Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 517.948, 517.946

Копач М.І.[1], Обшта А.Ф.[2], Шувар Б.А.[2]

АНАЛОГИ МОНОТОННОГО МЕТОДУ НЬЮТОНА

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Аналоги монотонного методу Ньютона* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 83–87.

Досліджені близькі до методу Ньютона алгоритми для рівнянь з монотонними операторами.

Вступ

Діапазон практичної застосовності методу Ньютона, основний варіант якого для рівняння

$$x = Fx \tag{1}$$

описується за допомогою формули

$$x_{n+1} = Fx_n + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n),\ \ (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{2}$$

обмежений можливістю вдалого вибору початкового наближення x_0, вимогою про знаходження похідної $F'(x)$ і оператора $\Gamma w = \Gamma(I - F'(x))^{-1}w$ оберненого до лінійного щодо w оператора $(I - F'(x))w$ при кожному $x = x_n$, де I — тотожний оператор. Зважаючи на те, що реалізація перерахованого вище на практиці можлива тільки у виняткових ситуаціях, розроблена низка споріднених з (2) методів (див. напр., [4, c. 180-236] та бібліографію в [4]). Їх структура охоплюється формулою

$$x_{n+1} = Fx_n + A(x_n)(x_{n+1} - x_n) \tag{3}$$

з неперервним щодо z, w та лінійним щодо w оператором $A(z)w$. З-поміж них найбільш важливими є метод хорд, метод хибного положення, метод Стеффенсена, метод Ньютона-Якобі та ін. Їх дослідження переважно ґрунтується на припущенні про існування похідної Фреше $F'(x)$. Це означає, що у (3) маємо

$$A(x)w = (F'(x) + \alpha(x))w$$

Робота підтримана грантом ДФФД України № Ф35/531-2011

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A45.

Ключові слова і фрази: аналоги методу Ньютона, квадратична збіжність, похідна Фреше.

з деяким конкретизованим для кожного окремого методу лінійним щодо w оператором $\alpha(x)w$ (див. напр., [5]). Достатні локальні умови збіжності алгоритму (2) отримуються з рівності

$$x_{n+1} - x^* = F'(x_n)(x_{n+1} - x^*) + \int_0^1 (F'(x^* + t(x_n - x^*)) - F'(x_n))(x_n - x^*)dt, \quad (4)$$

де x^* — розв'язок рівняння (1). Формула (4) є очевидним наслідком рівності

$$Fy - Fx = \int_0^1 (F'(x + t(y - x)) - F'(x))(y - x)dt$$

(див. [2, с.82]). Припускаючи, що

$$\|F'(x + t(y - x)) - F'(x)\| \leq \beta(y, x)|\ y - x\|, \quad (5)$$

для алгоритму (2) можна забезпечити квадратичну збіжність.

Для алгоритму (3) квадратичну збіжність отримаємо, якщо

$$\|Fx - Fy - A(x)(x - y)\| \leq q\|x - y\|^2.$$

При існуванні похідної Фреше $F'(x)$, рівність (4) і нерівність (5) можна потрактувати відповідно, як співвідношення

$$x_{n+1} - x^* = A(x_n)(x_{n+1} - x^*) = \int_0^1 (F'(x^* + t(x_n - x^*)) - A(x_n))(x_n - x^*)dt$$

$$\|F'(x^* + t(x_n - x^*)) - A(x_n)\| \leq \beta(x_n, x^*)\|x_n - x^*\|$$

1 Побудова основного алгоритму

Нехай E — напіввпорядкований банахів простір, тобто, напіввпорядкованість в E узгоджена з нормою в E у такий спосіб, що співвідношення $\theta \leq y \leq z$ призводять до нерівності $\|y\| \leq \|z\|$, де θ — нульовий елемент в E. Вважатимемо задля спрощення формального викладу, що оператори, які тут фігурують, означені при відповідних значеннях аргументів з E і отримують значення з E.

Постулюємо такі припущення:

(A) Заданий лінійний, неперервний щодо w, неперервний неспадний щодо y, z оператор $\alpha(y, z)w$, для яких з того що $y \leq z$ матимемо

$$G(y, z)(z - y) \leq Fz - Fy \leq (G(y, z) + \alpha(y, z))(z - y),$$

причому, якщо $w \geq G(y, z)w$, то $w \geq \theta$.

