Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.53

Глова Т.Я.[1], Філевич П.В.[2]

ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ В ТЕРМІНАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПОРЯДКІВ

Глова Т.Я., Філевич П.В. *Зростання цілих функцій в термінах узагальнених порядків* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 28–35.

Нехай Φ — така опукла на $[x_0, +\infty)$ функція, що $\frac{\Phi(x)}{x} \to +\infty$, $x \to +\infty$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — трансцендентна ціла функція, $M(r, f)$ — максимум модуля f,

$$\rho_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln\Phi(\ln r)}, \quad c_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln\Phi(x)}, \quad d_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln\Phi'_+(x)}{\ln\Phi(x)}.$$

Доведено, що умова $d_\Phi \le c_\Phi$ є необхідною і достатньою для того, щоб узагальнений порядок $\rho_\Phi(f)$ кожної трансцендентної цілої функції f не залежав від аргументів коефіцієнтів a_n (чи визначався послідовністю $(|a_n|)$).

Вступ

Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, L — клас неперервних, зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій, а Ω — клас опуклих на $[x_0, +\infty)$ функцій Φ таких, що

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty.$$

Через $\mathcal{H}$ позначимо клас трансцендентних цілих функцій. Якщо $f \in \mathcal{H}$ і $n \in \mathbb{N}_0$, то через $a_n(f)$ позначимо n-ний коефіцієнт степеневого розвинення функції f, тобто

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) z^n. \tag{1}$$

Максимум модуля, максимальний член і порядок цієї функції визначаємо відповідно рівностями

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad \mu(r, f) = \max\{|a_n(f)|r^n : n \in \mathbb{N}_0\},$$
$$\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D20, 30B10.

Ключові слова і фрази: ціла функція, максимум модуля, максимальний член, центральний індекс, порядок, узагальнений порядок.

Крім того, покладемо

$$G(r,f)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(f)|r^n.$$

За нерівністю Коші $\mu(r,f)\le M(r,f)$, очевидно також, що $M(r,f)\le G(r,f)$.

Зростання кожної цілої функції $f\in\mathcal{H}$ ототожнюємо зі зростанням її логарифма максимуму модуля $\ln M(r,f)$. Добре відомо, що $\ln M(e^x,f)$, а також $\ln\mu(e^x,f)$ і $\ln G(e^x,f)$ є функціями з класу Ω.

Якщо функцію $f\in\mathcal{H}$ задано степеневим рядом (1), задача про безпосереднє описання зростання цієї функції передбачає знаходження максимуму модуля $M(r,f)$ або встановлення певних оцінок для $M(r,f)$, а тому є доволі нетривіальною. Важливим допоміжним засобом у питаннях такого роду є поняття порядку, а також добре відома (див., наприклад, [2, с. 13]) класична формула Адамара

$$\rho(f)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln\frac{1}{|a_n(f)|}},$$

яка дозволяє описати зростання цілої функції f вигляду (1) через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення $(|a_n(f)|)$.

Нехай $\mathcal{F}$ — клас відображень $F:\mathcal{H}\to[0,+\infty]$ таких, що $F(f)=F(g)$ для довільних цілих функцій $f,g\in\mathcal{H}$, послідовності модулів коефіцієнтів степеневих розвинень яких співпадають, тобто $|a_n(f)|=|a_n(g)|$ для довільного $n\in\mathbb{N}_0$. Зауважимо, що якщо $F\in\mathcal{F}$ — деяке фіксоване відображення, то для кожної $f\in\mathcal{H}$ вигляду (1) величина $F(f)$ не залежить від аргументів коефіцієнтів $a_n(f)$. Більше того, розглянувши поряд з функцією f функцію g таку, що $a_n(g)=|a_n(f)|$, $n\in\mathbb{N}_0$, бачимо, що функція g, а тому й величина $F(f)=F(g)$ повністю визначається послідовністю $(|a_n(f)|)$. Зазначимо також, що порядок $\rho=\rho(f)$ є прикладом відображення з класу $\mathcal{F}$.

