Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 512.538

Семенчук А.В.

ПАРАДЕТЕРМІНАНТИ ТА ФОРМАЛЬНІ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІ РЯДИ

Семенчук А.В. *Парадетермінанти і формальні експоненціальні ряди // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 85–91.

При допомозі парадетермінантів трикутних матриць досліджуються формальні експоненціальні та логарифмічні ряди.

Вступ

Центральним методом комбінаторного аналізу є метод генератрис [1], [3], який базується на формальних операціях з формальними степеневими рядами. Сьогодні відомі ефективні рекурсивні алгоритми таких операцій (див. [2], стор. 569–582), проте вони не дозволяють знайти явного вигляду загальних членів їх результатів. Застосування апарату парадетермінантів трикутних матриць до дослідження формальних операцій з рядами [4] дозволяє заповнити вказану прогалину.

В багатьох випадках розв'язання задач переліку в комбінаторному аналізі істотно спрощується, якщо в ролі генератриси використовуються експоненціальні чи логарифмічні формальні степеневі ряди.

Метою цієї статті є застосування апарату парадетермінантів та параперманентів трикутних матриць до дослідження операцій з формальними експоненціальними та логарифмічними степеневими рядами.

1 Операції з експоненціальними формальними степеневими рядами

Нехай $A(z)$, $B(z)$, $X(z)$ – відповідні позначення формальних факторіальних степеневих рядів:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{z^i}{i!},\ \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{z^i}{i!},\ \sum_{i=0}^{\infty} x_i \frac{z^i}{i!},\ a_0 = b_0 = x_0 = 1.$$

Тоді справедливе наступне твердження:

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.

© Семенчук А.В., 2009

Твердження 1.1. *Якщо*

$$X(z)=\frac{A(z)}{B(z)}, \tag{1}$$

то

$$x_i=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(a_{i-j}-b_{i-j})\cdot\left\langle\frac{(j-r+1)}{(s-r+1)}\cdot\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j},\ i=1,2,\ldots. \tag{2}$$

Тут і нижче ми вважаємо, що

$$\left\langle\frac{(0-r+1)}{(s-r+1)}\cdot\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant 0}=1,\ i=1,2,\ldots.$$

Доведення. Із рівності (1) випливає справедливість системи рівнянь

$$a_i=\binom{i}{0}b_i+\binom{i}{1}x_1b_{i-1}+\ldots+\binom{i}{i-1}x_{i-1}b_1+\binom{i}{i}x_i,\ i=1,2,\ldots$$

Доведемо, що розв'язком цієї системи рівнянь є x_i, що задається рівністю (2).

Очевидно, що при $i=1$ твердження – істинне. Доведемо його істинність при $i=m+1$, якщо при $i=1,2,\ldots,m$ воно – істинне. Нехай

$$\left\langle\frac{(j-r+1)}{(s-r+1)}\cdot\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j}=B_j,$$

тоді

$$\begin{gathered}
x_{m+1}=a_{m+1}-b_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\binom{i}{m+1}b_{m-i+1}\cdot x_i=\\
a_{m+1}-b_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\binom{i}{m+1}b_{m-i+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(a_{i-j}-b_{i-j})\cdot B_j=\\
a_{m+1}-b_{m+1}-(a_m-b_m)b_1B_0\binom{m}{0}\binom{m+1}{m}+\\
(a_{m-1}-b_{m-1})(b_1B_1\binom{m}{1}\binom{m+1}{m}-b_2B_0\binom{m-1}{0}\binom{m+1}{m-1})-\ldots+\\
(-1)^m(a_1-b_1)(b_1B_{m-1}\binom{m}{m-1}\binom{m+1}{m}-\\
b_2B_{m-2}\binom{m-1}{m-2}\binom{m+1}{m-1}+\ldots+(-1)^{m-1}b_mB_0\binom{1}{0}\binom{m+1}{1}=\\
(a_{m+1}-b_{m+1})B_0-\binom{m+1}{0}(a_m-b_m)B_1+\ldots+(-1)^m\binom{m+1}{m}(a_1-b_1)B_m=\\
\textstyle\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m+1}{j}(a_{m-j+1}-b_{m-j+1})B_j.
\end{gathered}$$

