Карпатські математичні
публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.4, №1

УДК 517.576

Мулява О.М.[1], Шеремета М.М.[2]

# НАЛЕЖНІСТЬ ДО КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ АДАМАРОВИХ КОМПОЗИЦІЙ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Мулява О.М., Шеремета М.М. *Належність до класів збіжності адамарових композицій похідних Гельфонда-Леонтьєва аналітичних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 111–115.

Знайдено умови, за яких з належності до валіронового класу збіжності цілих функцій $f$ і $g$ випливає належність до цього класу похідної Гельфонда-Леонтьєва адамарової композиції функцій $f$ і $g$ та адамарової композиції похідних Гельфонда-Леонтьєва цих функцій. Подібна задача розв'язана для аналітичних в одиничному крузі функцій.

Для степеневого ряду

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$

з радіусом збіжності $R[f]\in[0,\infty]$ і степеневого ряду $l(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} l_k z^k$ з $R[f]\in[0,\infty]$ і $l_k>0$ для всіх $k\ge 0$ степеневий ряд

$$D_l^{(n)}f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_k}{l_{k+n}}f_{k+n}z^k$$

називається [3] похідною Гельфонда-Леонтьєва $n$-го порядку. Якщо $l(z)=e^z$, то $D_l^{(n)}f(z)=f^{(n)}(z)$ є звичайною похідною $n$-го порядку. Зрозуміло, що не завжди радіус збіжності похідної Гельфонда-Леонтьєва ряду (1) збігається з радіусом збіжності цього ряду. Проте в [4, 5] доведено, що для того, щоб для будь-якого ряду (1) рівності $R[f]=+\infty$ і $R[D_l^{(n)}f]=+\infty$ були рівносильними необхідно і досить, щоб

$$0<\varliminf_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}\le\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}<+\infty, \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.
*Ключові слова і фрази:* ціла функція, аналітична в одиничному крузі функція, похідна Гельфонда-Леонтьєва, адамарова композиція.

а для еквівалентності рівностей $R[f]=1$ і $R[D_l^{(n)}f]=1$ необхідною і достатньою є умова

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}=1. \tag{3}$$

Степеневий ряд

$$(f*g)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kg_kz^k$$

називається адамаровою композицією ряду (1) і ряду $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}g_kz^k$. Відомо [6], що $R[f*g]\ge R[f]R[g]$, і обернена нерівність може бути неправильною. Властивості адамарової композиції використовуються для дослідження аналітичного продовження функцій (див., напр., [1, 7]).

Не дивлячись на загальність умов (2) і (3) у наведеному вище твердженні, вони є достатніми для одночасної аналітичності похідної Гельфонда-Леонтьєва адамарової композиції $D_l^{(n)}(f*g)$ функцій $f$ і $g$ та адамарової композиції $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$ їх похідних Гельфонда-Леонтьєва [5], тобто за умови (2) рівносильними є рівності $R[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=+\infty$ і $R[D_l^{(n)}(f*g)]=+\infty$, а за умови (3) такими є рівності $R[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=1$ і $R[D_l^{(n)}(f*g)]=1$.

Якщо $R[f]>0$, то для $0\le r<R[f]$ нехай $M(r,f)=\max\{|f(z)|:\ |z|=r\}$. Для цілої функції $f$ величина $\varrho[f]=\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}$ називається її порядком, а належність $f$ до валіронового класу збіжності визначається умовою [8]

$$\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{\ln M(r,f)}{r^{\varrho+1}}dr<\infty, \tag{4}$$

де $\varrho=\varrho[f]$. Якщо функція $f$ аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D}=\{z:\ |z|<1\}$, то порядок переважно вводять формулою $\varrho^*[f]=\varlimsup\limits_{r\uparrow 1}\dfrac{\ln\ln M(r,f)}{-\ln(1-r)}$, а клас збіжності – умовою [2]

$$\int\limits_{0}^{1}(1-r)^{\varrho-1}\ln^+ M(r,f)dr<\infty, \tag{5}$$

де $\varrho=\varrho^*[f]$. Зростання функцій $D_l^{(n)}f$, $D_l^{(n)}(f*g)$ та $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$ у термінах порядку (і нижнього порядку) досліджено в [4]. З іншого боку, в статті [5] вказано умови на функцію $l$, за яких $f$ і $D_l^{(n)}f$ належать до одного і того ж з означених вище класів збіжності. Тут дослідимо належність до відповідних класів збіжності функцій $D_l^{(n)}(f*g)$ та $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$.

