Карпатські математичні
публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical
Publications. V.3, №2

УДК 512.643.4

Джалюк Н.С., Петричкович В.М.

МАТРИЧНІ ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ $AX + BY = C$

Джалюк Н.С., Петричкович В.М. *Матричні діофантові рівняння* $AX + BY = C$ // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 49–56.

Запропоновано спосіб побудови розв'язків матричних діофантових рівнянь $AX+BY = C$ над комутативними областями скінченно породжених головних ідеалів. Наведено у певних випадках формули загальних розв'язків таких рівнянь та встановлено критерій однозначності в належному сенсі їх розв'язків.

Вступ

Лінійні матричні рівняння, в тому числі матричні діофантові рівняння, відіграють важливу роль в багатьох задачах теорії керування [9, 11, 12, 17, 18, 19]. Розв'язування лінійних матричних рівнянь у випадку, коли їх коефіцієнти є матриці над полем P, зводяться до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь над полем, зокрема для дослідження таких рівнянь використовується кронекеровий добуток матриць [13, 9]. Способи розв'язування матричних діофантових рівнянь $AX + BY = C$, де A, B, C — відомі, X, Y — невідомі матриці відповідних розмірів над кільцем поліномів $P[x]$ наведені у працях [9, 12, 17, 18, 19]. У цій статті на основі стандартної форми пари матриць (A, B) щодо узагальненої еквівалентності запропоновано метод побудови розв'язків матричних діофантових рівнянь $AX + BY = C$ над комутативними областями скінченно породжених головних ідеалів. Наведено формули загальних розв'язків таких рівнянь у випадках, коли пара матриць (A, B) діагоналізується, а також встановлено критерій однозначності в належному сенсі їх розв'язків.

1 Лінійні порівняння та діофантові рівняння

Нехай R — комутативна область цілісності, в якій кожний скінченно породжений ідеал є головним, $U(R)$ — група одиниць кільця R. Елементи $a, b \in R$ називають асоційованими, якщо $a = bu$, $u \in U(R)$. Через R' позначаємо повну множину неасоційованих елементів кільця R, тобто таку множину, яка містить по одному елементу з

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A24.
Ключові слова і фрази: діофантове матричне рівняння, загальний розв'язок рівняння.

кожного класу асоційованих елементів, R_m — повну множину лишків за ідеалом (m) породженим елементом $m \in R$ або за модулем m [2, 14].

Відомі властивості подільності елементів та порівнянь за ідеалом над кільцем цілих чисел, евклідовими кільцями, кільцями головних ідеалів [1, 2, 7, 14]. Справедливість більшості із них без особливих труднощів доводиться і над кільцями скінченно породжених головних ідеалів. Нагадаємо тут деякі із них, які будуть використовуватися при подальшому викладі.

Лема 1.1. [7]. *У кільці R клас лишків $\overline{a}$ за модулем m, $m \neq 0$, тобто $\overline{a}(\mathrm{mod}\ m)$, можна представити у вигляді сукупності усіх попарно різних класів лишків за модулем md, де $d \neq 0$, наступним чином:*

$$\overline{a}(\mathrm{mod} m) = \bigcup_{r \in R_d} (\overline{a + mr})(\mathrm{mod} md),$$

де об'єднання класів лишків за модулем md поширюється на всі лишки довільної повної множини лишків R_d за модулем d.

Клас елементів $x \equiv x_0(\mathrm{mod} m)$, кожен з яких задовольняє порівняння $ax \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, називають розв'язком цього порівняння.

Лема 1.2. *Нехай*

$$ax \equiv b(\mathrm{mod}\ m) \tag{1}$$

і $(a, m) = d$, де a, b, m, $d \in R$. Порівняння (1) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $d \mid b$ (ділить), тобто $b = b_1 d$.