□

Твердження 1.2. *Якщо* $X(z)=\frac{1}{A(z)}$, *то*

$$x_i=(-1)^i\left\langle\frac{(i-r+1)}{(s-r+1)}\cdot\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i},\ i=1,2,\ldots. \tag{3}$$

Доведення. З рівності $X(z)=\frac{1}{A(z)}$ випливає система рівнянь

$$\binom{i}{0}a_i+\binom{i}{1}a_{i-1}x_1+\ldots+\binom{i}{i-1}a_1x_{i-1}+\binom{i}{i}x_i=0,\ i=1,2,\ldots.$$

Розв'язком цієї системи є x_i з рівності (3). Покажемо це. При $i = 1$ твердження, очевидно, істинне. Доведемо його істинність при $i = m + 1$, якщо при $i = 1, 2, \ldots, m$ воно – істинне.

Нехай

$$\left\langle \frac{(i-r+1)}{(s-r+1)} \cdot \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i} = A_i,$$

тоді

$$\begin{gathered} x_{m+1} = -a_{m+1} - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} a_{m-i+1} \cdot x_i = \\ -a_{m+1} - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} a_{m-i+1} (-1)^i A_i = \\ -a_{m+1} - \binom{m+1}{1} a_m A_1 - \binom{m+1}{2} a_{m-1} A_2 + \ldots - (-1)^m \binom{m+1}{m} a_1 A_{m+1} = \\ (-1)^{m+1} A_{m+1}. \end{gathered}$$

□

Таким чином, справедлива тотожність

$$\frac{1}{A(z)} = 1 - \langle a_1 \rangle \cdot \frac{z^1}{1!} + \left\langle \begin{matrix} 2a_1 & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{matrix} \right\rangle \cdot \frac{z^2}{2!} - \ldots + (-1)^i \left\langle \begin{matrix} ia_1 & & & \\ \frac{ia_2}{a_1} & (i-1)a_1 & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \cdots & a_1 \end{matrix} \right\rangle \cdot \frac{z^i}{i!} + \ldots.$$

Теорема 1. *Якщо* $X(z) = (A(z))^p$, *тут*

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{z^i}{i!},$$

а p *– деяке дійсне число, то*

$$\begin{gathered} x_n = (-1)^n \left\langle \frac{(i-j+1)\cdot p - (j-1)}{(i-j)\cdot p - j} \cdot \frac{(n-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \\ \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot p - (j-1)}{(i-j)\cdot p - j} \cdot \frac{(n-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} \end{gathered} \tag{4}$$

Доведення. Рівність парадетермінанта і параперманента в рівностях (4) доводиться винесенням із кожного стовпця парадетермінанта за його межі спільного множника (-1) і застосуванням теореми про зв'язок параперманента і парадетермінанта. Розкладемо параперманент із рівності (4) при $n = k + 1$ за елементами останнього рядка. При цьому отримаємо рівність (4) при $n = k$. □

Наслідок 1.1. *Справедливі наступні комбінаторні тотожності:*

$$(A(z))^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1)\cdot n - (j-1)}{(i-j)\cdot n - j} \cdot \frac{(k-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot \frac{z^k}{k!} =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot n - (j-1)}{(i-j)\cdot n - j} \cdot \frac{(k-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

$$(A(z))^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1)\cdot n + (j-1)}{(i-j)\cdot n + j} \cdot \frac{(k-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot \frac{z^k}{k!} =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot n + (j-1)}{(i-j)\cdot n + j} \cdot \frac{(k-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

$$(A(z))^{\frac{1}{n}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left\langle \frac{-(i-j+1) + (j-1)\cdot n}{-(i-j) + j\cdot n} \cdot \frac{(k-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot \frac{z^k}{k!} =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{-(i-j+1) + (j-1)\cdot n}{-(i-j) + j\cdot n} \cdot \frac{(k-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

$$(A(z))^{-\frac{1}{n}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1) + (j-1)\cdot n}{(i-j) + j\cdot n} \cdot \frac{(k-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot \frac{z^k}{k!} =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1) + (j-1)\cdot n}{(i-j) + j\cdot n} \cdot \frac{(k-j+1)}{(i-j+1)} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

в яких n – натуральне число.