Почнемо з цілих функцій. Для $\varrho\in(0,+\infty)$ через $V\{\varrho\}$ позначимо клас цілих функцій, для яких виконується умова (4).

**Теорема 1.** *Якщо $f\in V\{\varrho_1\}$ і $g\in V\{\varrho_2\}$, то за умови (2) $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g\in V\left\{\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}\right\}$ і $D_l^{(n)}(f*g)\in V\left\{\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}\right\}$ для кожного $n\ge 0$.*

*Доведення.* Оскільки $f$ і $g$ — цілі функції, то з умови (2) випливає, що і функції $D_l^{(n)}(f*g)$ та $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$ є цілими. Більш того [4], за умови (2) правильні рівності $\varrho[D_l^{(n)}f]=\varrho[f]$ і $\varrho[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=\varrho[D_l^{(n)}(f*g)]=\varrho[f*g]$.

Зауважимо, що, використовуючи формулу Адамара для знаходження порядку, маємо $\dfrac{1}{\varrho[f]}=\varliminf\limits_{k\to\infty}\dfrac{-\ln|f_k|}{k\ln k}$, звідки легко випливає, що $\dfrac{1}{\varrho[f*g]}\geq\dfrac{1}{\varrho[f]}+\dfrac{1}{\varrho[g]}$, тобто $\varrho[f*g]\leq\dfrac{\varrho[f]\varrho[g]}{\varrho[f]+\varrho[g]}$ (обернена нерівність може бути неправильною). Тому, якщо $f\in V\{\varrho_1\}$ і $g\in V\{\varrho_2\}$, то $\varrho[D_l^{(n)}(f*g)]\leq\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}$ і $\varrho[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]\leq\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}$.

Далі, в [5] доведено, що за умови (2) ціла функція $f$ належить до валіронового класу збіжності тоді і тільки тоді, коли до цього класу належить її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(n)}f$. Звідси і з (4) випливає, що $\int\limits_{r_0}^{\infty}\dfrac{\ln M(r,D_l^{(n)}f)}{r^{\varrho+1}}dr<\infty$ і, тим паче, $\int\limits_{r_0}^{\infty}\dfrac{\ln M(r,f^{(n)})}{r^{\varrho+1}}dr<\infty$ для кожного $n>0$.

З наведених вище тверджень випливає, що за умов теореми 1 досить довести, що $f*g\in V\left\{\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}\right\}$.

Нехай $\mu(r,f)=\max\{|f_k|r^k:\,k\geq0\}$ — максимальний член ряду (1). Добре відомо, і це легко показати, що в умові (4) замість $\ln M(r,f)$ можна поставити $\ln\mu(r,f)$. Оскільки

$$\begin{aligned}\mu(r,f*g)=\max\{|f_kg_k|r^k:\,k\geq0\}&=\max\{|f_k|r^{\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)}|g_k|r^{\varrho_1/(\varrho_1+\varrho_2)}:\,k\geq0\}\\&\leq\mu(r^{\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)},f)\mu(r^{\varrho_1/(\varrho_1+\varrho_2)},g),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(r,f*g)}{r^{\varrho_1\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)+1}}dr&\leq\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(r^{\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)},f)}{r^{\varrho_1\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)+1}}dr+\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(r^{\varrho_1/(\varrho_1+\varrho_2)},g)}{r^{\varrho_1\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)+1}}dr\\&=\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_2}\int\limits_{t_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(t,f)}{t^{\varrho_1+1}}dr+\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1}\int\limits_{t_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(t,g)}{t^{\varrho_2+1}}dr,\end{aligned}$$

