Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 517.929

Качурівський Р.І.

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Качурівський Р.І. *Про обмежені розв'язки диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 77–82.

Одержані нові достатні умови існування обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків диференціально-функціональних рівнянь нейтрально типу. Крім того, досліджені деякі властивості таких розв'язків.

Розглянемо рівняння вигляду

$$\dot{x}(t+1) = a\dot{x}(t) + bx(qt) + c\dot{x}(qt), \tag{1}$$

де a, b, c, q — деякі дійсні сталі, яке було об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1-7] та цитовану у них літературу), і в даний час ряд питань їх теорії достатньо добре вивчені. Продовжуючи ці дослідження, в даній статті встановлено нові достатні умови існування неперервно-диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків рівняння і розроблено метод їх побудови.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $a > 1$, $q > 1$;

2) $2\alpha \dfrac{l}{a^q - a} \le \Delta < 1$, *де* $\alpha = \max\left\{1; \dfrac{1}{|\ln a|}\right\}$, $l = \max\left\{|b|; |c|\right\}$.

Тоді рівняння (1) має сім'ю неперервно-диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(t)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Ключові слова і фрази: диференціально-функціональне рівняння, обмежений розв'язок, послідовні наближення.

© Качурівський Р.І., 2011

Доведення. Розв'язки рівняння (1) будуються у вигляді ряду

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t)$, $i=0,1,\ldots,$ — неперервно-диференційовні функції, які визначаються співвідношеннями

$$x_0(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}a^{\tau}\omega(\tau)d\tau, \tag{3_0}$$

$$x_i(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\sum_{j=1}^{\infty}a^{j-1}\Big(bx_{i-1}(q(\tau-j))+c\dot{x}_{i-1}(q(\tau-j))\Big)d\tau, \tag{3_i}$$

$$i=1,2,\ldots\ ,$$

$\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична функція.

Приймаючи до уваги умови теореми, методом математичної індукції неважко показати, що при $t\in\mathbb{R}^-$, $i=0,1\ldots,$ мають місце оцінки:

$$|\dot{x}_i(t)|\le M_1\Delta^i a^t,\qquad |x_i(t)|\le M_2\Delta^i a^t, \tag{4}$$

$$i=0,1,\ldots\ ,$$

де M_1, M_2 — деякі додатні сталі, $M_2=M_1\dfrac{1}{|\ln a|}$.

Отже, ряд (2), елементи якого визначаються співвідношеннями (3_i), $i=0,1,\ldots$, рівномірно збігається при $t\in\mathbb{R}^-$ до деякої неперервно-диференційовної функції $x(t,\omega(t))$, яка залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(t)$ і задовольняє умови

$$|\dot{x}(t,\omega(t))|\le\frac{M_1}{1-\Delta}a^t,\qquad |x(t,\omega(t))|\le\frac{M_2}{1-\Delta}a^t. \tag{5}$$

Теорема 1 доведена. □

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) $a>1$, $q>1$;

2) $2\alpha\dfrac{l}{a^q-a}\le\Delta<\dfrac{1}{2}$, *де* $\alpha=\max\Big\{1;\dfrac{1}{|\ln a|}\Big\}$, $l=\max\Big\{|b|;|c|\Big\}$.

Тоді довільний неперервно-диференційовний обмежений при $t\in\mathbb{R}^-$ *розв'язок* $\gamma(t)$ *рівняння (1) можна представити у вигляді ряду (2), в якому функції* $x_i(t)=x_i(t,\omega(t))$, $i=0,1,\ldots,$ *визначаються співвідношеннями* (3_i), $i=0,1,\ldots,$ *а* $\omega(t)$ *— деяка неперервна 1-періодична функція.*

Для доведення теореми достатньо показати, що для довільного неперервно-диференційовного обмеженого при $t\in\mathbb{R}^-$ розв'язку $\gamma(t)$ рівняння (1) існує неперервна 1-періодична функція $\omega(t)$, така що виконується співвідношення

