Карпатські математичні
публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical
Publications. V.3, №2

УДК 512.53/54

Довгей Ж.І., Сумарюк М.І.

ВІЛЬНІ ПІДНАПІВГРУПИ У ГРУПІ АВТОМОРФІЗМІВ КІЛЬЦЯ МНОГОЧЛЕНІВ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ НАД ЧИСЛОВИМИ ПОЛЯМИ

Довгей Ж.І., Сумарюк М.І. *Вільні піднапівгрупи у групі автоморфізмів кільця многочленів від двох змінних над числовими полями* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 64–70.

Наводяться достатні умови, при виконанні яких напівгрупа, породжена двома автоморфізмами кільця многочленів від двох змінних над довільним числовим полем, буде вільною. Порівнюється у категорному розумінні Бера сукупність вільних скінченно породжених піднапівгруп групи трикутних автоморфізмів із сукупністю скінченно породжених піднапівгруп цієї групи, які не є вільними.

Одним із основних об'єктів досліджень сучасної алгебраїчної геометрії є група автоморфізмів кільця многочленів від двох змінних над фіксованим полем $\mathbb{P}$, яка ще відома як група автоморфізмів афінної площини $\mathbb{P}^2$ або двовимірна афінна група Кремони [9, 11]. Ця група має також важливі застосування у таких розділах сучасної математики, як алгебраїчна геометрія [6, 10], комутативна алгебра [10], теорія асоціативних алгебр [3, 8], теорія динамічних систем [7, 8] тощо. Останнім часом появилося ряд робіт, присвячених вивченню теоретико-групової будови геометричних властивостей цієї групи і її підгруп трикутних чи унітрикутних автоморфізмів (див. напр. [1, 8]).

Метою даної публікації є характерізація широкого класу вільних 2-породжених піднапівгруп двовимірної афінної групи Кремони у випадку довільного числового поля. Ми наводимо достатні умови аналітичного характеру при виконанні яких напівгрупа, породжена певними двома автоморфізмами кільця многочленів $\mathbb{P}[x, y]$ від двох змінних над довільним числовим полем $\mathbb{P}$, буде вільною напівгрупою. Наведені умови легко перевіряються у конкретному випадку автоморфізмів, що дозволило побудувати конкретні зображення вільної 2-породженої напівгрупи автоморфізмами кільця многочленів $\mathbb{P}[x, y]$. Крім того, в роботі досліджується сукупність усіх вільних скінченно породжених піднапівгруп групи трикутних автоморфізмів кільця многочленів $\mathbb{P}[x, y]$, яка порівнюється у категорному розумінні Бера із сукупністю тих скінченно породжених піднапівгруп цієї групи, які не є вільними.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 05E15.
Ключові слова і фрази: вільна напівгрупа, група (напівгрупа) трикутних автоморфізмів кільця многочленів.

Отже, нехай $G = Aut\mathbb{P}[x,y]$ — група автоморфізмів кільця многочленів $\mathbb{P}[x,y]$ від двох змінних x, y над довільним числовим полем $\mathbb{P}$. Довільний автоморфізм кільця $\mathbb{P}[x,y]$ однозначно визначається образами елементів $x, y \in \mathbb{P}$:

$$x \mapsto a(x,y), y \mapsto b(x,y), \tag{1}$$

де $a(x,y), b(x,y) \in \mathbb{P}[x,y]$, причому ці образи повинні бути такими, щоб відображення кільця $\mathbb{P}[x,y]$ в себе, яке задається відповідністю

$$f(x,y) \mapsto f(a(x,y), b(x,y)), f(x,y) \in \mathbb{P}[x,y], \tag{2}$$

було бієктивним, а обернене до нього також задавалося парою многочленів, тобто відповідністю вигляду (1).

У роботі [4] другим автором доведено таке твердження.

Лема 1. *Нехай дано дійсні матриці A та B вигляду*

$$A = a_3 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = b_4 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того, виконуються наступні умови:

$$a_3 b_4 \neq 0, a_1 > 0, a_2 < 0, b_2 b_3 > 0, b_2 b_3 \neq 1, b_1 b_3 < 0.$$

Тоді матриці A та B утворюють базис вільної напівгрупи рангу 2.

