Карпатські математичні
публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.1, No.1

УДК 517.98+517.982.4

Соломко А.В.

ОКРЕМИЙ ВИПАДОК ОПЕРАТОРНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ З НОСІЯМИ В КОНУСІ

Соломко А.В. *Окремий випадок операторного числення для узагальнених функцій з носіями в конусі // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 92–99.

В цій роботі узагальнюється побудова функціонального числення для сильно неперервних напівгруп операторів в алгебрі розподілів Шварца на довільний конус. Досліджується окремий випадок векторнозначного числення на основі модифікації операторного перетворення Фур'є.

1 Термінологія, основні позначення та додаткові твердження

В статті [2] побудовано функціональне числення від генераторів n-параметричних (C_o)-напівгруп операторів в алгебрі узагальнених функцій з носіями в додатному n-вимірному куті. В цій роботі узагальнюється функціональне числення на довільний конус і розглядається окремий випадок векторнозначного операторного числення на основі модифікації формули операторного перетворення Фур'є.

Введемо допоміжні позначення та твердження, які використовуються в даній статті. Розглянемо класичну двоїстість $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$. Як звичайно, $D(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційованих функцій $\varphi(t)$ з компактними носіями $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n$, $D'(\mathbb{R}^n)$ – спряжений до $D(\mathbb{R}^n)$ простір лінійних неперервних функціоналів, введений Л. Шварцом в [8, 9]. Позначимо через Γ – довільний замкнений гострий тілесний конус. Всюди далі D'_Γ – підпростір в $D'(\mathbb{R}^n)$ тих розподілів f, носії яких $\operatorname{supp} f$ містяться в Γ. Поляра підпростору D'_Γ відносно класичної двоїстості $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$ має вигляд

$$(D'_\Gamma)^o = \{\varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma\}.$$

Білінійна форма $D'_\Gamma \times D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o \ni (f, \varphi_\Gamma) \to \langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \varphi_\Gamma$, індукована двоїстістю $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$, ставить простори D'_Γ і $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$ у двоїстість, де через $\varphi_\Gamma \in D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$ позначаємо клас еквівалентності з представником $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Якщо відповідно $\lambda_\Gamma(t) = \begin{cases} 1, \ t \in \Gamma, \\ 0, \ t \notin \Gamma, \end{cases}$ $\varrho : \varphi \to \varphi_\Gamma := \lambda_\Gamma \cdot \varphi$ є характеристичною функцією

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.

конуса Γ і оператором множення на неї, то фактор-відображення $D(\mathbb{R}^n) \to D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$ реалізується формулою:

$$\varrho : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \to \varphi_\Gamma \in D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$$

і обернене відображення $\varrho^{-1} : D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o \ni \varphi_\Gamma \to \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ є багатозначним лінійним відображенням.

Визначимо множину Γ_ν як перетин довільного конуса Γ із замкненою кулею радіуса ν і поставимо у відповідність кожній множині Γ_ν простір функцій

$$D_{\Gamma_\nu} = \{\psi(\tau) = \lambda_\Gamma(t)\varphi(t), \varphi(t) \in D(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \cap \Gamma \subset \Gamma_\nu\}.$$

Зрозуміло, що $\operatorname{supp}\psi \subset \Gamma_\nu$ для кожної функції $\psi \in D_{\Gamma_\nu}$. Топологію в D_{Γ_ν} задаємо за допомогою норм

$$\|\psi\|_{\nu,m} = \sum_{|k|\le m} \frac{1}{k!} \sup_{\tau\in\Gamma_\nu} |\partial^k \psi(\tau)|,$$

де $\partial^k = \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n}$, $\partial_j^{k_j} = \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. При $\nu < \mu$ вкладення $D_{\Gamma_\nu} \subset D_{\Gamma_\mu}$ є неперервними, тому можна визначити індуктивну границю

$$D_\Gamma = \bigcup_\nu D_{\Gamma_\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\operatorname{ind} D_{\Gamma_\nu}.$$

В статті [1] доведено, що простори D_Γ і $D(\mathbb{R})/(D'_\Gamma)^o$ є топологічно ізоморфними.

