, ν, ω, z з відповідними компонентами

μ : $\sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 + \sigma_{3j}/6 + \sigma_{4j}/24, j = 1, \ldots, n_4, \sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 + \sigma_{3j}/6, j = n_4 + 1, \ldots, n_3$, $\sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2, j = n_3 + 1, \ldots, n_2, \sigma^*_{1j}, j = n_2 + 1, \ldots, n_1$;

ν : $\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sigma_{2j} + \sigma_{3j}/2 + 3\sigma_{4j}/20), j = 1, \ldots, n_4, \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sigma_{2j} + \sigma_{3j}/2), j = n_4 + 1, \ldots, n_3$, $\sigma_{2j}, j = n_3 + 1, \ldots, n_2, \nu_{n_2+1} = 0, \ldots, \nu_{n_1} = 0$;

ω : $\frac{1}{12\sqrt{3}}\sigma_{4j}/2, j = 1, \ldots, n_4, \omega_{n_3+1} = 0, \ldots, \omega_{n_1} = 0$;

z : $\frac{1}{60\sqrt{7}}(\sigma_{3j} + \sigma_{4j}/2, j = 1, \ldots, n_4, \frac{1}{12\sqrt{3}}\sigma_{3j}, j = n_4 + 1, \ldots, n_3, \sigma_{2j}, j = n_3 + 1, \ldots, n_4$, $z_{n_4+1} = 0, \ldots, z_{n_1} = 0$,
і додавши результати, одержимо наступну рівність $\sum\limits_{|k|=2} a_k i^k (\mu^k + \nu^k + \omega^k + z^k) = \sum\limits_{|k|=2} a_k i^k \int\limits_0^1 B_1\Big(\theta(t-\tau), \sigma_1(t-\tau)^{-1/2}, \sigma_2(t-\tau)^{-3/2}, \sigma_3(t-\tau)^{-5/2}, \sigma_4(t-\tau)^{-7/2}\Big) d\theta(t-\tau)$.

Оскільки, використавши параболічність, маємо $\operatorname{Re}\lambda(\mu) \le -\delta_0|\mu|^2$, то $\operatorname{Re}\lambda(\mu) \le -\delta_0\Big(|\sigma_1^*|^2 + |\sigma_1''' + \sigma_2^*/2|^2 + |\sigma_1'' + \sigma_2''/2 + \sigma_3/6|^2 + |\sigma_1' + \sigma_2'/2 + \sigma_3'/6 + \sigma_4/24|^2\Big)$. Аналогічно $\operatorname{Re}\lambda(\nu) \le -\delta_0\Big(|\sigma_{2j}' + \sigma_{3j}'/2 + 3\sigma_4/20|^2 + |\sigma_2'' + \sigma_3^*/2|^2 + |\sigma_2^*/2|^2\Big)/12$; $\operatorname{Re}\lambda(\omega) \le -\delta_0\Big(|\sigma_3' + \sigma_4/2|^2 + |\sigma_3^*|^2\Big)/720$; $\operatorname{Re}\lambda(z) \le -\delta_0|\sigma_4|^2/252000$.

Враховуючи оцінки $\operatorname{Re}\lambda$, одержимо оцінку матриці $Q(t, \tau, \sigma)$

$$
\begin{gathered}
|\exp\sum_{|k|\le 2} a_k i^k (\mu^k + \nu^k + \omega^k + z^k)| \le C\exp\Big\{ -\delta_1\big[|\sigma_1^*|^2 + |\sigma_1''' + \sigma_2^*/2|^2 \\
+|\sigma_1'' + \sigma_2''/2 + \sigma_3^*/6|^2 + |\sigma_1' + \sigma_2'/2 + \sigma_3'/6 + \sigma_4/24|^2 + |\sigma_2' + \sigma_3'/2 + 3\sigma_4/20|^2 \\
+|\sigma_2'' + \sigma_3^*/2|^2 + |\sigma_2^*/2|^2/12 + |\sigma_3' + \sigma_4/2|^2 + |\sigma_3^*|^2/720 + |\sigma_4|^2/25200\big]\Big\}.
\end{gathered}
$$

Звідси маємо (29), де $c_0 = \delta_1/25200$, $0 < \delta_1 < \delta_0$, $C > 0$.