Кожному автоморфізму кільця многочленів $\mathbb{P}[x,y]$ відповідає матриця Якобі

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial y} \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{P}^2.$$

Наступне твердження характеризуватиме вільні 2-породжені напівгрупи автоморфізмів кільця $\mathbb{P}[x,y]$ за допомогою матриць Якобі.

Теорема 1. *Нехай дано два автоморфізми кільця $\mathbb{P}[x,y]$, яким відповідають матриці Якобі $J_1(x,y)$ та $J_2(x,y)$. Якщо існує точка $(x_0,y_0) \in \mathbb{P}^2$ така, що напівгрупа, породжена матрицями $J_1(x_0,y_0)$ та $J_2(x_0,y_0)$ є вільною напівгрупою з базою $\{J_1(x_0,y_0), J_2(x_0,y_0)\}$, то дані автоморфізми утворюють двоелементний базис вільної напівгрупи.*

Доведення. Нехай $X = \{z_1, z_2\}$ — алфавіт з двох символів. Розглянемо два напівгрупові слова $u \equiv u(z_1,z_2)$ та $v \equiv v(z_1,z_2)$ над алфавітом X, які відрізняються своїми записами у розумінні графічного порівняння слів. Знайдемо значення слів u та v на даних автоморфізмах, які визначені парами многочленів $(a_1,b_1), (a_2,b_2), a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{P}[x,y]$ відносно операції суперпозиції автоморфізмів, поклавши замість літери z_1 відповідно пару (a_1,b_1), а замість літери z_2 — пару (a_2,b_2). У результаті дістанемо нові автоморфізми, задані парами многочленів $u((a_1,b_1),(a_2,b_2))$ та $v((a_1,b_1),(a_2,b_2))$.

Для доведення сформульованого твердження досить пересвідчитись, що пари многочленів $u((a_1,b_1),(a_2,b_2))$ та $v((a_1,b_1),(a_2,b_2))$ є різними у розумінні покомпонентного порівняння пар многочленів.

Нехай $J_1(x,y), J_2(x,y), (x,y) \in \mathbb{P}^2$ — відповідні матриці Якобі для даних автоморфізмів. Оскільки суперпозиції двох, а, як наслідок, кількох автоморфізмів відповідає матриця Якобі, яка є добутком відповідних матриць Якобі складових автоморфізмів суперпозиції, то для автоморфізмів, які відповідають парам многочленів $u((a_1,b_1),(a_2,b_2))$ та $v((a_1,b_1),(a_2,b_2))$, маємо такі матриці Якобі

$$u(J_1(x,y), J_2(x,y)), v(J_1(x,y), J_2(x,y)), (x,y) \in \mathbb{P}^2.$$

Тут вказані матриці Якобі є значеннями напівгрупових слів $u(z_1,z_2)$ та $v(z_1,z_2)$ на матрицях $J_1(x,y), J_2(x,y)$ відносно операції добутку матриць, де замість літери z_1 взято матрицю $J_1(x,y)$, а замість літери z_2 — матрицю $J_2(x,y)$.

Згідно із умовою сформульованого твердження, існує точка $(x_0,y_0) \in \mathbb{P}^2$ така, що напівгрупа, породжена матрицями $J_1(x_0,y_0)$ та $J_2(x_0,y_0)$ є вільною напівгрупою рангу 2. Тоді, зважаючи на те, що напівгрупові слова $u(z_1,z_2), v(z_1,z_2)$ відрізняються у графічному розумінні, матриці

$$u(J_1(x,y), J_2(x,y)), v(J_1(x,y), J_2(x,y))$$

будуть різними. Тому автоморфізми, які задаються парами многочленів $u((a_1,b_1),(a_2,b_2))$ та $v((a_1,b_1),(a_2,b_2))$ також є різними. □

Нагадаємо, що перетворення із групи G називається трикутним автоморфізмом кільця $\mathbb{P}[x,y]$, якщо воно задається парою многочленів вигляду:

$$(\alpha_1 x + f(y), \beta_1 y + \beta_2,)$$

де $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{P}, f(y) \in \mathbb{P}[y]$.