Доведення. Для доведення цих тотожностей достатньо в рівності (4) замінити p відповідно на вирази: $n,\ -n,\ \frac{1}{n},\ -\frac{1}{n}$. □

2 Операції з логарифмічними формальними степеневими рядами

Розглянемо деякі операції з формальними логарифмічними степеневими рядами. Нехай $A(z)$, $B(z)$, $X(z)$ – відповідні позначення формальних степеневих рядів:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{z^i}{i},\ \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{z^i}{i},\ \sum_{i=0}^{\infty} x_i \frac{z^i}{i},\ a_0 = b_0 = x_0 = 1.$$

Тоді справедливе наступне твердження:

Твердження 2.1. *Якщо*

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \tag{5}$$

то

$$x_i = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j \cdot \frac{i}{(i-j)} \cdot (a_{i-j} - b_{i-j}) \cdot \left\langle \frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)} \cdot \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j},\ i = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Тут, як і в випадку експоненціальних рядів, ми вважаємо, що

$$\left\langle \frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)} \cdot \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant 0} = 1,\ i = 1, 2, \ldots.$$

Доведення. Із рівності (5) випливає справедливість системи рівнянь

$$a_i = b_i + \frac{i}{1(i-1)} \cdot x_1 b_{i-1} + \ldots + \frac{i}{(i-1)1} \cdot x_{i-1} b_1 + x_i, \ i = 1, 2, \ldots$$

Доведемо, що розв'язком цієї системи рівнянь є x_i, що задається рівністю (6).

Очевидно, що при $i = 1$ твердження – істинне. Доведемо його істинність при $i = m+1$, якщо при $i = 1, 2, \ldots, m$ воно – істинне. Нехай

$$\left\langle \frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)} \cdot \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant j} = B_j,$$

тоді

$$\begin{gathered}
x_{m+1} = a_{m+1} - b_{m+1} - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \frac{m+1}{i \cdot (m-i+1)} \cdot b_{m-i+1} \cdot x_i = \\
a_{m+1} - b_{m+1} - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \frac{m+1}{i \cdot (m-i+1)} \cdot b_{m-i+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \cdot \frac{i}{(i-j)} \cdot (a_{i-j} - b_{i-j}) \cdot B_j = \\
a_{m+1} - b_{m+1} - (a_m - b_m) b_1 B_0 \cdot \tfrac{m}{m} \cdot \tfrac{m+1}{m} + \\
(a_{m-1} - b_{m-1})(b_1 B_1 \cdot \tfrac{m}{m-1} \cdot \tfrac{m+1}{m} - b_2 B_0 \cdot \tfrac{m-1}{m-1} \cdot \tfrac{m+1}{(m-1) \cdot 2}) - \ldots + \\
(-1)^m (a_1 - b_1)(b_1 B_{m-1} \cdot \tfrac{m}{1} \cdot \tfrac{m+1}{m} - \\
b_2 B_{m-2} \cdot \tfrac{m-1}{1} \cdot \tfrac{m+1}{(m-1) \cdot 2} + \ldots + (-1)^{m-1} b_m B_0 \cdot \tfrac{1}{1} \cdot \tfrac{m+1}{m}) = \\
(a_{m+1} - b_{m+1}) B_0 - \tfrac{m+1}{1} \cdot (a_m - b_m) B_1 + \ldots + (-1)^m \cdot \tfrac{m+1}{m} \cdot (a_1 - b_1) B_m = \\
\textstyle\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \cdot \frac{m+1}{(m-j+1)} \cdot (a_{m-j+1} - b_{m-j+1}) B_j.
\end{gathered}$$

□

Твердження 2.2. *Якщо* $X(z) = \frac{1}{A(z)}$, *то*

$$x_i = (-1)^i \cdot i \cdot \left\langle \frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)} \cdot \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i}, \ i = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Доведення. З рівності $X(z) = \frac{1}{A(z)}$ випливає система рівнянь

$$a_i + \frac{i}{1(i-1)} \cdot a_{i-1} x_1 + \ldots + \frac{i}{(i-1)1} \cdot a_1 x_{i-1} + x_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots.$$

Розв'язком цієї системи є x_i з рівності (7). Покажемо це. При $i = 1$ твердження, очевидно, істинне. Доведемо його істинність при $i = m+1$, якщо при $i = 1, 2, \ldots, m$ воно – істинне.