звідки легко випливає, що, якщо $f\in V\{\varrho_1\}$ і $g\in V\{\varrho_2\}$, то $f*g\in V\left\{\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}\right\}$. $\square$

Для аналітичних функцій в одиничному крузі ситуація дещо складніша. По-перше, з того, що $R[f]=R[g]=1$ випливає тільки нерівність $R[f*g]\geq1$. Рівність $R[f*g]=1$, матимемо, якщо додатково припустимо, що $\varlimsup\limits_{k\to\infty}|f_kg_k|>0$. По-друге, в [4] доведено, що за умови

$$0<\varliminf_{k\to\infty}\frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}}\leq\varlimsup_{k\to\infty}\frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}}<+\infty,\tag{6}$$

для аналітичної в $\mathbb{D}$ функції (1) $\varrho^*[D_l^{(n)}f]=\varrho^*[f]$, а належність до визначеного умовою (5) класу збіжності похідної Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(1)}f$ в [5] доведено за значно сильнішої умови $0<\varliminf\limits_{k\to\infty}\dfrac{l_k}{l_{k+1}}\leq\varlimsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{l_k}{l_{k+1}}<+\infty$. Тому нам потрібна така лема.

**Лема 1.** *Якщо послідовність $(l_k)$ задовольняє умову (6), то аналітична в $\mathbb{D}$ функція $f$ належить до класу збіжності, визначеного умовою (5), тоді і тільки тоді, коли до цього класу збіжності належить її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(1)}f$.*

*Доведення.* З інтегральної формули Коші $f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\tau-z|=(1-|z|)/2}\dfrac{f(\tau)d\tau}{(\tau-z)^2}$ отримуємо нерівність $M(r,f') \le \dfrac{2}{1-r}M\left(\dfrac{1+r}{2},f\right)$, а з огляду на формулу Лейбніца-Ньютона $f(z)=\int\limits_0^z f'(\tau)d\tau + f(0)$ маємо $M(r,f)\le M(r,f')+|f(0)|$. Звідси випливає, що в (6) замість $M(r,f)$ можна поставити $M(r,f')$ і, отже, максимальний член $\mu(r,f')$ степеневого розвинення похідної $f'$. Оскільки з умови (6) випливає, що $0<h_1\mu(r,f')\le\mu(r,D_l^{(1)}f)\le h_2\mu(r,f')<+\infty$, то лему 1 доведено. $\square$

Вважаючи, що $R[f*g]=1$, як показано в [4], за умови (6) маємо рівності $\varrho^*[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=\varrho^*[D_l^{(n)}(f*g)]=\varrho^*[f*g]$.

Для порядку $\varrho^*[f]$ аналітичної в одиничному крузі функції (1) правильна формула $\dfrac{\varrho^*[f]}{\varrho^*[f]+1}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^+\ln^+|f_n|}{\ln n}$. З цієї формули легко випливає, що $\dfrac{\varrho^*[f*g]}{\varrho^*[f*g]+1}\le \max\left\{\dfrac{\varrho^*[f]}{\varrho^*[f]+1},\dfrac{\varrho^*[g]}{\varrho^*[g]+1}\right\}$, а оскільки функція $x/(x+1)$ зростаюча, то $\varrho^*[f*g]\le\max\{\varrho^*[f],\,\varrho^*[g]\}$ (обернена нерівність у загальному неправильна). Тому через $W\{\varrho\}$ позначимо клас аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій, для яких виконується умова (5).