Зрозуміло, що поняття порядку, яке виникло внаслідок порівняння зростання цілої функції зі зростанням степеневих функцій, є дієвим в основному у випадку $\rho(f)\in(0,+\infty)$. У випадках $\rho(f)=0$ і $\rho(f)=+\infty$ це поняття дає обмежену інформацію щодо зростання цілої функції. Побудові досконаліших шкал зростання цілих функцій, в яких в якості функцій порівняння вибрані відмінні від степеневих чи навіть функції з певних загальних підкласів класу зростаючих функцій, присвячено значну кількість робіт (див. роботи [5]–[7] і бібліографію в них). Характерним в цих дослідженнях було те, що функції порівняння хоч і були досить загальними, але завжди підбирались в такий спосіб, щоб для породженого ними узагальненого порядку можна було встановити аналог формули Адамара, тобто виразити узагальнений порядок кожної цілої функції f вигляду (1) через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення $(|a_n(f)|)$. Однак, як показують результати робіт [3, 4], зростання цілої функції може істотно залежати не лише від модулів, а й від аргументів коефіцієнтів її степеневого розвинення. Використовуючи ці результати, легко навести приклади функцій порівняння таких, що для відповідних узагальнених порядків формули типу Адамара не існують. У зв'язку з цим виникає загальна задача щодо опису функцій зростання, для яких відповідний узагальнений порядок кожної цілої функції f вигляду (1) можна виразити через послідовність $(|a_n(f)|)$. Частково цю задачу розв'язано у даній роботі.

1 Формулювання результатів

Ми розглянемо доволі загальну шкалу зростання цілих функцій, увівши узагальнений порядок цілої функції $f \in \mathcal{H}$ формулою

$$\rho_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln\Phi(\ln r)},$$

де $\Phi \in \Omega$. Така шкала є природною з огляду на те, що для кожної фіксованої $f \in \mathcal{H}$ функція $\ln M(e^x, f)$ належить до класу Ω.

Для довільних функцій $\Phi \in \Omega$ і $f \in \mathcal{H}$ покладемо

$$c_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln\Phi(x)}, \quad d_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln\Phi'_+(x)}{\ln\Phi(x)},$$
$$\varkappa_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln\mu(r,f)}{\ln\Phi(\ln r)} \quad \tau_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln G(r,f)}{\ln\Phi(\ln r)}.$$

Тоді, як легко бачити,

$$c_\Phi \le \varkappa_\Phi(f) \le \rho_\Phi(f) \le \tau_\Phi(f). \tag{2}$$

Крім того, $c_\Phi \in [0,1]$, причому для кожного $c \in [0,1]$ можна навести приклад функції $\Phi \in \Omega$ такої, що $c_\Phi = c$. Ясно також, що $\varkappa_\Phi = \varkappa_\Phi(f)$ і $\tau_\Phi = \tau_\Phi(f)$ — відображення з класу $\mathcal{F}$.

Основним результатом нашої роботи є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

1) $\rho_\Phi = \rho_\Phi(f)$ — відображення з класу $\mathcal{F}$;

2) для довільної $f \in \mathcal{H}$ правильна рівність $\rho_\Phi(f) = \varkappa_\Phi(f)$;

3) для довільної $f \in \mathcal{H}$ правильна рівність $\rho_\Phi(f) = \tau_\Phi(f)$;

4) $d_\Phi \le c_\Phi$.

Врахувавши другу та третю з нерівностей (2), а також той факт, що $G(r,f) = M(r,g)$ для $f, g \in \mathcal{H}$ таких, що $a_n(g) = |a_n(f)|$, $n \in \mathbb{N}_0$, теорему 1 легко довести, використовуючи наступні результати.

Теорема 2. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Якщо $d_\Phi \le c_\Phi$, тоді для довільної цілої функції $f \in \mathcal{H}$ правильна рівність $\tau_\Phi(f) = \varkappa_\Phi(f)$.*

Теорема 3. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Якщо $d_\Phi > c_\Phi$, тоді існує ціла функція $f \in \mathcal{H}$ така, що $\tau_\Phi(f) > \rho_\Phi(f)$.*

З наведених теорем можна зробити такі висновки:

1) якщо $d_\Phi \le c_\Phi$, то для кожної цілої функції $f \in \mathcal{H}$ її узагальнений порядок $\rho_\Phi(f)$ можна виразити через послідовність $(|a_n(f)|)$; формами такого вираження є рівності $\rho_\Phi(f) = \varkappa_\Phi(f)$ чи $\rho_\Phi(f) = \tau_\Phi(f)$;

2) якщо $d_\Phi > c_\Phi$, то існують цілі функції $f, g \in \mathcal{H}$ такі, що $|a_n(f)| = |a_n(g)|$, $n \in \mathbb{N}_0$, і $\rho_\Phi(f) \ne \rho_\Phi(g)$, тобто, узагальнений порядок цілої функції не можна виразити лише через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення.