У наступному твердженні наведемо конкретну конструкцію вільної 2-породженої напівгрупи, породженої трикутними автоморфізмами кільця многочленів $\mathbb{P}[x,y]$.

Теорема 2. *Нехай дано два трикутні автоморфізми із групи G, які задаються відповідно парами многочленів*

$$(\alpha x + f(y), y), \quad (g(x) + \beta y, \gamma x + \tau), \tag{3}$$

де f та g — многочлени однієї змінної над полем $\mathbb{P}$, причому

$$\alpha > 0, \quad \beta\gamma > 0, \quad \beta\gamma \neq 1, \quad \tau \in \mathbb{P},$$

а також існує точка $(x_0,y_0) \in \mathbb{P}^2$ така, що виконуються нерівності $f'(y_0) < 0$ і $\gamma g'(y_0) < 0$.

Тоді автоморфізми, які задаються парами многочленів (3), утворюють базис вільної напівгрупи рангу 2.

Доведення. Випишемо матриці Якобі, які відповідають даним автоморфізмам кільця $\mathbb{P}[x,y]$. Отже, маємо:

$$J_1(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & f'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J_2(x,y) = \begin{pmatrix} g'(x) & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{P}^2.$$

Із умов сформульованої теореми випливає, що існує така точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{P}^2$, для якої матриці $J_1(x_0, y_0)$ та $J_2(x_0, y_0)$ задовольняють умови леми 1, тобто напівгрупа, породжена цими матрицями, є вільною напівгрупою рангу 2 відносно бази $\{J_1(x_0, y_0), J_2(x_0, y_0)\}$. Тоді згідно із теоремою 1, автоморфізми із групи G, які задаються парами многочленів (3), утворюють базис вільної напівгрупи рангу 2. □

Зазначимо, що у теоремі 2 замість пар многочленів (3) можна розглядати такі пари:

$$(\lambda(\alpha x + f(y)), \lambda y), (\mu(g(x) + \beta y), \mu(\gamma x + \tau)),$$

для довільних $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$ таких, що $\lambda\mu \neq 0$.

Нехай LG — група автоморфізмів кільця $\mathbb{P}[x, y]$, де кожний автоморфізм із групи G задається парою лінійних многочленів виду $(\alpha x + \beta y, \gamma x + \tau y)$, при цьому відповідна матриця Якобі $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \tau \end{pmatrix}$ повинна бути невиродженою. Ця умова є необхідною та достатньою для того, щоб відображення кільця $\mathbb{P}[x, y]$ в себе, яке задається відповідністю

$$f(x, y) \mapsto f(\alpha x + \beta y, \gamma x + \tau y), f(x, y) \in \mathbb{P}[x, y],$$

було бієктивним.

Побудуємо тепер вільні 2-породженні напівгрупи в групі LG автоморфізмів кільця $\mathbb{P}[x, y]$, які задаються парами лінійних многочленів (такі автоморфізми називаються афінними). Для цього необхідними нам будуть деякі твердження, отримані у роботі [4].

Теорема 3. *Нехай дано $f_i = \alpha_i z + \beta_i, i \in \{1, 2\}$ — лінійні перетворення поля $\mathbb{P}$. Якщо їх коефіцієнти задовольняють наступні умови: 1) $\alpha_1, \alpha_2 \in (2; +\infty)$; 2) при всіх $n, m \in Z$ таких, що $|n| + |m| \neq 0$ маємо $\alpha_1^n \neq \alpha_2^m$; 3) $\beta_1 = \beta_2 \neq 0$ або умови 4) $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_1 \in (-\infty; -1)$; 5)$\beta_1, \beta_2 \in (0; +\infty)$, $\beta_1 \neq \beta_2$.*

Тоді напівгрупа, породжена перетвореннями f_1 та f_2, є вільною напівгрупою рангу 2 з вільною базою $\{f_1, f_2\}$.