Нехай $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $m = m_1 d$, де $(a_1, m_1) = 1$, і $x \equiv x_0(\mathrm{mod}\ m_1)$ — розв'язок порівняння

$$a_1 x \equiv b_1(\mathrm{mod}\ m_1). \tag{2}$$

Тоді загальний розв'язок порівняння (1) має вигляд:

$$x \equiv x_0 + m_1 r(\mathrm{mod}\ m),$$

де r — будь-який елемент із R_d.

Доведення. Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Нехай $(a, m) = d$ і $d \mid b$. Тоді, поділивши обидві частини порівняння (1) і модуль на їх спільний дільник d, отримаємо порівняння (2), де $(a_1, m_1) = 1$. Існують такі елементи u, v кільця R, що $a_1 u + m_1 v = 1$. Звідси маємо, що $a_1 u \equiv 1(\mathrm{mod}\ m_1)$. Домножимо обидві частини цього порівняння на $b_1 \neq 0$, тобто $a_1 u b_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\ m_1)$. Отже, $x \equiv u b_1(\mathrm{mod}\ m_1)$ — розв'язок порівняння (2). Нехай $u b_1 = x_0$. Тоді, застосувавши лему 1.1 про кратні модулі, одержимо, що загальним розв'язком порівняння (1) є $x \equiv x_0 + m_1 r(\mathrm{mod}\ m)$, де r — будь-який елемент із R_d. □

Наслідок 1.1. *Порівняння (1) має єдиний розв'язок $x \equiv x_0(\mathrm{mod} m)$ такий, що $x_0 \in R_m$, тоді і тільки тоді, коли $(a, m) = 1$.*

Лема 1.3. *Нехай*

$$ax + by = c \tag{3}$$

— лінійне діофантове рівняння над кільцем R і $(a, b) = d$. Рівняння (3) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $d \mid c$.

Нехай $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $c = c_1 d$, де $(a_1, b_1) = 1$, і x_0, y_0 — розв'язок рівняння

$$a_1 x + b_1 y = c_1,$$

тобто x_0 — розв'язок порівняння $a_1 x \equiv c_1 (\mathrm{mod} b_1)$ і $y_0 = \dfrac{c_1 - a_1 x_0}{b_1}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$x = x_0 + \frac{b}{d} r + bk, \quad y = y_0 - \frac{a}{d} r - ak,$$

де r і k — будь-які елементи із R_d і R відповідно.

Доведення легко одержується із леми 1.1 та леми 1.2.

Наслідок 1.2. *Рівняння (3) має єдиний розв'язок x_0, y_0 такий, що $x_0 \in R_b$ тоді і тільки тоді, коли $(a, b) = 1$.*

2 Стандартна форма пари матриць

Нехай R — комутативна область скінченно породжених головних ідеалів з діагональною редукцією матриць [10], тобто для кожної матриці A із кільця матриць $M(n, R)$ існують оборотні матриці $U, V \in GL(n, R)$ такі, що

$$UAV_A = D^A = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \quad \varphi_i \mid \varphi_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Якщо $\varphi_i \in R'$, $i = 1, \ldots, n$, то матриця D^A визначена однозначно і її називають канонічною діагональною формою матриці A. Такими кільцями є зокрема кільця скінченно породжених головних ідеалів з умовою адекватності елементів [8, 3, 4, 5].

Означення 2.1. [15]. *Набори матриць $(A_1, \ldots, A_k)$ і $(B_1, \ldots, B_k)$, $A_i, B_i \in M(n, R)$, $i = 1, \ldots, k$, називаємо узагальнено еквівалентними, якщо $A_i = UB_iV_i$, $i = 1, \ldots, k$, для деяких оборотних матриць U і V_i над R.*

У роботах [15, 16] встановлені форми пари матриць щодо узагальненої еквівалентності.

Теорема 2.1. *Нехай R — адекватне кільце* [8], *тобто область скінченно породжених головних ідеалів, в якій для кожного ненульового елемента $a \in R$ і кожного елемента $b \in R$ існують такі елементи $c, d \in R$, що $a = cd$, причому c є взаємно простим із b, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із $b \in R$. Нехай $A, B \in M(n, R)$ — неособливі матриці,*

$$D^A = \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \quad D^B = \Psi = \mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$$

— їх канонічні діагональні форми.