4 Встановлення оцінки (29) у випадку коефіцієнтів залежних лише від t

Для встановлення оцінки (29), використаємо підхід, застосований в [1], [4]. Розглянемо систему

$$\frac{dQ(t,\tau,B(t,\tau,y))}{dt}=\sum_{|k|=2}a_k(t_0)(iB_1(t,\tau,y))^kQ(t,\tau,B(t,\tau,y))$$
$$+\Big\{\sum_{|k|=2}[a_k(t)-a_k(t_0)](iB_1(t,\tau,y))^k+\sum_{|k|<2}a_k(t)(iB_1(t,\tau,y))^k\Big\}Q(t,\tau,B(t,\tau,y)),$$

де $0\le\tau<t\le T, y\in R^{n_0}$. $Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|_{t=\tau}=I$, тоді

$$Q(t,\tau,B(t,\tau,y))=\exp\{\sum_{|k|=2}a_k(t_0)\int_{t_0}^t(iB_1(\beta,\tau,y))^kd\beta\}\}Q(t_0,\tau,B(t,\tau,y))$$
$$+\int_{t_0}^t\exp\{\sum_{|k|=2}a_k(t_0)\int_\beta^t(iB_1(\beta,\tau,y))^kd\beta\}\times[\sum_{|k|=2}(a_k(\beta)-a_k(t_0))$$
$$+\sum_{|k|<2}(a_k(\beta)](iB_1(\beta,\tau,y))^kQ(\beta,\tau,B(\beta,\tau,y))d\beta.$$

Виберемо довільне $\varepsilon>0$ і знайдемо таке $\delta(\varepsilon)$, щоб для всіх t,t_0 таких, що $|t-t_0|<\delta(\varepsilon)$ виконувалася нерівність $|a_k(t)-a_k(t_0)|<\varepsilon$. Крім того $|\sum\limits_{|k|<2}a_k(t)(iB_1(t,\tau,y))^k|\le\varepsilon|B_1(t,\tau,y)|^2$ при $|B_1(t,\tau,y)|>R>0$, тому

$$|Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|\le|\exp\{-\sum_{|k|=2}a_k(t_0)\int_{t_0}^t(B_1^k(\beta,\tau,y)d\beta\}Q(t_0,\tau,B(t_0,\tau,y))|$$
$$+\int_{t_0}^t|\exp\{-\sum_{|k|=2}a_k(t_0)\int_\beta^tB_1^k(\gamma,\tau,y)d\gamma\}|2\varepsilon|B_1(\beta,\tau,y)|^2|Q(\beta,\tau,B(\beta,\tau,y))|d\beta.$$

Використавши лему Гроноулла, одержимо наступну нерівність $|Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|\le c_1|Q(t_0,\tau,B(t_0,\tau,y))|\exp\Big\{-\sum\limits_{|k|=2}a_k(t_0)\int_{t_0}^tB_1^k(\beta,\tau,y)d\beta\Big\}\exp\Big\{2\varepsilon\int_{t_0}^t|B_1(\beta,\tau,y)|^2d\beta\Big\}$.