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t, \omega(t)). \tag{6}$$

Такою, зокрема, буде функція $w(t) = \lim\limits_{m\to\infty} \omega_m(t)$, де $w_m(t)$, $m = 0, 1, \dots$ визначаються за допомогою співвідношень

$$\omega_0(t) = a^{-t}\dot{\gamma}(t), \tag{7}$$

$$\omega_m(t) = a^{-t}\dot{\gamma}(t) - a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} \dot{x}_i(t, \omega_{m-1}(t)), \quad m = 1, 2, \dots\ . \tag{8}$$

Розглянемо тепер систему рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t+1) = A\dot{x}(t) + Bx(qt) + C\dot{x}(qt), \tag{9}$$

де A, B, C — дійсні сталі $(n\times n)$-матриці, q — дійсна стала. При цьому відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, задовольняють умови

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad |\lambda_i| \neq 0,\ 1, \quad i, j = 1, 2, \dots n.$$

Тоді, як відомо, існує заміна змінних

$$x(t) = Sy(t),$$

де S — деяка стала неособлива $(n\times n)$-матриця, яка приводить систему рівнянь (9) до вигляду

$$\dot{y}(t+1) = \Lambda\dot{y}(t) + \widetilde{B}y(qt) + \widetilde{C}\dot{y}(qt), \tag{10}$$

де $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\widetilde{B} = S^{-1}BS$, $\widetilde{C} = S^{-1}CS$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, $q > 1$;

2) $\lambda_*^q > \lambda^*$, $2\beta\dfrac{l}{\lambda_*^q - \lambda^*} \leq \Delta < 1$, *де*

$$\lambda_* = \min_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}, \quad \lambda^* = \max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}, \quad \beta = \max\left\{1; \frac{1}{|\ln\lambda_*|}\right\}, \quad l = \max\left\{|\widetilde{B}|; |\widetilde{C}|\right\},$$

$$|\widetilde{B}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|, \quad |\widetilde{C}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|.$$

Тоді система рівнянь (10) має сім'ю неперервно-диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Розв'язки системи рівнянь (10) будемо шукати у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{11}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервно-диференційовні вектор-функції, що є розв'язками послідовності систем

$$\dot{y}_0(t+1) = \Lambda \dot{y}_0(t), \tag{12_0}$$

$$\dot{y}_i(t+1) = \Lambda \dot{y}_i(t) + \widetilde{B} y_{i-1}(qt) + \widetilde{C} \dot{y}_{i-1}(qt), \tag{12_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots \ .$$

Системи рівнянь (12_i), $i = 0, 1, \ldots$, мають множину неперервно-диференційовних при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \Lambda^{\tau} \omega(\tau) d\tau, \tag{13_0}$$

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \Big(\widetilde{B} y_{i-1}(q(\tau - j)) + \widetilde{C} \dot{y}_{i-1}(q(\tau - j)) \Big) d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots \ , \tag{13_i}$$

де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична вектор-функція. Розмірковуючи за індукцією, неважко показати, що так визначені вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є неперервно-диференційовними при $t \in \mathbb{R}^-$ і задовольняють умовам

$$|y_0(t)| \le M_1 \lambda_*^t, \qquad |\dot{y}_0(t)| \le M_2 \lambda_*^t, \tag{14_0}$$

$$|y_i(t)| \le M_1 \Delta^i \lambda_*^{qt}, \qquad |\dot{y}_i(t)| \le M_2 \Delta^i \lambda_*^{qt}, \tag{14_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots$$

де M_1, M_2 — деякі додатні сталі, $M_1 = M_2 \dfrac{1}{|\ln \lambda_*|}$.