Нехай TLG — підгрупа групи LG, яка складається з так званих трикутних лінійних автоморфізмів кільця $\mathbb{P}[x, y]$, тобто таких автоморфізмів, що задаються відповідністю

$$f(x, y) \mapsto f(\alpha x + \beta, \gamma x + \tau y), f(x, y) \in \mathbb{P}[x, y].$$

При цьому матриця Якобі має трикутний вигляд:

$$J(x, y) = J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \tau \end{pmatrix}.$$

Із наведених тверджень випливають такі наслідки.

Теорема 4. *Нехай задано два відображення кільця многочленів $\mathbb{P}[x, y]$ в себе, визначені відповідностями*

$$f(x, y) \mapsto f(\alpha_1 x + \beta_1, \alpha x + \beta y),$$
$$g(x, y) \mapsto g(\alpha_2 x + \beta_2, \gamma x + \tau y),$$

де $f(x, y), g(x, y) \in \mathbb{P}[x, y]$, $\alpha_1 \beta \neq 0$ та $\alpha_2 \tau \neq 0$. Якщо коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ задовольняють умови 1)–3) або умови 4), 5) теореми 3, то вказані відображення кільця $\mathbb{P}[x, y]$ в себе є автоморфізмами, які вільно породжують вільну напівгрупу рангу 2.

Доведення. Нехай для даних відображень виконуються умови 1)–3) теореми 3. Тоді для першого відображення матриця Якобі має вигляд $J_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, а для другого — $J_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \gamma & \tau \end{pmatrix}$. Оскільки $\alpha_1\beta \neq 0$ та $\alpha_2\tau \neq 0$, то матриці J_1 та J_2 є невиродженими. Отже, вказані відображення визначають автоморфізми кільця $\mathbb{P}[x, y]$. Нехай $X = \{z_1, z_2\}$ — алфавіт з двох символів. Розглянемо два напівгрупові слова $u \equiv u(z_1, z_2)$ та $v \equiv v(z_1, z_2)$ над алфавітом X, які відрізняються своїми записами у розумінні графічного порівняння слів. Знайдемо значення слів u та v на даних автоморфізмах, яким відповідатимуть пари многочленів $u(\alpha_1 x + \beta_1, \alpha_2 x + \beta_2)$ та $v(\alpha x + \beta y, \gamma x + \tau y)$. Але згідно з теоремою 3 многочлен $u(\alpha_1 x + \beta_1, a_2 x + \beta_2)$ не є тотожним многочленом, тому автоморфізм, який визначається відповідністю

$$f(x, y) \to f(u(\alpha_1 x + \beta_1, \alpha_2 x + \beta_2), v(\alpha x + \beta y, \gamma x + \tau y)),$$

не тотожне перетворення. Тому напівгрупа породжена цими автоморфізмами є вільною.

У випадку виконання умов 4), 5) теореми 3, для даних відображень, міркування є цілком аналогічними. □

Таким чином, у теоремі 4 побудовані конкретні зображення вільних 2–породжених піднапівгруп у групі LG лінійних автоморфізмів над довільним числовим полем.

З'ясуємо тепер, яких напівгруп серед усіх скінченно породених піднапівгруп групи TLG є більше в категорному розумінні Бера: тих, що є вільними, чи тих, що не є вільними [2]?

Отже, нехай $\mathbb{P}$ — деяке числове поле, $H(\mathbb{P})$ — напівгрупа усіх цілих лінійних перетворень поля $\mathbb{P}$ і $H^k(\mathbb{P})$ — її довільний k-й ($k \in \mathbb{N}$) декартів степінь. Нехай $F_k(\mathbb{P})$ — множина усіх кортежів степеня $H^k(\mathbb{P})$, компоненти яких породжують вільну піднапівгрупу напівгрупи $H(\mathbb{P})$. Для довільної фіксованої обмеженої підмножини $Y, |Y| > 1$, поля $\mathbb{P}$ на степені $H^k(\mathbb{P})$ визначимо віддаль $d_{k,Y}$, де для довільних двох впорядкованих наборів $\varphi = (f_1, f_2, ..., f_k)$ та $\psi = (g_1, g_2, ..., g_k)$ із $H^k(\mathbb{P})$, покладемо

$$d_{k,Y}(\varphi, \psi) = \max_{1 \le j \le k} \sup_{z \in Y} |f_j(z) - g_j(z)|.$$

У результаті отримаємо метричний простір $(H^k(\mathbb{P}), d_{k,Y})$.