(B) Заданий елемент u, для якого $u \leq Fu$. Приймемо

$$y_0 = u \quad (6)$$

і означимо y_1 як розв'язок рівняння

$$y_1 = G(y_0, y_0)(y_1 - y_0) + Fy_0. \quad (7)$$

Будемо вважати, що y_1 існує, і при кожному $n = 1, 2, \ldots$ має розв'язок рівняння

$$y_{n+1} = G(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) + Fy_n. \quad (8)$$

2 Монотонність ітерації

Обгрунтуємо співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} (n = 0, 1, ...). \tag{9}$$

З (6), (7) та умови (B) випливає, що $y_0 \le y_1$ як наслідок співвідношень

$$y_1 - y_0 \ge G(y_0, y_0)(y_1 - y_0) + Fy_0 - Fy_0 = G(y_0, y_0)(y_1 - y_0)$$

та умови (A). З цього та рівностей (7), (8), а також з лівої частини нерівності отримуємо $Fy_1 - y_1 = Fy_1 - G(y_0, y_0) - Fy_0 \ge G(y_1, y_0)(y_1 - y_0) - G(Y_0, y_0)(y_1 - y_0)$. Беручи до уваги монотонність $G(y, z)$ і нерівність $y_1 \ge y_0$, знаходимо, що $Fy_1 \ge y_1$. На підставі отриманих співвідношень $y_0 \le y_1$ та $Fy_1 \ge y_1$. Застосуємо принцип математичної індукції. Припустимо, що $y_{n-1} \le y_n$, $y_n \le Fy_n$. Спираючись на співвідношення

$$y_{n+1} - y_n = G(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) + Fy_n - G(y_{n-2}, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) - Fy_n$$

$$\ge G(y_{n+1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) + G(y_{n-1}, y_n)(y_n - y_{n-1}) - G(y_{n-2}, y_{n-1})(y_n - y_{n-1})$$

$$= G(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) + G(y_{n-1}, y_n) - G(y_{n-2}, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) \ge G(y_{n+1}, y_n)(y_{n+1} - y_n)$$

та умову (A) можна вважати доведеним, що $y_n \le y_{n+1}$. Це дозволяє обгрунтувати нерівність $y_{n+1} \le Fy_{n+1}$, оскільки

$$Fy_{n+1} - y_{n+1} = -G(y_{n+1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) + Fy_{n+1} - Fy_n \ge -G(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n)$$

$$+G(y_n, y_{n+1})(y_{n+1} - y_n) \ge (G(y_n, y_{n+1}) - G(y_{n-1}, y_n))(y_{n+1} - y_n) \ge \theta.$$

Таким чином, доведеним є наступний результат.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (A) і (B), то для послідовності $\{y_n\}$, побудованої за допомогою формул (6)–(8) мають місце співвідношення (9).*

3 Збіжність ітераційного процесу

Теорема 2. *Якщо виконані умови теореми 1, існує $\Gamma(y, z) = (I - G(y, z))^{-1}$, то з*

$$\|H\| \le q < 1, \tag{10}$$

де $H = H(x, y, z) = (I - G(y, z))^{-1}(\alpha(y, z) + G(z, x) - G(y, x))$, випливає збіжність ітерацій (6)–(8) до розв'язку x^* рівняння 1, і мають місце оцінки

$$\|y_{n+1} - x^*\| \le q\|y_n - x^*\|. \tag{11}$$

Доведення. З умов теореми одержуємо, що

$$y_{n+1} - y_n = G(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) - G(y_{n-2}, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) + Fy_n - Fy_{n-1}$$

$$\le G(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) + (G(y_{n-1}, y_n) - G(y_{n-2}, y_{n-1}) + \alpha(y_{n-1}, y_n))(y_n - y_{n-1}).$$