Із (14_i), $i = 0, 1, \ldots$, безпосередньо випливає, що ряд (11), члени якого визначаються співвідношеннями (13_i), $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^-$ до деякої неперервно-диференційовної вектор-функції $y(t, \omega(t))$, яка залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$ і задовольняє умови

$$|y(t, \omega(t))| \le \frac{M_1}{1 - \Delta} \lambda_*^t, \qquad |\dot{y}(t, \omega(t))| \le \frac{M_2}{1 - \Delta} \lambda_*^t.$$

Теорема 3 доведена. □

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $q > 1$;
2) $\lambda_*^q > \lambda^*$, $2\beta \dfrac{l}{\lambda_*^q - \lambda^*} \le \Delta < \dfrac{1}{2}$, *де*

$$\lambda_* = \min_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}, \quad \lambda^* = \max_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}, \quad \beta = \max\left\{1; \frac{1}{|\ln\lambda_*|}\right\}, \quad l = \max\left\{|\widetilde{B}|; |\widetilde{C}|\right\},$$

$$|\widetilde{B}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|, \quad |\widetilde{C}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|.$$

Тоді довільний неперервно-диференційовний обмежений при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язок $\gamma(t)$ системи (10) можна подати у вигляді ряду (11), в якому вектор-функції $y_i(t) = y_i(t, \omega(t))$, $i = 0, 1, \ldots,$ визначаються співвідношеннями (13_i), $i = 0, 1, \ldots,$ а $\omega(t)$ — деяка неперервна 1-періодична вектор-функція.

Аналогічні результати отримані і для систем диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$\dot{y}(t+1) = \Lambda\dot{y}(t) + F(t, y(qt), \dot{y}(qt)), \tag{15}$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $q = const$, $F : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Зокрема, доведена наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $q > 1$;
2) $F(t, 0, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}^-$;
3) для довільних $(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$, $(t, \bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ має місце співвідношення

$$|F(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) - F(t, \bar{x}, \bar{y})| \le L(|\bar{\bar{x}} - \bar{x}| + |\bar{\bar{y}} - \bar{y}|),$$

де L — деяка додатна стала;
4) $\lambda_*^q > \lambda^*$, $2\beta\dfrac{L}{\lambda_*^q - \lambda^*} \le \Delta < 1$, де

$$\lambda_* = \min_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}, \quad \lambda^* = \max_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}, \quad \beta = \max\left\{1; \frac{1}{|\ln\lambda_*|}\right\}.$$

Тоді система рівнянь (15) має сім'ю неперервно-диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — неперервно-диференційовні вектор-функції, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$ і визначаються співвідношеннями

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \Lambda^\tau \omega(\tau) d\tau,$$

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} F\Big(\tau - j, y_0(q(\tau - j)), \dot{y}_0(q(\tau - j))\Big) d\tau,$$

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \Big(F\Big(\tau - j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(q(\tau - j)), \sum_{j=0}^{i-1} \dot{y}_j(q(\tau - j))\Big) - F\Big(\tau - j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(q(\tau - j)), \sum_{j=0}^{i-2} \dot{y}_j(q(\tau - j))\Big)\Big) d\tau,$$

$$i = 2, 3, \ldots$$

Література

1. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н. *Теория уравнений нейтрального типа* // Мат. анализ (Итоги науки и техники). — 1981. — Т.19. — С.55–126.
2. Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж. : Издательство Воронежского университета, 1990. — 167 с.
3. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — К. : Наукова думка, 1984. — 212 с.
4. Пелюх Г.П. *О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений* // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54, №12 — С. 1626–1633.
5. Пелюх Г.П. *О свойствах решений предельной задачи для систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа* //Укр. мат. журн.— 2008. — Т.60, №2. — С.217–224.
6. Пелюх Г.П., Сівак О.А. *Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом* // Нел. кол. — 2010. — Т.13, №1. — С.75–95.
7. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

Інститут математики НАН України,
Київ, Україна

Надійшло 08.02.2011

Kachurivsky R.I *On solutions of differential-functional equations of neutral type*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 77–82.

We obtain sufficient conditions for existence of continuously differentiable solutions of differential-functional equations of neutral type with linear deviations of the argument bounded on $t \in \mathbb{R}^-$. We also investigate the structure of these solutions.

Качуривский Р.И. *Об ограниченных решениях дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 77–82.

Получены достаточные условия существования ограниченных при $t \in \mathbb{R}^-$ решений дифференциально- функциональных уравнений нейтрального типа, а также изучены некоторые их свойства.