Опишемо поняття "більшості" у категорному розумінні Бера. Отже, нехай S — напівгрупа, S^k — k-й ($k \in \mathbb{N}$) декартів степінь напівгрупи S. Наведемо умови, які повинна задовольняти напівгрупа S, щоб більшість її піднапівгруп мали деяку властивість ρ (тут розуміється, що ρ — деяке логічне висловлювання про кожну піднапівгрупу напівгрупи S, яке однозначно є або істинним або хибним). Нехай d_k — функція віддалі на степені S^k. Символом F_k позначимо сукупність усіх кортежів степеня S^k таких, що відповідна напівгрупа, породжена компонентами цього кортежу має властивість ρ, а символом N_k позначимо різницю множин $S^k \backslash F_k$. Тоді вважаємо, що "більшість" скінченно породжених піднапівгруп напівгрупи S мають властивість ρ у категорному розумінні Бера, якщо виконуються наступні умови: 1) для кожного $k \in \mathbb{N}$ відповідна множина F_k є всюди щільною в S^k (у розумінні топології, породженої метрикою d_k); 2) для всіх $k \in$

$\mathbb{N}$ множина F_k є множиною другої категорії Бера; 3)для всіх $k \in \mathbb{N}$ множина N_k є множиною першої категорії Бера.

Нехай $N_k(\mathbb{P}) = H^k(\mathbb{P}) \backslash F_k(\mathbb{P})$. У випадку, коли $\mathbb{P}$ — зліченне числове поле, то у розумінні топології, породженої метрикою $d_{k,Y}$, має місце таке твердження [4], [5].

Теорема 5. *Множини $F_k(\mathbb{P})$ та $N_k(\mathbb{P})$ є множинами першої категорії Бера.*

Якщо $\mathbb{P}$ — незліченне числове поле, то правильними є наступні твердження [4].

Лема 2. *Множина $F_k(\mathbb{P})$, $N_k(\mathbb{P})$ — підмножини в $H^k(\mathbb{P})$, які побудовані вище. Тоді*

1) Множина $F_k(\mathbb{P})$ є всюди щільною в $H^k(\mathbb{P})$;

2) Множина $F_k(\mathbb{P})$ є множиною другої категорії Бера;

3) Множина $N_k(\mathbb{P})$ — ніде не щільна в $H^k(\mathbb{P})$.

На основі леми 2, отримуємо таке твердження.

Теорема 6. *Більшість k-породжених ($k \in \mathbb{N}$) піднапівгруп напівгрупи $H(\mathbb{P})$ у випадку незліченного числового поля $\mathbb{P}$, є вільними у категорному розумінні Бера.*

Зважаючи на теорему 6, приходимо до висновку, що “більшість” k-породжених піднапівгруп групи TLG трикутних лінійних автоморфізмів кільця $\mathbb{P}[x, y]$ над незліченним полем $\mathbb{P}$, є вільними; це розуміється у тому сенсі, що сукупність усіх кортежів довжини k, складених із перших компонент пар многочленів виду $(\alpha x\ +\ \beta\ , \gamma x + \tau y), f(x, y) \in \mathbb{P}^2, \alpha\tau \neq 0$, які визначають базис вільної піднапівгрупи у групі TLG, є “більшою” у категорному розумінні Бера, ніж сукупність тих кортежів довжини k, складених із перших компонент пар многочленів вказаного вигляду, які задають k-елементний базис піднапівгруп групи TLG, що не є вільними. У цьому випадку говоритememo, що маємо “більшість” у категорному розумінні Бера вільних k-породжених піднапівгруп групи TLG трикутних автоморфізмів за першою компонентою.

