Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.51

Волошин Г.А.[1], Маслюченко В.К.[1], Нестеренко О.Н.[2]

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У ПРОСТОРІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Нестеренко О.Н. *Про апроксимацію відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 23–27.

З допомогою теореми про апроксимацію одиничного оператора у банаховому просторі $C_u(Y)$ всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$, заданих на метризовному компакті Y, з рівномірною нормою доведено, що для топологічного простору X, метризовного компакта Y, всюди щільного в $C_u(Y)$ лінійного підпростору L і нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ існує така послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x = f(x, \cdot) \in L$ і $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.

1 Вступ

Для топологічного простору Y символом $C(Y)$ ми позначаємо векторний простір всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$, а через $C_p(Y)$ — локально опуклий простір $(C(Y), \mathcal{T}_p)$ з топологією $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності. Для компактного простору Y через $C_u(Y)$ позначаємо банахів простір $(C(Y), \|\cdot\|)$, де $\|g\| = \max\limits_{y\in Y} |g(y)|$, а через $\mathcal{T}_u$ — топологію рівномірної збіжності на $C(Y)$, що породжена максимум-нормою $\|\cdot\|$.

Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір і $\alpha = p$ або u. Неперервне відображення $\varphi : X \to C_\alpha(Y)$ будемо називати *α-неперервним.* Якщо $\beta = p$ або u, то неперервне відображення $A : C_\alpha(Y) \to C_\beta(Y)$ ми називаємо *$\alpha\beta$-неперервним.* У праці [2] була поставлена проблема $\alpha\beta$: для яких підпросторів L простору $C(Y)$ для кожного α-неперервного відображення $\varphi : X \to C(Y)$ існує така послідовність β-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ на X у просторі $C_u(Y)$. У ній же була отримана ствердна відповідь на проблему (uu) для всюди щільних лінійних підпросторів L простору $C_u(Y)$, який має базис Шаудера.

Тут ми показуємо, що, використавши конструкцію з праці [1], для всюди щільних в $C_u(Y)$ лінійних підпросторів L, можна отримати ствердну відповідь і на сильнішу проблему (pu) для довільного метризовного компакта Y.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 65D15.
Ключові слова і фрази: апроксимація, нарізно та сукупно неперервні функції, одиничний оператор.

Далі, в [2] було зауважено, що для довільного всюди щільного лінійного підпростору L банахового простору E з базисом Шаудера існує така послідовність лінійних неперервних операторів $A_n : E \to L$, що $A_n g \to g$ в E для кожного $g \in E$. Тут, використовуючи деякі результати з теорії наближень, для довільного сепарабельного банахового простору E і його всюди щільного лінійного підпростору L ми будуємо таку послідовність неперервних операторів $A_n : E \to L$ (не обов'язково лінійних), що $A_n g \to g$ в E для кожного $g \in E$.

Отримані тут результати істотно доповнюють працю [2]. Їх ми застосовуємо і до апроксимації нарізно неперервних функцій.

2 Апроксимація одиничного оператора в просторі $C(Y)$ pu-неперервними операторами

В праці [1] доведено (теорема 2, імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$), що для кожного метризовного компакта Y існує така послідовність скінченновимірних лінійних pu-неперервних операторів $T_n : C(Y) \to C(Y)$, що $T_n g \to g$ у просторі $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$.

З допомогою наступної леми ми зможемо покращити цей результат.

Лема 2.1. *Нехай L — скрізь щільний лінійний підпростір нормованого простору E, M — скінченновимірний лінійний підпростір E, $J : M \to E$ — тотожне вкладення і $\varepsilon > 0$. Тоді існує такий лінійний неперервний оператор $U : M \to E$, що $U(M) \subseteq L$ і $\|J - U\| \leq \varepsilon$.*

Доведення. Нехай $\dim M = m$ і $x_1, \dots, x_m$ — базис в M. Для кожного $x \in M$ існує такий єдиний набір $\xi_1, \dots, \xi_m$ скалярів, що $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k$. Функція $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1,\dots,m} |\xi_k|$ є нормою на M, яка еквівалентна [6, с.157] звуженню на M вихідної норми $\|\cdot\|$ простору E, зокрема, існує така константа $C > 0$, що $\|x\|_\infty \leq C\|x\|$ для кожного $x \in M$. Оскільки $\overline{L} = E$, то для кожного $k = 1, \dots, m$ існує таке $y_k \in L$, що $\|x_k - y_k\| \leq \frac{\varepsilon}{Cm}$. Для кожного $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k \in M$ покладемо $Ux = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k y_k$. Зрозуміло, що $U : M \to E$ — лінійний оператор, для якого $U(M) \subseteq L$. Оскільки простір M скінченновимірний, то лінійний оператор U буде автоматично неперервним (це негайно випливає з ізоморфності всіх скінченновимірних нормованих просторів однакової вимірності [7, с.128]). Для $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k \in M$ будемо мати

$$\|(J-U)x\| = \|\sum_{k=1}^{m} \xi_k (x_k - y_k)\| \leq \sum_{k=1}^{m} |\xi_k| \|x_k - y_k\| \leq \frac{\varepsilon}{Cm} \cdot \|x\|_\infty \cdot m = \frac{\varepsilon \|x\|_\infty}{C} \leq \varepsilon \|x\|,$$