Надалі будемо розглядати дуальну пару $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma\rangle$, де D_Γ – простір функцій, означений вище. В статті [1] доведено, що простір D_Γ є монтелевим, борнологічним (LF)-простором. Ядерність просторів дуальної пари $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma\rangle$ доведено в роботі [4]. Відомо також (див. [4]), що простір D'_Γ є алгеброю відносно операції згортки.

Перетворення Фур'є простору $D(\mathbb{R}^n)$ визначаємо за формулою

$$\mathcal{F} : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \to \widehat{\varphi}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) e^{-i(t,\xi)} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Фур'є-образ простору $D(\mathbb{R}^n)$ позначаємо через $\widehat{D}(\mathbb{R}^n) = \{\widehat{\varphi} : \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}$.

Визначимо фактор-відображення

$$\widehat{\varrho} : \widehat{D}(\mathbb{R}^n) \ni \widehat{\varphi} \to \widehat{\varphi}_\Gamma, \quad \widehat{D}_\Gamma := \widehat{D}(\mathbb{R}^n)/\widehat{\operatorname{Ker}\varrho},$$

де $\widehat{\operatorname{Ker}\varrho} := \mathcal{F}((D'_\Gamma)^o)$. В [3] доведено, що оператор $F = \widehat{\varrho}\circ\mathcal{F}\circ\varrho^{-1}$ є лінійним і неперервним з простору D_Γ на простір $\widehat{D}_\Gamma$. Зауважимо, що на Фур'є-образ $\widehat{D}_\Gamma$ переносяться основні топологічні властивості простору D_Γ, тобто $\widehat{D}_\Gamma$ – бочковий, монтелевий і борнологічний (LF)-простір. Обернене перетворення Фур'є на просторі $\widehat{D}_\Gamma$ існує і зображається у вигляді $F^{-1} \circ \widehat{\varrho} = \varrho \circ \mathcal{F}^{-1}$, де $\mathcal{F}^{-1} : \widehat{D}(\mathbb{R}^n) \to D(\mathbb{R}^n)$ – обернене відображення до $\mathcal{F}$.

Спряжене до оберненого перетворення Фур'є

$$F^* := (2\pi)^n (F^{-1})' : D'_\Gamma \ni f \to \widehat{f} \in \widehat{D}'_\Gamma, \tag{1}$$

де через $\widehat{D}'_\Gamma$ позначено його образ з відповідною індукованою топологією простору D'_Γ, визначаємо співвідношенням

$$\langle \widehat{f}(\xi),\, \widehat{\varphi}_\Gamma(\xi)\rangle = (2\pi)^n \langle f(s),\, \varphi_\Gamma(s)\rangle, \varphi_\Gamma \in D_\Gamma,\, s \in \Gamma,\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Зазначимо, що формула (2) разом із відображенням (1) визначає нову дуальну пару $\langle \widehat{D}'_\Gamma,\, \widehat{D}_\Gamma\rangle$, крім того простір $\widehat{D}'_\Gamma$ є алгеброю відносно звичайної поточкової операції множення (див. [3]).

2 Побудова операторного числення

Розглядаємо комплексний банаховий простір $\{\mathcal{Y}, \|\cdot\|\}$ і простір $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ – фінітних нескінченно диференційованих $\mathcal{Y}$-значних функцій $x(t)$ з носіями в конусі Γ з топологією, що визначається набором норм

$$\|x\|_m = \sum_{|k|\le m} \frac{1}{k!} \sup_{t\in\Gamma} \|\partial^k x(t)\|.$$

З ядерності простору D_Γ та відомої теореми Гротендіка [7] про представлення тензорного добутку двох повних просторів, один з яких є ядерним, буде випливати топологічний ізоморфізм просторів $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ та $\mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_\Gamma$, де $\widetilde{\otimes}$ – поповнення тензорного добутку просторів в проективній топології.

Теорема 1. *Для довільного елемента $x = x(t) \in D_\Gamma(\mathcal{Y})$, $t \in \Gamma$, знайдеться число $\nu > 0$ таке, що $x(t) \in \mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ і $x(t)$ можна подати у вигляді абсолютно збіжного ряду в просторі $\mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ вигляду*

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes (\varphi_m)_\Gamma(t),$$

де $\sum\limits_m |\lambda_m| < \infty$ і послідовності $\{(\varphi_m)_\Gamma\}$ та $\{x_m\}$ прямують до нуля у просторах D_{Γ_ν} та $\mathcal{Y}$ відповідно.