Тоді пара матриць (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари* (D^A, T^B)*, де* T^B *має вигляд:*

$$T^B = \begin{Vmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}\psi_1 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}\psi_1 & t_{n2}\psi_2 & \cdots & \psi_n \end{Vmatrix} \tag{4}$$

і $t_{ij} \in R'_{\delta_{ij}}$*, де* $\delta_{ij} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \frac{\psi_i}{\psi_j}\right)$, $\quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i > j$, R'_δ *— максимальна підмножина множини* R_δ *така, що для будь-яких* $a, b \in R'_\delta$ *і кожного* $u \in U(R)$ *має місце співвідношення* $ua \not\equiv b \,(\mathrm{mod}\ \delta)$.

Пару матриць (D^A, T^B), визначену теоремою 2.1, називають *стандартною формою* пари матриць (A, B) або *стандартною парою* матриць.

Наслідок 2.1. *Нехай* $A, B \in M(n, R)$*. Якщо* $(\det A, \det B) = 1$*, то пара матриць* (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць* (D^A, D^B).

Якщо пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць (D^A, D^B), то кажуть, що пара матриць (A, B) діагоналізується [6]. Сформулюємо критерій діагоналізовності пар матриць:

Теорема 2.2. *Нехай матриці* $A, B \in M(n, R)$ *неособливі. Тоді пара матриць* (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць* (D^A, D^B) *в тому і тільки тому випадку, коли матриці* $(\mathrm{adj}\ A)B$ *і* $(\mathrm{adj}\ D^A)D^B$ *є еквівалентними, де* $\mathrm{adj}\ A$ *— матриця, складена з алгебраїчних доповнень елементів і транспонована (приєднана, взаємна матриця).*

3 Побудова розв'язків матричного рівняння $AX + BY = C$

Нехай R — комутативна область скінченно породжених головних ідеалів з діагональною редукцією матриць,

$$AX + BY = C \tag{5}$$

— матричне діофантове рівнянння, де A, B, C — відомі, X, Y — невідомі $n \times n$-матриці над R.

Відомо [9, 18], що матричне рівняння (5), в якому A, B, C — матриці над кільцем поліномів, має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

а) найбільший спільний лівий дільник матриць A і B є лівим дільником матриці C;

б) матриці $\|A\ B\ C\|$ та $\|A\ B\ 0\|$ правоеквівалентні.

Без труднощів можна показати, що ці умови розв'язності справедливі і для матричних діофантових рівнянь (5) над кільцями скінченно породжених головних ідеалів. Вкажемо спосіб побудови розв'язків цих рівнянь, використовуючи стандартну форму пари матриць.

Нехай матричне діофантове рівнянння (5) розв'язне і нехай пара матриць (A, B) із рівняння (5) узагальнено еквівалентна до стандартної пари (D^A, T^B), де

$$D^A = \Phi = UAV_A = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

$$T^B = UBV_B = \operatorname{triang}(\psi_1, \dots, \psi_n)$$

— нижня трикутна матриця вигляду (4) з головною діагоналлю

$$D^B = \Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n),$$

U, V_A, $V_B \in GL(n, R)$. Тоді з рівняння (5) отримуємо рівняння

$$D^A\widetilde{X} + T^B\widetilde{Y} = \widetilde{C}, \tag{6}$$

де $\widetilde{X} = V_A^{-1}X$, $\widetilde{Y} = V_B^{-1}Y$, $\widetilde{C} = UC$.

Рівняння (6) називаємо асоційованим до рівняння (5). Пару матриць X_0, Y_0, що задовольняє рівняння (5), називаємо розв'язком цього рівняння. Тоді

$$\widetilde{X}_0 = V_A^{-1}X_0, \quad \widetilde{Y}_0 = V_B^{-1}Y_0 \tag{7}$$

— розв'язок рівняння (6). Розв'язок (7) рівняння (6) є асоційованим до розв'язку X_0, Y_0 рівняння (5).