2 Допоміжні результати

Для функції $f \in \mathcal{H}$ позначимо її центральний індекс через $\nu(r,f) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |a_n(f)|r^n = \mu(r,f)\}$. Добре відомо, що $\nu(r,f) = r(\ln\mu(r,f))'_+$ для всіх $r > 0$. Крім того, правильна така лема [8].

Лема A. *Нехай (n_k) — зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел, а (c_k) — зростаюча до $+\infty$ додатна послідовність. Якщо комплексна послідовність (a_n) така, що $a_0 = \dots = a_{n_0-1} = 0$, $a_{n_0} \neq 0$,*

$$|a_{n_{k+1}}| = |a_{n_0}| \prod_{j=0}^{k} c_j^{n_j - n_{j+1}}$$

і $|a_n| \leq |a_{n_k}| c_k^{n_k - n}$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ і всіх $n \in (n_k, n_{k+1})$, то степеневий ряд (1) з коефіцієнтами $a_n(f) = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, задає цілу функцію $f \in \mathcal{H}$, для якої:

(i) $\nu(r,f) = n_0$ для $r \in (0, c_0)$;
(ii) $\nu(r,f) = n_{k+1}$ для $r \in [c_k, c_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$.

Наступну лему доведено в [1, с. 46].

Лема B. *Нехай $N \in \mathbb{N}$. Існують числа $e_0(N), \dots, e_{n-1}(N) \in \{-1, 1\}$ такі, що*

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N-1} e_j(N) e^{ij\theta} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{2}-1}\sqrt{N}.$$

3 Доведення теорем

Доведення теореми 2. Нехай $\Phi \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}$ — довільна ціла функція вигляду (1) та виконується умова $d_\Phi \leq c_\Phi$. Згідно з (2) досить довести, що $\tau_\Phi(f) \leq \varkappa_\Phi(f)$. Якщо $\varkappa_\Phi(f) = +\infty$ доведення тривіальне. Нехай $\varkappa_\Phi(f) < +\infty$ і $\varkappa$ — довільне число таке, що $\varkappa > \varkappa_\Phi(f)$. З означення величини $\varkappa_\Phi(f)$, умови $d_\Phi \leq c_\Phi$ і першої з нерівностей (2) для всіх $r \geq r_1$ отримуємо

$$\ln\mu(r,f) \leq \Phi^{\varkappa}(\ln r), \quad \ln\Phi'_+(\ln r) \leq \Phi^{\varkappa}(\ln r). \tag{3}$$

Якщо $0 \leq r < R$, тоді

$$G(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \leq \mu(R,f) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = \mu(R,f)\frac{R}{R-r}. \tag{4}$$

Оскільки $\Phi \in \Omega$, то Φ'_+ є неспадною, необмеженою на $[x_0, +\infty)$ функцією, а тому для кожного $r \geq r_2$ маємо $\Phi'_+(\ln r) \geq 1$ та існує

$$R(r) = \sup\left\{R > r : \Phi'_+(\ln R) \leq \frac{r}{R-r}\right\}.$$

Зауважимо, що тоді

$$1 \le \Phi'_-(\ln R(r)) \le \frac{r}{R(r)-r} \le \Phi'_+(\ln R(r)),$$

звідки, отримуємо нерівність $R(r) \le 2r$. Оскільки $\ln x < x-1$ для всіх $x > 1$, то

$$\Phi(\ln R(r)) - \Phi(\ln r) = \int_{\ln r}^{\ln R(r)} \Phi'_-(x)dx \le \Phi'_-(\ln R(r)) \ln\frac{R(r)}{r} < \frac{r}{R(r)-r}\frac{R(r)-r}{r} = 1.$$

Тому, використовуючи нерівності (4) і (3), для всіх $r \ge r_3$ отримуємо

$$\ln G(r,f) \le \ln \mu(R(r),f) + \ln\frac{2r}{R(r)-r}$$
$$\le \Phi^{\varkappa}(\ln R(r)) + \ln \Phi'_+(\ln R(r)) + \ln 2 \le 3(1+\Phi(\ln r))^{\varkappa}.$$

Звідси маємо

$$\tau_\Phi(f) \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln 3 + \varkappa \ln(1+\Phi(\ln r))}{\ln \Phi(\ln r)} = \varkappa.$$

З довільності $\varkappa > \varkappa_\Phi(f)$ випливає, що $\tau_\Phi(f) \le \varkappa_\Phi(f)$. Теорему доведено. □

Доведення теореми 3. Нехай для функції $\Phi \in \Omega$ виконується умова $d_\Phi > c_\Phi$. Доведемо, що існує ціла функція $f \in \mathcal{H}$ така, що $\tau_\Phi(f) > \rho_\Phi(f)$.