отже, $\|J - U\| \leq \varepsilon$. □

Теорема 1. *Нехай Y — метризовний компакт і L — скрізь щільний лінійний підпростір простору $C_u(Y)$. Тоді існує така послідовність лінійних pu-неперервних операторів $A_n : C(Y) \to C(Y)$, що $imA_n \subseteq L$ і $\dim imA_n < \infty$ для кожного n, причому $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$.*

Доведення. Використавши згаданий вище результат з [1], побудуємо таку послідовність скінченновимірних лінійних pu-неперервних операторів $T_n : C(Y) \to C(Y)$, що $T_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. За побудовою простір $M_n = imT_n$ скінченновимірний. Нехай $J_n : M_n \to C_u(Y)$ — тотожне вкладення. Застосовуючи лему 1 до банахового простору $E = C_u(Y)$, для кожного n визначимо такий лінійний неперервний оператор $U_n : M_n \to C_u(Y)$ (M_n наділяється топологією, індукованою з $C_u(Y)$), що $\|J_n - U_n\| \leq \frac{1}{n}$ і $imU_n \subseteq L$.

Покладемо $A_n = U_n T_n$ і покажемо, що послідовність операторів A_n є шуканою. Справді, $imA_n \subseteq imU_n = U_n(M_n) \subseteq L$. Тому $imA_n \subseteq L$ і образ imA_n скінченновимірний, адже таким є простір M_n. Оператори A_n лінійні (як композиція таких операторів) і pu-неперервні, адже T_n — pu-неперервний, а U_n — uu-неперервний.

Нехай $g \in C(Y)$. Покажемо, що $\|A_n g - g\| \to 0$. Справді, послідовність елементів $T_n g$ збіжна в $C_u(Y)$ до g, а значить, обмежена в $C_u(Y)$, тобто існує таке число $\gamma > 0$, що $\|T_n g\| \leq \gamma$ для кожного n. В такому разі

$$\|A_n g - g\| = \|U_n T_n g - J_n T_n g + T_n g - g\| \leq \|(U_n - J_n) T_n g\| + \|T_n g - g\|$$

$$\leq \|U_n - J_n\| \|T_n g\| + \|T_n g - g\| \leq \frac{\gamma}{n} + \|T_n g - g\| = \alpha_n.$$

Оскільки $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, то і $\|A_n g - g\| \to 0$, що і треба було довести. □

3 Апроксимація нарізно неперервних функцій

Подамо тут деякі застосування теореми 1.

Теорема 2. *Нехай Y — метризовний компакт, X — довільний топологічний простір, L — скрізь щільний лінійний підпростір банахового простору $C_u(Y)$ і $\varphi : X \to C_p(Y)$ — p-неперервне відображення. Тоді існує така послідовність u-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.*

Доведення. Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність, побудована в теоремі 1 для підпростору L. Відображення $\varphi_n = A_n \circ \varphi : X \to L$ будуть u-неперервними, оскільки φ — p-неперервне, а A_n — pu-неперервні. Далі, $\varphi_n(x) = A_n \varphi(x) \to \varphi(x)$ у $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$. □

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний компакт, L — скрізь щільний лінійний підпростір банахового простору $C_u(Y)$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тоді існує така послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x = f_n(x, \cdot) \in L$ і $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.*

Доведення. Асоційоване з функцією f відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$, $\varphi(x) = f^x = f(x, \cdot)$, буде неперервним, тобто p-неперервним, оскільки f — нарізно неперервна функція [2, теорема 1]. За теоремою 2 існує така послідовність u-неперервних відображень $\varphi_n : X \to C(Y)$, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$. Функції $f_n(x, y) = \varphi_n(x)(y)$ будуть сукупно неперервними за теоремою 2 з [2]. До того ж $f_n^x = \varphi_n(x) \to \varphi(x) = f^x$ у просторі $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$. □

4 Апроксимація одиничного оператора в сепарабельному банаховому просторі

Другий основний результат статті спирається на наступну елементарну лему, в якій використовується поняття строго опуклої норми (див. [4, с.21] або [3, с.25]).