З матричного рівняння (6) отримуємо систему лінійних рівнянь

$$\varphi_i\widetilde{x}_{ij} + \sum_{l=1}^{i-1}\psi_l\widetilde{y}_{lj}t_{il} + \psi_i\widetilde{y}_{ij} = \widetilde{c}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{8}$$

де $\widetilde{X} = \|\widetilde{x}_{ij}\|_1^n$, $\widetilde{Y} = \|\widetilde{y}_{ij}\|_1^n$, $\widetilde{C} = \|\widetilde{c}_{ij}\|_1^n$. Розв'язування цієї системи зводиться до послідовного розв'язування лінійних діофантових рівнянь вигляду (3). За розв'язками системи лінійних рівнянь (8) будуємо розв'язки $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ матричного рівняння (6). Тоді $X = V_A\widetilde{X}$, $Y = V_B\widetilde{Y}$ — розв'язки матричного рівняння (5).

4 Матричне рівняння $AX + BY = C$ із діагоналізовною парою матриць (A, B)

Нехай пара матриць (A, B) діагоналізується, тобто

$$\begin{aligned} UAV_A = D^A = \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \\ UBV_B = D^B = \Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n) \end{aligned} \tag{9}$$

для деяких матриць U, V_A, $V_B \in GL(n, R)$. Тоді з рівняння (5) отримуємо рівняння

$$\Phi\widetilde{X} + \Psi\widetilde{Y} = \widetilde{C}, \tag{10}$$

де $\widetilde{X} = V_A^{-1}X$, $\widetilde{Y} = V_B^{-1}Y$, $\widetilde{C} = UC$.

Система лінійних рівнянь (8) набуде вигляду

$$\varphi_i \widetilde{x}_{ij} + \psi_i \widetilde{y}_{ij} = \widetilde{c}_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Нехай $\widetilde{x}_{ij}^{(0)}$, $\widetilde{y}_{ij}^{(0)}$ — деякий розв'язок системи лінійних діофантових рівнянь (11). Загальний розв'язок системи рівнянь (11), враховуючи лему 1.3, матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_{ij} &= \widetilde{x}_{ij}^{(0)} + \tfrac{\psi_i}{d_{ii}} r_i + \psi_i k_{ij}, \\ \widetilde{y}_{ij} &= \widetilde{y}_{ij}^{(0)} - \tfrac{\varphi_i}{d_{ii}} r_i - \varphi_i k_{ij}, \end{aligned}$$

де $d_{ii} = (\varphi_i, \psi_i)$, r_i та k_{ij} — будь-які елементи із $R_{d_{ii}}$ та R відповідно, $i, j = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\widetilde{X}_0 = \|\widetilde{x}_{ij}^{(0)}\|_1^n, \quad \widetilde{Y}_0 = \|\widetilde{y}_{ij}^{(0)}\|_1^n$$

— розв'язок рівняння (10). Таким чином ми отримали наступну теорему.

Теорема 4.1. *Нехай пара матриць (A, B) із матричного рівняння (5) діагоналізується до пари (Φ, Ψ) вигляду (9). Тоді загальним розв'язком матричного рівняння (10), асоційованого до рівняння (5), є*

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}_0 + \operatorname{diag}(\tfrac{\psi_1}{d_{11}} r_1, \ldots, \tfrac{\psi_n}{d_{nn}} r_n)\ L + \Psi K,$$

$$\widetilde{Y} = \widetilde{Y}_0 - \operatorname{diag}(\tfrac{\varphi_1}{d_{11}} r_1, \ldots, \tfrac{\varphi_n}{d_{nn}} r_n)\ L - \Phi K,$$

де $d_{ii} = (\varphi_i, \psi_i)$, r_i — будь-які елементи із $R_{d_{ii}}$, $i = 1, \ldots, n$; $L = \|l_{ij}\|_1^n$, $l_{ij} = 1$, $i, j = 1, \ldots, n$; $K = \|k_{ij}\|_1^n$, k_{ij} — будь-які елементи кільця R.