Зазначимо, що у випадку підгрупи усіх трикутних афінних автоморфізмів кільця многочленів $\mathbb{P}[x, y]$ у групі G, які визначаються парами многочленів виду

$$f(x, y) \mapsto f(\alpha x + \beta, g(x, y)), g(x, y), f(x, y) \in \mathbb{P}[x, y],$$

приходимо до аналогічного висновку про більшість вільних k-породжених піднапівгруп цієї групи.

Теорема 7. *Більшість k-породжених ($k \in \mathbb{N}$) піднапівгруп групи TLG трикутних лінійних автоморфізмів та групи усіх трикутних афінних автоморфізмів кільця многочленів $\mathbb{P}[x, y]$ від двох змінних над незліченним числовим полем $\mathbb{P}$, є вільними у категорному розумінні Бера за першою компонентою.*

Зауважимо, що у випадку $k = 1$ теорема 7 стверджує, що більшість циклічних піднапівгруп групи TLG трикутних лінійних автоморфізмів та групи усіх трикутних афінних автоморфізмів кільця многочленів $\mathbb{P}[x, y]$ у випадку незліченного поля $\mathbb{P}$ є нескінченними піднапівгрупами у категорному розумінні Бера.

Література

1. Довгей Ж.І., Сущанський В.І. *Будова групи унітрикутних автоморфізмів кільця многочленів від двох змінних над полем характеристики 0* // Матем. вісник НТШ. — 2009. — Т.6. — С.87–99.
2. Куратовский К. Топология, Т. 1. — М.: Мир, 1966. — 594 с.
3. Макар-Лиманов Л. *Автоморфизмы свободной ассоциативной алгебры с двумя образующими* // Функциональный анализ и приложения. — 1970. — Т.4, №3. — С. 107–108.
4. Сумарюк М.І. *Вільні напівгрупи та групи, що породжуються функціональними перетвореннями* // Дисертація на здобуття наук. ст. канд. фіз.-мат. наук. — К., 2010. — 118 с.
5. Сумарюк М.І. *Порівняння у розумінні категорії сукупності вільних піднапівгруп напівгрупи цілих лінійних перетворень* // 7-а міжнар. алг. кон. в Україні. Тези допов. — К., 2009. — С.136–137.
6. Arno van der Essen. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture, Birkhausen Verlag, Basel, 2000, 329 p.
7. Friedland Sh., Milnor J. *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Ergod. Th. & Dynam. Syst., **9** (1989), 67–99.
8. Gomez A., Meiss J.D. *Reversible polynomial automorphisms of the plane, the involutory case*, Phisic letters A, **312** (2003), 49–58.
9. Mac Lane S. Categories for the working mathematician. 2nd ed., Springer-Verlag, N.Y., 1998, 314 p.
10. Mikhalev A.A. , Shpilrain V., Jie-Tai Yu. Combinatorial Methods. Free groups, Polynomials and Free Algebras, Springer, N.Y. etc, 2004, 314 p.
11. Nykyforchyn O.R. *On the axiom of continuity, openness and bicommutativity*, Meth. Func. Anal. and Top., **4** (1998), 82–85.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна

Надійшло 09.05.2011

Dovghey Zh., Sumaryuk M. *Free subsemigroups in automorphism group of a polynomial ring of two variables over number fields*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 64–70.

Sufficient conditions under which the semigroup generated by two automorphism of the polynomial ring in two variables over a number field P will be free are given. The set of free finitely generated subsemigroups of the triangle automorphism subgroup in $AutP[x, y]$ and the set of non-free finitely generated of semigroups of this groups are compared in categorial sense of Baire.

Довгей Ж.И., Сумарюк М.И. *Свободные подполугруппы в группе автоморфизмов кольца многочленов от двух переменных над числовыми полями* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 64–70.

Приводятся достаточные условия, при выполнении которых полугруппа, порожденная двумя автоморфизмами кольца многочленов от двух переменных над произвольным числовым полем, будет свободной. Сравнивается в смысле категории Бера совокупность свободных конечно порожденных подполугрупп группы треугольных автоморфизмов из совокупностью конечно порожденных подполугрупп этой группы, которые не свободны.