Лема 4.1. *Нехай $(E, \|\cdot\|)$ — сепарабельний банаховий простір. В такому разі існує така строго опукла норма $\|\cdot\|_0$ на E, що $\|x\| \leq \|x\|_0 \leq 2\|x\|$ для кожного $x \in E$.*

Доведення. Відомо [5, гл V, §3, теорема 1], що існує ізометричний ізоморфізм $J : E \to P$ сепарабельного банахового простору E на замкнений лінійний підпростір P простору $C_u[0,1]$, норму якого позначимо тут символом $\|\cdot\|_\infty$. Норма $\|g\|_2 = \Big(\int\limits_0^1 g^2(y)dy\Big)^{\frac{1}{2}}$ на $C[0,1]$ породжена скалярним добутком, а тому строго опукла. Тоді і функція $\|g\|^0 = \|g\|_\infty + \|g\|_2$ є строго опуклою нормою на $C[0,1]$, як і її звуження на P. Тому формула $\|x\|_0 = \|Jx\|^0$ визначає строго опуклу норму на E, причому для кожного $x \in E$ справджуються нерівності $\|x\|_0 = \|Jx\|_\infty + \|Jx\|_2 \geq \|Jx\|_\infty = \|x\|$, $\|x\|_0 = \|Jx\|_\infty + \|Jx\|_2 \leq 2\|Jx\|_\infty = 2\|x\|$. □

Відомі і кращі теореми про перенормування (наприклад, теорема Троянського [3, с.128]), але нам досить доведеного результату.

Теорема 4. *Нехай L — скрізь щільний лінійний підпростір сепарабельного нормованого простору E. Тоді існує така послідовність неперервних операторів $A_n : E \to L$, що $A_n x \to x$ в E для кожного $x \in E$.*

Доведення. Оскільки кожна лінійна скрізь щільна множина в лінійному нормованому просторі є такою ж і в поповненні цього простору, то не втрачаючи загальності, вважаємо, що E — сепарабельний банахів простір. Нехай $\|\cdot\|$ — норма в E, а L — лінійна скрізь щільна множина в E.

Нехай, спочатку, норма $\|\cdot\|$ — строго опукла. Оскільки підпростір сепарабельного метричного простору є сепарабельним метричним простором, а відношення скрізь щільності є транзитивним, то існує така послідовність точок $x_n \in L$, що множина $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ скрізь щільна в E. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ позначимо через L_n лінійну оболонку елементів $x_1, \ldots, x_n$. Тоді для кожного $x \in E$ існує елемент найкращого наближення в L_n, який ми позначимо $A_n x$ (його існування випливає з того, що L_n — скінченновимірний підпростір [4, твердження 1.3.1], а єдиність — з того, що норма в E строго опукла [4, твердження 1.3.3]). Оскільки множина $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ скрізь щільна в E, то $\|x - A_n x\| = \inf\limits_{y \in L_n} \|x - y\| \to 0$ при $n \to \infty$. При цьому оператори A_n неперервні як проекції на скінченновимірний підпростір [4, твердження 1.2.2].

Нехай тепер E — довільний сепарабельний банахів простір. За лемою 4.1 існує така строго опукла норма $\|\cdot\|_0$ на E, яка еквівалентна вихідній нормі $\|\cdot\|$. За доведеним існує така послідовність операторів $A_n : E \to L$, неперервних у банаховому просторі $(E, \|\cdot\|_0)$, що $\|A_n x - x\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $x \in E$. Оскільки норми $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_0$ еквівалентні, то оператори A_n неперервні і в банаховому просторі $(E, \|\cdot\|)$ та $\|A_n x - x\| \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $x \in E$. □

Література

1. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. — 2007. — Вип. 336–337. — С. 52–59.
2. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій* // Карпатські математичні публікації — 2010. — Т.2, №2. — С. 11–21.
3. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. — К: Вища школа, 1986. — 216 с.
4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. — М: Наука, 1976. — 320 с.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. — М: Наука, 1965. — 520 с.
6. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч.1. Метричні і нормовані простори. — Чернівці: Рута, 2010. — 184 с.
7. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч.2. Лінійні оператори і функціонали. — Чернівці: Рута, 2010. — 192 с.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна

Надійшло 16.12.2011

Maslyuchenko V.K., Nesterenko O.N., Voloshyn H.A. *On approximation of mappings with values in the space of continuous functions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 23–27.

Using a theorem on the approximation of the identity in the Banach space $C_u(Y)$ of all continuous functions $g : Y \to \mathbb{R}$, defined on a metrizable compact Y with the uniform norm, we prove that for a topological space X, a metrizable compact Y, a linear subspace L of Y dense in $C_u(Y)$ and a separately continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ there exists a sequence of jointly continuous functions $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ such that $f_n^x = f(x, \cdot) \in L$ and $f_n^x \to f^x$ in $C_u(Y)$ for each $x \in X$.

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Нестеренко О.Н. *Об апроксимации отображений со значениями в пространстве непрерывных функций* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 23–27.

С помощью теоремы об апроксимации единичного оператора в банаховом пространстве $C_u(Y)$ всех непрерывных функций $g : Y \to \mathbb{R}$, заданных на метризируемом компакте Y с равномерной нормой, доказано, что для топологического пространства X, метризируемого компакта Y, всюду плотного в $C_u(Y)$ линейного подпространства L и раздельно непрерывной функции $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ существует такая последовательность совокупно непрерывных функций $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, что $f_n^x = f(x, \cdot) \in L$ и $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для каждого $x \in X$.