Загальним розв'язком рівняння (5) є

$$X = V_A \widetilde{X}, \quad Y = V_B \widetilde{Y}.$$

5 Однозначність розв'язків матричного діофантового рівняння

Теорема 5.1. *Матричне рівняння (6) має єдиний розв'язок*

$$\widetilde{X}_0 = \|\widetilde{x}_{ij}^{(0)}\|_1^n, \quad \widetilde{Y}_0 = \|\widetilde{y}_{ij}^{(0)}\|_1^n \tag{12}$$

такий, що

$$\widetilde{x}_{ij}^{(0)} \in R_{\psi_i}, \ i, j = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

тоді і тільки тоді, коли $(\det D^A, \det T^B) = 1$.

Доведення. З матричного рівняння (6) отримуємо систему лінійних рівнянь (8), розв'язування якої зводиться до послідовного розв'язування лінійних діофантових рівнянь вигляду (3).

Для матричного рівняння (6) існує єдиний розв'язок $\widetilde{X}_0 = \|\widetilde{x}_{ij}^{(0)}\|_1^n, \widetilde{Y}_0 = \|\widetilde{y}_{ij}^{(0)}\|_1^n$ такий, що $\widetilde{x}_{ij}^{(0)} \in R_{\psi_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$, тоді і тільки тоді, коли кожне із лінійних діофантових рівнянь вигляду (3) має єдиний розв'язок $\widetilde{x}_{ij}^{(0)}$, $\widetilde{y}_{ij}^{(0)}$ такий, що $\widetilde{x}_{ij}^{(0)} \in R_{\psi_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$, а це за наслідком 1.2 буде тоді і тільки тоді, коли $(\varphi_i, \psi_i) = 1$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Звідси отримуємо, що $(\det D^A, \det T^B) = 1$. Цим теорему доведено. $\square$

Наслідок 5.1. *Нехай R — евклідове кільце, $\delta(a)$ — норма елемента $a \in R$, (D^A, T^B) — стандартна пара матриць із рівняння* (6) *з головними діагоналями*

$$\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),\ \Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n),\ \varphi_i,\ \psi_i \in R',\ i{=}1, \ldots, n,$$

де R' — повна множина неасоційованих елементів кільця R.

Нехай далі

$$\widetilde{X}_0{=}\|\widetilde{x}_{ij}^{(0)}\|_1^n, \quad \widetilde{Y}_0{=}\|\widetilde{y}_{ij}^{(0)}\|_1^n, \quad \widetilde{x}_{ij}^{(0)} \in R',\ i,j{=}1, \ldots, n, \tag{14}$$

— розв'язок рівняння (6). *Тоді розв'язок* (14) *рівняння* (6) *такий, що*

$$\delta(\widetilde{x}_{ij}^{(0)}) < \delta(\psi_i),\ i,j{=}1, \ldots, n,$$

єдиний тоді і тільки тоді, коли $(\det D^A, \det T^B) = 1$.

Розв'язок рівняння (6), асоційованого до рівняння (5), вигляду (12)—(13) єдиний тоді і тільки тоді, коли $(\det D^A, \det T^B) = 1$, тобто $(\det A, \det B) = 1$. Тоді за наслідком 2.1 пара матриць (A, B) діагоналізується до пари (Φ, Ψ). Асоційованим до рівняння (5) буде рівняння вигляду (10).

Таким чином із теореми 4.1 отримуємо формулу загального розв'язку рівняння (6) та рівняння (5) у випадку його однозначності.

Теорема 5.2. *Нехай розв'язок $\widetilde{X}_0{=}\|\widetilde{x}_{ij}^{(0)}\|_1^n$, $\widetilde{Y}_0{=}\|\widetilde{y}_{ij}^{(0)}\|_1^n$, де $\widetilde{x}_{ij}^{(0)} \in R_{\psi_i}$, $i{=}1, \ldots, n$, є єдиним розв'язком матричного рівняння* (6), *асоційованого до рівняння* (5). *Тоді загальним розв'язком рівняння* (6) *є*

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}_0 + \Psi K, \quad \widetilde{Y} = \widetilde{Y}_0 - \Phi K,$$

де (Φ, Ψ) — стандартна форма пари (A, B), $K = \|k_{ij}\|_1^n$, де k_{ij} — будь-які елементи кільця R, $i, j = 1, \ldots, n$.