Нехай $\delta \in (c_\Phi, d_\Phi)$, а (δ_n) — спадна до 0 фіксована послідовність. Виберемо зростаючу до $+\infty$ послідовність (x_k) так, щоб виконувались наступні умови:

$$\Phi'_+(x_0) > 1; \tag{5}$$
$$x_{k+1} \ge x_k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \tag{6}$$
$$\ln \delta_k = o(\ln \Phi(x_k)), \quad k \to +\infty; \tag{7}$$
$$(\Phi'_+(x_{k+1}))^{\delta_{k+1}} \ge 2(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \tag{8}$$
$$(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} < \ln x_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \tag{9}$$
$$\ln\ln \Phi'_+(x_k) \ge \delta \ln \Phi(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Для всіх $x \in [x_k, x_{k+1})$ і кожного $k \in \mathbb{N}_0$ покладемо $\psi(x) = (\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}$. Нехай

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^{x} \psi(t)dt, \quad x \ge x_0,$$

тоді для всіх $x \in [x_k, x_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\Phi(x) \ge \Phi(x) - \Phi(x_k) = \int_{x_k}^{x} \Phi'_+(t)dt \ge \Phi'_+(x_k)(x-x_k),$$

а тому, використовуючи умову (9), отримуємо

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^{x_k} \psi(t)dt + \int_{x_k}^{x} \psi(t)dt \le \int_{x_0}^{x_k} (\Phi'_+(x_{k-1}))^{\delta_{k-1}}dt + \int_{x_k}^{x} (\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}dt$$
$$\le (x_k - x_0)(\Phi'_+(x_{k-1}))^{\delta_{k-1}} + (x-x_k)(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} \le x_k \ln x_k + (x-x_k)(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}$$
$$= x_k \ln x_k + (x-x_k)^{1-\delta_k}((x-x_k)\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} \le x\ln x + x^{1-\delta_k}\Phi^{\delta_k}(x) \le x(\ln x + \Phi^{\delta_k}(x)).$$

Звідси випливає, що
$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln\Psi(x)}{\ln\Phi(x)}=c_\Phi. \tag{11}$$

Нехай $n_0=0$, $n_{k+1}=[\psi(x_k)]$ і $c_k=e^{x_k}$ для всіх $k\in\mathbb{N}_0$. Тоді $n_1\geq 1$ за умовою (5), $c_{k+1}\geq ec_k$ і $n_{k+1}\geq 2n_k$ для всіх $k\in\mathbb{N}_0$ за умовами (6) і (8) відповідно.

Покладемо $b_0=b_{n_0}=1$, $b_{n_{k+1}}=\prod_{j=0}^{k}c_j^{n_j-n_{j+1}}$ для всіх $k\in\mathbb{N}_0$, якщо $n\in(n_k,n_{k+1})$ і $k\in\mathbb{N}_0$, тоді $b_n=b_{n_k}c_k^{n_k-n}$. Розглянемо степеневий ряд $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$. За лемою A цей ряд задає цілу функцію $g\in\mathcal{H}$ таку, що $\nu(r,g)=n_{k+1}=[\psi(\ln c_k)]=[\psi(\ln r)]$ для всіх $r\in[c_k,c_{k+1})$ і $k\in\mathbb{N}_0$. Отже, $\nu(r,g)=[\psi(\ln r)]$, $r\geq c_0$, а тому $\nu(r,g)\sim\psi(\ln r)$, $r\to+\infty$. За правилом Лопіталя отримаємо $\ln\mu(r,g)\sim\Psi(\ln r)$, $r\to+\infty$. Звідси і з (11) отримуємо, що $\varkappa_\Phi(g)=c_\Phi$.