Крім того, справедливою є рівність

$$\partial^k x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes \partial^k (\varphi_m)_\Gamma(t), \forall k \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Доведення. З представлення простору $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ випливає, що для кожного $x \in D_\Gamma(\mathcal{Y})$ існує таке число $\nu > 0$, що $x \in \mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$. Очевидно, що простори $\mathcal{Y}$ та D_{Γ_ν} є метризовними, тому для довільного елемента $x \in \mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ можна застосувати теорему [6, гл. III, т. 6.4] про зображення елементів поповнення проективного тензорного добутку метризовних просторів, що забезпечує нам розклад $x(t)$ в ряд.

Виконання рівності $\partial^k x(t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes \partial^k (\varphi_m)_\Gamma(t)$ слідує із абсолютної збіжності ряду. $\square$

Нехай $I_\mathcal{Y}$ – одиничний оператор, що діє в банаховому просторі $\mathcal{Y}$. Визначимо операцію крос-кореляції розподілу $f \in D'_\Gamma$ із основною функцією $\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$ за формулою

$$M_f \varphi_\Gamma(t) = \lambda_\Gamma \langle f(s),\, \varphi(t+s)\rangle = \lambda_\Gamma \langle f(s),\, \mathcal{T}_s \varphi(t)\rangle = \langle f(s),\, T_s \varphi_\Gamma(t)\rangle,$$

де $t \in \mathbb{R}^n$, $s \in \Gamma$, $T_s \circ \varrho = \varrho \circ \mathcal{T}_s$. В [1] доведено, що відображення $D'_\Gamma \ni f \to M_f \in L(D_\Gamma)$, де $L(D_\Gamma)$ – алгебра лінійних неперервних відображень над простором D_Γ з топологією рівномірної збіжності на компактах, здійснює топологічний ізоморфізм згорткової алгебри D'_Γ на комутант напівгрупи операторів $\{T_s\}_{s\in\Gamma}$ в алгебрі $L(D_\Gamma)$.

Оператор $I_\mathcal{Y} \otimes M_f$ належить простору лінійних неперервних відображень із $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ в $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ і діє за формулою:

$$(I_\mathcal{Y} \otimes M_f)x(t) = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t), & t \in \Gamma, \\ \qquad\qquad 0, & t \notin \Gamma. \end{cases}$$

Нехай $U_s : \Gamma \ni s \to U_s \in L(\mathcal{Y})$ – n-параметрична напівгрупа класу (C_0) над $\mathcal{Y}$. Генератори цієї n-параметричної (C_0)-напівгрупи визначаються наступним чином:

$$\partial_j U_s x|_{s=0} = -iA_j x, \ x \in \mathcal{D}(A_j), \ j = 1, \ldots, n.$$

Припускаємо, що A_j є замкненими, щільно визначеними операторами з областю визначення $\mathcal{D}(A_j)$. Тоді оператор $A = (A_1, \ldots, A_n)$ визначений над банаховим простором $\mathcal{Y}$. Розглянемо в $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ підпростір $D^o_\Gamma(\mathcal{Y}) := \{x(t) \in D_\Gamma(\mathcal{Y}) : x(0) = 0\}$.

Оскільки для довільного розподілу $f \in D'_\Gamma$ оператор $I_\mathcal{Y} \otimes M_f$ та оператор зсуву $I_\mathcal{Y} \otimes T_s$, $s \in \Gamma$ вздовж конуса Γ належать простору $L[D^o_\Gamma(\mathcal{Y}), D_\Gamma(\mathcal{Y})]$ лінійних неперервних відображень із $D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ в $D_\Gamma(\mathcal{Y})$, то справедливою є наступна теорема.