Загальним розв'язком рівняння (5) *є*

$$X = V_A \widetilde{X}, \quad Y = V_B \widetilde{Y}.$$

Література

1. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1985. — 504 с.

2. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. — М.: Наука, 1976. — 648 с.

3. Забавський Б.В. *Узагальнені адекватні кільця* // Укр. мат. журн. — 1996. — Т.48, № 4. — С. 554–557.

4. Комарницкий Н.Я. *Коммутативные адекватные области Безу и кольца элементарных делителей* // Алгебраические исследования. — 1996. — С. 97–113.

5. Комарницький М.Я., Петричкович В.М. *Теоретико-структурні властивості матриць над кільцями скінченно породжених головних ідеалів* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т.46, №2. — С. 7–21.

6. Петричкович В.М. *Критерій діагоналізовності пари матриць над кільцем головних ідеалів спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями* // Укр. мат. журн. — 1997. — Т.49, №6. — С. 860–862.

7. Родосский К.А. Алгоритм Евклида. — М.: Наука, 1988. — 240 с.
8. Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions*, Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), 225–236.
9. Kaczorek T. Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory, Communications and Control Engineering, Springer, Dortrecht, 2007, 503 p.
10. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*, Trans. Amer. Math. Soc., **66** (1949), 464–491.
11. Kucera V. *Alqebraic theory of discrete optimal control for sinqle-variable systems. I. Preliminaries*, Kybernetika, **9**, 2 (1973), 94–107.
12. Kucera V. *Alqebraic theory of discrete optimal control for multivariable systems*, Kybernetika, **10**, No. Suppl, (1) (1974), 3–56.
13. Lancaster P., Tismenetsky M. The theory of matrices, Academic Press, New York, 1985, 570 p.
14. Newman M. Integral matrices, Academic Press, New York, 1972, 224 p.
15. Petrychkovych V. *Generalized equivalence of pair of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, **48** (2000), 179–188.
16. Petrychkovych V. *Standard form of pairs of matrices with respect to generalized eguivalence*, Visnyk Lviv. Univ., **61** (2003), 153–160.
17. Tzekis P.A. *A new algorithm for the solution of a polynomial matrix Diophantine equation*, Applied Mathematics and Computation, **193** (2007), 395–407.
18. Wolovich W.A., Antsaklis P.J. *The canonical Diophantine equations with applications*, SIAM J. Control and Optimization, **22**, 5 (1984), 777–787.
19. Zhou B., Yan Z.B., Duan G.R. *Unified Parametrization for the Solutions to the Polynomial Diophantine Matrix Equation and the Generalized Sylvester Matrix Equation*, International Journal of Control, Automation and Systems, **8**, 1 (2010), 29–35.

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С.Підстригача НАН України,
Львів, Україна
e-mail: *nataliya.dzhalyuk@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com*

Надійшло 01.03.2011

Dzhaliuk N.S., Petrychkovych V.M. *The matrix diophantine equations* $AX + BY = C$, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 49–56.

A method of constructing of solutions of matrix Diophantine equations $AX + BY = C$ over commutative domains of finitely generated principal ideals is suggested. The formulas of general solutions of such equations in some cases is proposed. The criterion of uniqueness in the proper sense of their solutions is established.

Джалюк Н.С., Петричкович В.М. *Матричные диофантовые уравнения* $AX + BY = C$ // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 49–56.

Предложен способ построения решений матричных диофантовых уравнений $AX + BY = C$ над коммутативными областями конечно порождённых главных идеалов. Приведены в некоторых случаях формулы общих решений таких уравнений и установлен критерий однозначности в надлежащем смысле их решений.