Розкривши інтеграли $\int_{t_0}^t|B_1(\beta,\tau,y)|^2d\beta$, використавши параболічність, підібравши ε і звівши подібні, а після чого, записавши показник знову через інтеграл, одержимо

$$|Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|\le c_1|Q(t_0,\tau,B(t_0,\tau,y))|\exp\{-\delta_2\int\limits_{t_0}^t|B_1(\beta,\tau,y)|^2d\beta\},0<\delta_2<\delta_0. \quad (34)$$

Ввівши розбиття, $t_0=\tau,\dots,\tau+\delta(\varepsilon),\dots\tau+m_1\delta(\varepsilon),m_1=[\frac{T}{\varepsilon}]+2,c_1\ge1$, послідовно оцінюючи $Q(t,\tau,B(t,\tau,y))$ через (34), одержимо оцінку

$$|Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|\le c_1^{m_1}\exp\{-\delta_2\int_\tau^t|B_1(\beta,\tau,y)|^2d\beta\}. \quad (35)$$

Звідси, використавши (33), одержимо (29).

Як і в [1] можна довести оцінку для $Q(t,\tau,B(t,\tau,y+i\tilde y)),\tilde y\in R^{n_0}$.

$$|Q(t,\tau,B(t,\tau,y+i\tilde y))|\le C\exp\Big\{\int_\tau^t(-\delta_3|B(\beta,\tau,y)|^2+c_1|B(\beta,\tau,\tilde y)|^2)d\beta\Big\}, \quad (36)$$

де $0<\delta_3<\delta_2$, $c_1>0$, $C>0$, c_1,C залежать від T, n; δ_0, $\sup|a_k(t)|$, $\{y,\tilde y\}\in\mathbb{R}^{n_0}$.

5 Аналітичний опис ФМРЗК

Щоб дослідити $G(t,x;\tau,\xi)$, зробимо таку заміну змінних в (31): $\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2+\sigma_{3j}/6+\sigma_{4j}/24 = s_{1j}, j = 1,\dots,n_4; \sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2+\sigma_{3j}/6 = s_{1j}, j = n_4+1,\dots,n_3; \sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2 = s_{1j}, j = n_3+1,\dots,n_2; \sigma^*_{1j} = s_{1j}, j = n_2+1,\dots,n_1; \sigma_{2j}+\sigma_{3j}/2+3\sigma_{4j}/20 = s_{2j}, j = 1,\dots,n_4; \sigma_{2j}+\sigma_{3j}/2) = s_{2j}, j = n_4+1,\dots,n_3; \sigma_{2j} = s_{2j}, j = n_3+1,\dots,n_2; \sigma_{3j}+\sigma_{4j}/2 = s_{3j}, j = 1,\dots,n_4; \sigma_{3j} = s_{3j}, j = n_4+1,\dots,n_3; \sigma_{4j}/2 = s_{4j}, j = 1,\dots,n_4$.

У випадку сталих коефіцієнтів маємо

$$\begin{aligned}G(t,x;\tau,\xi) = (2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}} &\exp\{i((x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2},s_1)+i(x_2+(\bar{x}_1+\bar{\xi}_1)\\ &\times(t-\tau)/2-\xi_2)(t-\tau)^{-3/2},s_2)+i((x_3+(t-\tau)(\bar{x}_2+\bar{\xi}_2)/2+(\bar{\bar{x}}_1-\bar{\bar{\xi}}_1)\\ &\times(t-\tau)^2/12-\xi_3)(t-\tau)^{-5/2},s_3)+i((x_4+(\bar{x}_3+\bar{\xi}_3)(t-\tau)/2+(\bar{\bar{x}}_2-\bar{\bar{\xi}}_2)\\ &\times(t-\tau)^2/10+(x_1'+\xi_1')(t-\tau)^3/120-\xi_4)(t-\tau)^{-7/2},s_4)\\ &+\sum_{|k|\le 2}a_k i^k(s_1^k+s_2^k 12^{\frac{k}{2}}+s_3^k 720^{\frac{k}{2}}+s_4^k 25200^{\frac{k}{2}})\}ds(t-\tau)^{-\frac{p}{2}}.\end{aligned} \tag{37}$$

Аналізуючи (37), аналогічно як у випадку рівняння типу Колмогорова з сталими коефіцієнтами, інерція якого залежить від трьох груп змінних [3], одержимо аналітичний опис ФМРЗК.