Теорема 2. *Для кожного розподілу $f \in D'_\Gamma$ оператор $I_\mathcal{Y} \otimes M_f$ є лінійним неперервним перетворенням простору $D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ в $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ і є ядерним оператором, що інваріантний відносно векторного оператора зсуву $I_\mathcal{Y} \otimes T_s$. Навпаки, для кожного лінійного неперерв-ного перетворення $I_\mathcal{Y} \otimes K \in L[D^o_\Gamma(\mathcal{Y}), D_\Gamma(\mathcal{Y})]$, яке інваріантне відносно зсуву, існує єдиний розподіл $f \in D'_\Gamma$ такий, що $K = M_f$ для всіх $x \in D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$.*

Доведення. За означенням

$$(I_\mathcal{Y} \otimes M_f)x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \langle f, T_s(\varphi_m)_\Gamma \rangle,$$

де послідовності $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ і $\{T_s(\varphi_m)_\Gamma\}_{m\in\mathbb{N}}$ прямують до нуля в $\mathcal{Y}$ та D^o_Γ відповідно. Тоді в силу відомого критерію ядерності (див. [5, гл. X, ст. 401]) випливає, що $I_\mathcal{Y} \otimes M_f$ – ядерний оператор.

Для довільної функції $x(t) \in D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ та розподілу $f \in D'_\Gamma$ маємо:

$$(I_\mathcal{Y} \otimes M_f \circ T_s)x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \ (M_f \circ T_s(\varphi_m)_\Gamma)(t) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \ (T_s \circ M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t) = (I_\mathcal{Y} \otimes T_s \circ M_f)x(t).$$

Навпаки, нехай для довільної функції $\varphi_\Gamma \in D^o_\Gamma$ лінійний неперервний функціонал $f : \varphi_\Gamma \to (K\varphi_\Gamma)(0)$ визначає розподіл $f \in D'_\Gamma$, якщо доозначити f на всьому $\mathbb{R}^n$ як тотожно нульовий функціонал. Тоді для довільної функції $x(t) \in D_\Gamma(\mathcal{Y})$ можна записати, що $\langle f, x\rangle = (I_{\mathcal{Y}} \otimes K)x(0) = (I_{\mathcal{Y}} \otimes M_f)x(0)$ (див. [4]). Якщо тепер в останню рівність замість $x(t)$ підставити функцію $(I_{\mathcal{Y}} \otimes T_s)x(t)$ і скористатися властивістю інваріантності, яка для оператора $I_{\mathcal{Y}} \otimes K$ виконується за умовою теореми, то отримаємо потрібне співвідношення $(I_{\mathcal{Y}} \otimes K)x(s) = (I_{\mathcal{Y}} \otimes M_f)x(s)$, $s \in \Gamma$. □

Визначимо відповідні Фур'є-образи просторів $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ та $D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ вигляду

$$\widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y}) := \{\widehat{x} = \int\limits_\Gamma U_s x(s)ds : \quad x(s) \in D_\Gamma(\mathcal{Y})\}$$

і

$$\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}) := \{\widehat{x} = \int\limits_\Gamma U_s x(s)ds : \quad x(s) \in D^o_\Gamma(\mathcal{Y})\}.$$

Теорема 3. *Якщо $\{U_s : \ s \in \Gamma\}$ – n-параметрична (C_0)-напівгрупа операторів, то підпростір $\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ щільний в банаховому просторі $\mathcal{Y}$.*

Доведення. Для довільного $m \in \mathbb{N}$ існує нескінченно диференційована фінітна функція $\varphi_m = \varphi_m(s)$ з властивостями $\varphi_m(s) \geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi_m \subset \Gamma_{\frac{1}{m}}$, $\int\limits_{\Gamma_{\frac{1}{m}}} \varphi_m(s)ds = 1$. Для довільного $y \in \mathcal{Y}$ побудуємо в просторі $\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ послідовність $\widehat{y}_m$, де $y_m = y \otimes \varphi_m$. Тоді

$$\|\widehat{y}_m - y\| = \|\int\limits_{\Gamma_{\frac{1}{m}}} \varphi_m(s)U_s y ds - \int\limits_{\Gamma_{\frac{1}{m}}} \varphi_m(s) y ds\| \leq$$

$$\int\limits_{\Gamma_{\frac{1}{m}}} \|U_s y - y\|\varphi_m(s)ds \leq \sup_{s\in\Gamma_{\frac{1}{m}}} \|U_s y - y\|.$$

Оскільки $\{U_s : s \in \Gamma\}$ – n-параметрична (C_0)-напівгрупа, то для кожного елемента $y \in \mathcal{Y}$ одержуємо $\sup\limits_{s\in\Gamma_{\frac{1}{m}}} \|U_s y - y\| \to 0$ при $m \to \infty$. Отже, $\lim\limits_{m\to\infty} \widehat{y}_m = y$ для всіх $y \in \mathcal{Y}$. □