З умов (7) і (10) випливає, що

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\ln n_{k+1}}{\ln\Phi(\ln c_k)}=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\ln\psi(x_k)}{\ln\Phi(x_k)}=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\ln(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}}{\ln\Phi(x_k)}\geq\delta>c_\Phi. \tag{12}$$

Для $r>0$ і $k\in\mathbb{N}$ матимемо

$$A_k(r)=\sum_{n=0}^{n_k-1}b_nr^n,\quad B_k(r)=\sum_{n=n_k}^{\infty}b_nr^n.$$

Оцінимо зверху $A_k(c_k)$ і $B_{k+1}(c_k)$, для цього скористаємось рівністю

$$\mu(c_k,g)=\mu(c_k-0,g)=b_{n_k}c_k^{n_k},\quad k\in\mathbb{N}_0,$$

яка випливає з неперервності функції $\mu(r,g)$, $r>0$.

Нехай, $k\in\mathbb{N}$ і $n\in[0,n_k-1]$, тоді $n\in[n_m,n_{m+1})$ для деякого $m\leq k-1$, а тому

$$\begin{aligned}b_nc_k^n&=b_{n_m}c_m^{n_m-n}c_k^n=b_{n_k}\prod_{j=m}^{k-1}c_j^{n_{j+1}-n_j}c_m^{n_m-n}c_k^n\leq b_{n_k}\prod_{j=m}^{k-1}c_{k-1}^{n_{j+1}-n_j}c_{k-1}^{n_m-n}c_k^n\\&=b_{n_k}c_{k-1}^{n_k-n}c_k^n=\mu(c_k,g)\left(\frac{c_{k-1}}{c_k}\right)^{n_k-n}\leq\mu(c_k,g)\frac{1}{e^{n_k-n}}.\end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$A_k(c_k)=\sum_{n=0}^{n_k-1}b_nc_k^n<\mu(c_k,g)\sum_{n=0}^{n_k-1}\frac{1}{2^{n_k-n}}<\mu(c_k,g),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

Нехай $k\in\mathbb{N}_0$ і $n\geq n_{k+1}$, $n\in[n_m,n_{m+1})$ для деякого $m\geq k+1$, тоді

$$\begin{aligned}b_nc_k^n&=b_{n_m}c_m^{n_m-n}c_k^n=b_{n_k}\prod_{j=k}^{m-1}c_j^{n_j-n_{j+1}}c_m^{n_m-n}c_k^n\leq b_{n_k}c_k^{n_k-n_{k+1}}c_{k+1}^{n_{k+1}-n}c_k^n\\&=b_{n_k}c_k^{n_k-n_{k+1}+n}c_{k+1}^{n_{k+1}-n}=\mu(c_k,g)\left(\frac{c_k}{c_{k+1}}\right)^{n-n_{k+1}}\leq\mu(c_k,g)\frac{1}{e^{n-n_{k+1}}}.\end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$B_{k+1}(c_k) = \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} b_n c_k^n < \mu(c_k, g) \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} \frac{1}{2^{n-n_{k+1}}} = 2\mu(c_k, g), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Покладемо $N_k = n_{k+1} - n_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ і розглянемо степеневий ряд (1), коефіцієнти якого $a_n(f) = a_n$ визначено наступним чином

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{N_k}} b_n e_{n-n_k}(N_k), \quad n \in [n_k, n_{k+1}),\ k \in \mathbb{N}_0,$$

де $e_0(N_k), \ldots, e_{N_k-1}(N_k) \in \{-1, 1\}$ — числа, існування яких стверджується лемою B при $N = N_k$. Тоді $|a_n| \le b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, а тому ряд (1) задає цілу функцію $f \in \mathcal{H}$.

Зрозуміло, що для цієї функції

$$G(c_k, f) \ge \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n c_k^n = \frac{1}{\sqrt{N_k}} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} b_{n_k} c_k^{n_k - n} c_k^n = \mu(c_k, g)\sqrt{N_k} \ge \sqrt{N_k} \ge \sqrt{\frac{n_{k+1}}{2}}$$

для кожного $k \in \mathbb{N}_0$. Тому, скориставшись оцінкою (12), отримуємо

$$\tau_\Phi(f) \ge \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln\ln G(c_k, g)}{\ln \Phi(\ln c_k)} \ge \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln\ln n_{k+1}}{\ln \Phi(\ln c_k)} \ge \delta > c_\Phi. \tag{15}$$