У загальному випадку, використовуючи (35), (36), (30), (32), (33), одержимо твердження:

Теорема. *Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші системи* (4) *має вигляд* $G(t,x;\tau,\xi) = (t-\tau)^{-\frac{p}{2}}\Omega\Big(t,\tau;(x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2},(x_2-\xi_2+(\bar{x}_1+\bar{\xi}_1)(t-\tau)/2)(t-\tau)^{-3/2}, (x_3-\xi_3+(t-\tau)(\bar{x}_2+\bar{\xi}_2)/2+(\bar{\bar{x}}_1-\bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^2/12)(t-\tau)^{-5/2},(x_4-\xi_4+(\bar{x}_3+\bar{\xi}_3)(t-\tau)/2+(\bar{\bar{x}}_2-\bar{\bar{\xi}}_2)(t-\tau)^2/10+(x_1'+\xi_1')(t-\tau)^3/120-\xi_4)(t-\tau)^{-7/2}\Big)$, *де* $\Omega(t,\tau,z_1,z_2,z_3,z_4)$ *при фіксованих* t, τ *є цілою функцією аргументів* $z_1,\dots z_4$, *порядку зростання 2 при комплексних значеннях цих аргументів і такого ж самого порядку спадання при їх дійсних значеннях.*

Для похідних справджуються оцінки

$$|\partial_x^m\partial_\xi^l G(t,x+iy;\tau,\xi)| \le C_{ml}(t-\tau)^{-M_{ml}}\exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi)+F_1 d(t,y;\tau,0)\};$$

$$|(\partial_t-\sum_{j=1}^{3}\bar{x}_j\partial_{x_{j+1}})G(t,x+iy;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-1-p/2}\exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi)+F_1 d(t,y;\tau,0)\};$$

$$M_{ml} = \sum_{j=1}^{4}(2j-1)(n_j+|m_j|+|l_j|)/2,$$

$$\begin{aligned}|\partial_t G(t,x+iy;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-p/2}&\exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi)+F_1 d(t,y;\tau,0)\}((t-\tau)^{-1}\\ &+\sum_{j=1}^{3}(|x_j|+|\xi_j|)(t-\tau)^{-(2j+1)/2});\end{aligned}$$

$\{x, \xi, y\} \subset \mathbb{R}^{n_0}$, $0 \leq \tau < t \leq T$, *де* F_1, C_{lm}, C, C_1, c_0 — *додатні сталі, залежать від* $\sup\limits_{t\in[0,T]} |a_k(t)|$, *характеру неперервності* $a_k(t), T, n_j, \delta_0$.

Аналогічно як для параболічних систем [1, с. 91–92] можна показати, що існує ФМРЗК спряженої системи до (4), довести оцінки її похідних, нормальність $G(t, x; \tau, \xi)$, формулу згортки і єдиність ФМРЗК.

Література

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 443 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
3. Малицька Г.П. *Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т.42, №3. — С. 56–60.
4. Малицька Г.П. *Системи рівнянь типу Колмогорова* // Укр. мат. журн. — 2008. — Т.12, №3. — С. 1650–1663.
5. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type, Operator Theory: Adv. and Appl., 152, 2004.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 21.12.2011

Burtnyak I.V., Malytska H.P. *Fundamental matrix of solutions for one class of parabolic degenerate systems*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 12–22.

We consider one class of ultraparabolic equation systems of second order, that have three groups of degenerated variables and coefficients of which depend only on a time variable. We construct the fundamental matrix of Cauchy problem and obtain the estimations of this matrix and of all its derivatives.

Буртняк И.В., Малицкая А.П. *Фундаментальные матрицы решений одного класса вырожденных параболических систем* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 12–22.

Рассмотрен один класс ультрапараболических систем уравнений второго порядка с тремя группами переменных, за которыми есть вырождение и коэффициенты зависят только от временной переменной. Построена фундаментальная матрица решений задачи Коши, получены оценки этой матрицы и всех ее производных.