Нехай $L[\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}), \widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})]$ – алгебра лінійних неперервних відображень із підпростору $\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ в $\widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})$ з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Теорема 4. *Відображення*

$$\Phi : \widehat{D}'_\Gamma \ni \widehat{f} \to \widehat{f}(A) \in L[\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}), \widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})],$$

де лінійний оператор $\widehat{f}(A)$ визначається формулою

$$\widehat{f}(A) : \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni \widehat{x} \to \widehat{f}(A)\widehat{x} = \int\limits_\Gamma (U_s \otimes M_f)x(s)ds, \tag{3}$$

є неперервним гомоморфізмом алгебри $\widehat{D}'_\Gamma$ в алгебру операторів $L[\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}), \widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})]$.

Доведення. З теореми 1 випливає, що кожен елемент $x(s) \in D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ розкладається в абсолютно-збіжний ряд $x(s) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes (\varphi_m)_\Gamma(s)$. Користуючись його абсолютною збіжністю, а також неперервністю скалярної операції крос-кореляції M_f, приходимо до висновку, що білінійне відображення $D'_\Gamma \times D^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni (f,x) \to \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \cdot M_f(\varphi_m)_\Gamma(s)$ є нарізно неперервним. Оскільки U_s є (C_o)-напівгрупою операторів, то з властивостей інтегралу Бохнера буде випливати нарізна неперервність білінійного відображення $D'_\Gamma \times D^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni (f,x) \to \widehat{f}(A)\widehat{x}$. Узагальнене перетворення Фур'є F^* розподілів з простору D'_Γ, а також відображення $D^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni x(s) \to \widehat{x} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ є топологічним ізоморфізмом [3], тому білінійне відображення

$$\omega : \widehat{D}'_\Gamma \times \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni (\widehat{f},\widehat{x}) \to \widehat{f}(A)\widehat{x} \in L[\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}), \widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})] \tag{4}$$

є теж нарізно неперервним. Простір $\widehat{D}'_\Gamma$ – бочковий, а $\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ – бочковий, як індуктивна границя бочкових просторів Фреше. Тому до відображення (4) можна застосувати теорему Банаха-Штейнгауза, яка гарантує нам одностайну неперервність відображення Φ.

Те, що відображення Φ здійснює гомоморфізм алгебр, випливає з теореми про топологічний ізоморфізм алгебри D'_Γ комутанту напівгрупи зсувів [1] та властивостей векто-рної операції крос-кореляції (див. [4]). □

Наслідок. *Неперервний гомоморфізм Φ задовольняє співвідношення:*

$$\widehat{\partial^l_j f}(A)\widehat{x} = (-iA_j)^l \widehat{f}(A)\widehat{x} = \widehat{f}(A)(-iA_j)^l \widehat{x}, \tag{5}$$

$$\widehat{\partial^l_j \delta}(A)\widehat{x} = (-iA_j)^l \widehat{x}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad j = 1,\dots,n, \tag{6}$$

де $f \in D'_\Gamma$, $\widehat{x} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$, δ – функція Дірака.

Доведення. Для довільного розподілу $f \in D'_\Gamma$ та функції $\widehat{x} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$, використовуючи формулу (3) операторного числення, запишемо

$$\widehat{\partial^l_j f}(A)\widehat{x} = \int\limits_\Gamma (U_s \otimes M_{\partial^l_j f}) x(s) ds = (-1)^l \int\limits_\Gamma \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m U_s x_m M_f \partial^l_j (\varphi_m)_\Gamma(s) ds =$$

$$(-1)^l \int\limits_\Gamma \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m U_s x_m \partial^l_j M_f (\varphi_m)_\Gamma(s) ds = (-1)^l \int\limits_\Gamma (U_s \otimes \partial^l_j M_f) x(s) ds.$$

Тоді за допомогою формального інтегрування частинами останнього інтеграла із зауваженням, що $\langle f, \partial^l_j x\rangle = (I_\mathcal{Y} \otimes \partial^l_j M_f)x(0) = 0$, отримаємо рівність (5).