**Теорема 2.** *Нехай $f\in W\{\varrho_1\}$ і $g\in W\{\varrho_2\}$. Якщо $\varlimsup\limits_{k\to\infty}|f_kg_k|>0$, то за умови (6) $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g\in W\{\max\{\varrho_1,\,\varrho_2\}\}$ і $D_l^{(n)}(f*g)\in W\{\max\{\varrho_1,\,\varrho_2\}\}$ для кожного $n\ge 0$.*

*Доведення.* З огляду на наведені вище твердження, як і в доведенні теореми 1, досить дослідити належність до $W\{\max\{\varrho_1,\,\varrho_2\}\}$ функції $\ln\,\mu(r,f*g)$.

Оскільки $\mu(r,f*g)\le\mu(\sqrt{r},f)\mu(\sqrt{r},g)$, то

$$\int\limits_0^1(1-r)^{\max\{\varrho_1,\varrho_2\}-1}\ln^+\,\mu(r,f*g)dr\le\int\limits_0^1(1-r)^{\varrho_1-1}\ln^+\,\mu(\sqrt{r},f)dr$$

$$+\int\limits_0^1(1-r)^{\varrho_2-1}\ln^+\,\mu(\sqrt{r},g)dr+\int\limits_0^1(1-r)^{\max\{\varrho_1,\varrho_2\}-1}\ln\,2dr$$

$$=\int\limits_0^1 2r(1-r^2)^{\varrho_1-1}\ln^+\,\mu(r,f)dr+\int\limits_0^1 2r(1-r^2)^{\varrho_2-1}\ln^+\,\mu(r,g)dr+\mathrm{const}$$

$$\le 2^{\varrho_1}\int\limits_0^1(1-r)^{\varrho_1-1}\ln^+\,\mu(r,f)dr+2^{\varrho_1}\int\limits_0^1(1-r)^{\varrho_2-1}\ln^+\,\mu(r,g)dr+\mathrm{const},$$

тобто теорему 2 доведено. $\square$

## Література

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. — М.: Наука, 1967. — 239 с.
2. Галь Ю.М, Шеремета М.Н. *Принадлежность аналитических функций классу сходимости* // Докл. АН УССР, сер. А. — 1985. — №7. — С. 11–14.
3. Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб. — 1957. — Т.23, №3. — С. 477–500.
4. Луговая Л.Л., Мулява О.М., Шеремета М.Н. *Свойства адамаровских композиций производных Гельфонда-Леонтьева аналитических функций* // Уфимский матем. журн. — 2010. — Т.2, №2. — С. 90–101.
5. Мулява О.М., Шеремета М.М. *Про належність похідної Гельфонда-Леонтьева до класу збіжнсті* // Наук. вісник Чернівецьк. у-ту. — 2009. — Вип. 485. — С. 71–77.
6. Hadamard J. *Theoreme sur le series entieres*, Acta math., **22**, (1899), 55–63.
7. Hadamard J. *La serie de Taylor et son prolongement analytique*, Scientia phys.-math., **12**, (1901), 42–63.
8. Valiron G. General theory of integral functions, Toulouse, 1923.


[1] Національний університет харчових технологій,
Київ, Україна
e-mail: *info@nuft.edu.ua*

[2] Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: *m_m_sheremeta@list.ru*

*Надійшло 20.02.2012*

---

Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Belonging to convergence classes of Hadamard compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 111–115.

The conditions are found, under which the belonging to Valiron convergence class of entire functions $f$ and $g$ implies the belonging to this class of Gelfond-Leont'ev derivative of Hadamard composition of functions $f$ and $g$ and of Hadamard composition of Gelfond-Leont'ev derivatives of these functions. Analogous problem is solved for analytic functions in the unit disk.

Мулява О.М., Шеремета М.Н. *Принадлежность классам сходимости адамаровских композиций производных Гельфонда-Леонтьева аналитических функций* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 111–115.

Найдены условия, при выполнении которых из принадлежности валироновскому классу сходимости целых функций $f$ и $g$ вытекает принадлежность этому классу производной Гельфонда-Леонтьева адамаровской композиции функций $f$ и $g$ и адамаровской композиции производных Гельфонда-Леонтьева этих функций. Аналогичная задача решена для аналитических в единичном круге функций.