З іншого боку, використовуючи (13), (14) і лему B, для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$\begin{aligned} M(c_k, f) &\le \sum_{n=0}^{n_k-1} |a_n| c_k^n + \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n c_k^n e^{in\theta} \right| + \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} |a_n| c_k^n \\ &\le A_k(c_k) + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} b_{n_k} c_k^{n_k-n} e_{n-n_k}(N_k) c_k^n e^{in\theta} \right| + B_{k+1}(c_k) \\ &\le \mu(c_k, g) + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \mu(c_k, g) \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N_k-1} e_j(N_k) e^{ij\theta} \right| + 2\mu(c_k, g) \\ &\le 3\mu(c_k, g) + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \mu(c_k, g) \frac{2}{\sqrt{2}-1} \sqrt{N_k} < 8\mu(c_k, g). \end{aligned}$$

Отже, $\ln M(c_k, f) < 3 + \ln \mu(c_k, g)$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки на відрізку $[c_k, c_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$, функція $\ln M(r, f)$ є опуклою, а функція $\ln \mu(r, g)$ — лінійною відносно $\ln r$, то на цьому відрізку функція $h(r) = \ln M(r, f) - \ln \mu(r, g)$ досягає свого максимуму в одній з точок c_k чи c_{k+1}. Тому $\ln M(r, f) \le 3 + \ln \mu(r, g)$ для всіх $r \ge c_1$. Тоді

$$\rho_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln \mu(r, g)}{\ln \Phi(\ln r)} = c_\Phi.$$

Використовуючи дану нерівність та оцінку (15), отримаємо, що $\tau_\Phi(f) > \rho_\Phi(f)$. $\square$

Література

1. Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. — М.: Мир, 1976. — 204 с.
2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функции. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.
3. Филевич П.В. *Неравенства типа Вимана-Валирона для целых и случайных целых функций конечного логарифмического порядка* // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т.42, №3. — С. 683–692.
4. Филевич П.В. *О влиянии аргументов коэффициентов степенного разложения целой функции на рост ее максимума модуля* // Сиб. мат. журн. — 2003. — Т.44, №3. — С. 674–685.
5. Шеремета М.Н. *О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения* // Изв. вузов. Мат. — 1967. — Т.57, №2. — С. 100–108.
6. Шеремета М.Н. *О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений* // Изв. вузов. Мат. — 1968. — Т.73, №6. — С. 115–121.
7. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. — К.: ІСДО, 1993. — 168 с.
8. Filevych P. *On the slow growth of power series convergent in the unit disk*, Mat. Stud., **16**, 2 (2001), 217–221.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна
e-mail: *hlova_taras@ukr.net*
[2] Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій ім. С.З. Гжицького,
Львів, Україна
e-mail: *filevych@mail.ru*

Надійшло 26.03.2012

Hlova T.Ya., Filevych P.V. *The growth of entire functions in the terms of generalized orders*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 28–35.

Let Φ be a convex function on $[x_0,+\infty)$ such that $\frac{\Phi(x)}{x}\to+\infty$, $x\to+\infty$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — a transcendental entire function, let $M(r,f)$ be the maximum modulus of f and let

$$\rho_\Phi(f)=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln\Phi(\ln r)},\quad c_\Phi=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln\Phi(x)},\quad d_\Phi=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln\Phi'_+(x)}{\ln\Phi(x)}.$$

It is proved that for every transcendental entire function f the generalized order $\rho_\Phi(f)$ is independent on the arguments of the coefficients a_n (or defined by the sequence $(|a_n|)$) if and only if the inequality $d_\Phi\le c_\Phi$ holds.

Глова Т.Я., Филевич П.В. *Рост целых функций в терминах обобщенных порядков* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 28–35.

Пусть Φ — такая выпуклая на $[x_0,+\infty)$ функция, что $\frac{\Phi(x)}{x}\to+\infty$, $x\to+\infty$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — трансцендентная целая функция, $M(r,f)$ — максимум модуля f,

$$\rho_\Phi(f)=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln\Phi(\ln r)},\quad c_\Phi=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln\Phi(x)},\quad d_\Phi=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln\Phi'_+(x)}{\ln\Phi(x)}.$$

Доказано, что условие $d_\Phi\le c_\Phi$ является необходимым и достаточным для того, чтобы обобщенный порядок $\rho_\Phi(f)$ каждой трансцендентной целой функции f не зависел от аргументов коэффициентов a_n (или определялся последовательностью $(|a_n|)$).