Для доведення формули (6) в рівність (5) підставимо функцію Дірака. В такому випадку для довільної функції $\widehat{x} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ отримаємо

$$\widehat{\delta}(A)\widehat{x} = \int\limits_\Gamma (U_s \otimes M_\delta) x(s) ds =$$

$$\int\limits_\Gamma \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m U_s x_m M_\delta (\varphi_m)_\Gamma(s) ds = \int\limits_\Gamma U_s x(s) ds = \widehat{x}, \ \ s \in \Gamma.$$

Підставивши знайдене значення в праву частину формули (5), одержимо виконання рівності (6) $\square$

Розглянемо приклади застосування операторного числення, яке реалізується формулою (3).

Приклад 1. *В [3] доведено, що* $\delta = \frac{\widehat{\lambda}_\Gamma}{(2\pi)^n}$, *де* λ_Γ *– характеристична функція конуса* Γ. *Для* n*-параметричної* (C_o)*-напівгрупи* $\{U_s\}_{s\in\Gamma}$ *використаємо позначення* $U_s = e^{-i(s,\,A)}$, *де* $s \in \Gamma$ *і* A *– генератор цієї напівгрупи. Тоді для функції Дірака* $\delta \in D'_\Gamma$ *запишемо*

$$\delta(A)\widehat{x} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma (U_s \otimes M_{\lambda_\Gamma})x(s)ds =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e^{-i(s,\,A)} x_m \cdot M_{\lambda_\Gamma}(\varphi_m)_\Gamma(s)ds = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma e^{-i(s,\,A)}\int\limits_\Gamma x(t+s)ds =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma e^{-i(s,\,A)}x(t+s)dsdt = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma \widehat{x(t+s)}dt.$$

Приклад 2. *Застосуємо узагальнене перетворення Фур'є (1) до рівності* $\lambda_\Gamma * \partial_j\delta = \partial_j\delta * \lambda_\Gamma = \delta,\ j = 1,\ldots,n$. *Тоді отримаємо*

$$\delta \cdot \widehat{\partial_j\delta} = \widehat{\partial_j\delta}\cdot\delta = \frac{1}{(2\pi)^n},\ j = 1,\ldots,n.$$

Отже, функція Дірака δ *має в алгебрі* $\widehat{D}'_\Gamma$ *обернений елемент* $(2\pi)^n\widehat{\partial_j\delta}$. *Використовуючи основну теорему 4 операторного числення, робимо висновок, що для довільної функції* $\widehat{y} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ *рівняння*

$$(2\pi)^n\widehat{\partial_j\delta}(A)\widehat{x} = \widehat{y}$$

має єдиний розв'язок

$$\widehat{x} = \delta(A)\widehat{y} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma \widehat{y(t+s)}dt.$$

Література

1. Лопушанський О.В., Соломко А.В., Шарин С.В. Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т.47, №2. — С. 95–99.

2. Соломко А.В., Шарин С.В. Функціональне числення над банаховими просторами в конусі $\mathbb{R}^n_+$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т.47, №4. — С. 51–56.

3. Соломко А.В. Операторне зображення Фур'є-образу згорткової алгебри розподілів на конусі // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. — 2005. — Вип. 64. — С. 266–272.

4. Соломко А.В., Шарин С.В. Векторна операція крос-кореляції в довільному конусі // Вісник Прикарп. ун-ту. — 2007. — Вип. 3. — С. 29–36.

5. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

6. Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 359 с.

7. Grothendieck A. Produits tensoriel topologiques et espaces nucleaire // Mem. Amer. Math. Soc. — 16, **2** (1995). — P. 1–140.

8. Schwartz L. Theorie des distribution, I. — Hermann, 1950. — 430 p.

9. Schwartz L. Theorie des distributions, II. — Paris, 1951. — 476 p.

Прикарпатський університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 24.02.2009

Solomko A.V. *Particular case of operator calculus for generalized functions with supports in cone*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 92–99.

In this work the construction of functional calculus for strongly continuous semigroups of operators in Schwartz distribution algebra on some cone is generalized. The partial case of vector valued calculus on the base of modification operator Fourier transformation is researched.

Соломко А.В. *Частичный случай операторного исчисления для обобщенных функций с носителями в конусе // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 92–99.

В этой работе обобщается построение функционального исчисления для сильно непрерывных полугрупп операторов в алгебре распределений Шварца на любой конус. Исследуется частичный случай векторнозначного исчисления с помощью модификации операторного преобразования Фурье.