Нехай

$$\left\langle \frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)} \cdot \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i} = A_i,$$

тоді

$$\begin{gathered}
x_{m+1} = -a_{m+1} - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \frac{m+1}{m-i+1} \cdot a_{m-i+1} \cdot x_i = \\
-a_{m+1} - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \frac{m+1}{m-i+1} \cdot a_{m-i+1} \cdot (-1)^i \cdot i \cdot A_i = \\
-a_{m+1} + \tfrac{m+1}{m} \cdot a_m A_1 - \tfrac{m+1}{m-1} \cdot a_{m-1} \cdot 2 \cdot A_2 + \ldots - (-1)^m \cdot \tfrac{m+1}{1} \cdot a_1 \cdot m \cdot A_{m+1} = \\
(-1)^{m+1} \cdot (m+1) \cdot A_{m+1}.
\end{gathered}$$

□

Таким чином, справедлива тотожність

$$\frac{1}{A(z)}=1-\langle a_1\rangle\cdot\frac{z^1}{1}+2\cdot\left\langle\begin{matrix} a_1 & \\ \frac{a_2}{2a_1} & a_1\end{matrix}\right\rangle\cdot\frac{z^2}{2}-\ldots+(-1)^i\cdot i\cdot\left\langle\begin{matrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{2a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{(i-1)a_i}{ia_{i-1}} & \frac{(i-2)a_{i-1}}{(i-1)a_{i-2}} & \cdots & a_1\end{matrix}\right\rangle_i\cdot\frac{z^i}{i}+\ldots.$$

Теорема 2. *Якщо* $X(z)=(A(z))^p$, *тут*

$$A(z)=1+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\frac{z^i}{i},$$

а p *– деяке дійсне число, то*

$$x_n=(-1)^n\cdot n\cdot\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot p-(j-1)}{(i-j)\cdot p-j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}= \tag{8}$$
$$n\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot p-(j-1)}{(i-j)\cdot p-j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Доведення. Рівність парадетермінанта і параперманента в рівностях (8) доводиться винесенням із кожного стовпця парадетермінанта за його межі спільного множника (-1) і застосуванням теореми про зв'язок параперманента і парадетермінанта. Розкладемо параперманент із рівності (8) при $n=k+1$ за елементами останнього рядка. При цьому отримаємо рівність (8) при $n=k$. □

Наслідок 2.1. *Справедливі наступні комбінаторні тотожності:*

$$(A(z))^n=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k}=$$
$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\cdot k\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k},$$

$$(A(z))^{-n}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot n+(j-1)}{(i-j)\cdot n+j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k}=$$
$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\cdot k\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot n+(j-1)}{(i-j)\cdot n+j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k},$$

$$(A(z))^{\frac{1}{n}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\left\langle\frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{-(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k}=$$
$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\cdot k\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{-(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k},$$

$$(A(z))^{-\frac{1}{n}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\left\langle\frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k}=$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\cdot k\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k},$$

в яких n – натуральне число.

Доведення. Для доведення цих тотожностей достатньо в рівності (8) замінити p відповідно на вирази: $n,\ -n,\ \frac{1}{n},\ -\frac{1}{n}$. □

Література

1. Айгнер М. *Комбинаторная теория.* — М.: Мир. — 1982. — 558 с.
2. Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ, т.2: Получисельные алгоритмы.* — М.: Мир. — 1978.
3. Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика* — М.: Мир. — 1990. — 440 с.
4. Zatorsky R.A. *Theory of paradeterminants and its applications* // Algebra and Diskrete Mathematics. **1** (2007), 109–138.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 12.11.2008

Semenchuk A.V. *Paradeterminants and formal exponential series*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 85–91.

Formal exponential and logarithmic series using triangular matrices are investigated.

Семенчук А.В. *Парадетерминанты и формальные экспоненциальные ряды // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 85–91.

При помощи парадетерминантов треугольных матриц исследуются формальные экспоненциальные и логарифмические ряды.