Це є підставою для оцінки

$$\|y_{n+1} - y_n\| \le q\|y_n - y_{n-1}\|.$$

Тому можна вважати, що послідовність $\{y_n\}$, побудована за допомогою формул (6)–(8) збігається до x^*, де x^* є розв'язоком (1). Справедливим є співвідношення:

$$x^* - y_{n+1} = Fx^* - G(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) - F(y_n) \leq G(y_n, x^*)(x^* - y_n)$$

$$+\alpha(y_n, x^*)(x^* - y_n) + G(y_{n+1}, y_n)(x^* - y_{n+1}) - G(y_{n-1}, x^*)(x^* - y_n)$$

$$= G(y_{n-1}, y_n)(x^* - y_{n+1}) + (G(y_n, x^*) - G(y_{n-1}, x^*) + \alpha(y_n, x^*))(x^* - y_n).$$

Враховуючи існування оператора $\Gamma(y, z)$ та умову (10), приходимо до оцінки (11). □

4 Умови квадратичної збіжності

Нехай $G(y, z)$ не залежить від z. Тоді в умовах попередніх теорем замість $G(y, z)$ маємо $G(y)$, і оцінку (11) можна покращити. У цьому випадку для оператора H матимемо

$$H = H(y, z) = (I - G(y))^{-1}(G(z) - G(y) + \alpha(y, z)).$$

Якщо, крім того, при цьому постулюємо виконання умов теореми (1) і вважаємо заданим оператор $L(y, z)w$ лінійний, додатний щодо w, для якого маємо

$$G(z) - G(y) + \alpha(y, z) \leq L(y, z)(z - y),$$

то для ітераційного алгоритму (6)–(8), описаного за цих обставин формулою

$$y_{n+1} = G(y_n)(y_{n+1} - y_n) + Fy_n \quad (n = 0, 1, ...), \tag{12}$$

матимемо квадратичний характер збіжності. Очевидно, що у випадку, коли

$$\|L(y, z)\| \leq a, \quad \|(I - G(y))^{-1}\| \leq b, \quad ab\|y_1 - y_0\| \leq q < 1,$$

отримуються оцінки

$$\|y_{n+1} - y_n\| \leq h\|y_n - y_{n-1}\|^2, \quad \|y_{n+1} - x^*\| \leq h\|y_n - x^*\|^2, \quad \text{де} \quad h \leq ab.$$

Зауваження 4.1. *Якщо $G(x)$ в (12) є похідною Фреше $F'(x)u$, яка є невід'ємним неперервним щодо u оператором, то за тих припущень, за яких отримані нерівності (9), монотонний метод Ньютона і квазілінеаризація Р. Беллмана (див. [1]) можна ототожнювати (див. також [4]).*

Зауваження 4.2. *Хибність твердження, яке іноді зустрічається, про те, що при знакосталості першої і другої похідної Фреше метод Ньютона 2 тотожній з двостороннім методом Чаплигіна, випливає з наступного.*

Для цього, як приклад, використаємо випадок, коли рівняння (1) є скалярним рівнянням $x = f(x)$ з дійсною функцією $f(x)$. Нехай задані функції u, v, що задовольняють нерівності $u \leq f(u), v \geq f(v), u \leq v$, і при $x \in [u, v]$ існують додатні похідні $f'(x), f''(x)$.

Один з варіантів методу Чаплигіна для цього випадку описують формули

$$y_{n+1} = f'(y_n)(y_{n+1} - y_n) + f(y_n), \quad y_0 = u,$$
$$z_{n+1} = f'(y_n)(z_{n+1} - z_n) + f(z_n), \quad z_0 = v, n = 0, 1, ...,$$

причому мають місце нерівності

$$u = y_0 \le y_1 \le ... \le y_n \le z_n \le ... \le z_1 \le z_0 = v. \tag{13}$$

Тоді для цього випадку метод Ньютона описуватиметься за допомогою формул

$$y_{n+1} = f'(y_n)(y_{n+1} - y_n) + f(y_n), y_0 = u, z_{n+1} = f'(z_n)(z_{n+1} - z) + f(z_n), z_0 = v. \tag{14}$$

Можна переконатись, (див. напр., [3]), [6], що для алгоритму (14) співвідношення (13) за наведених умов не виконуються.

Література

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — М.: Мир, 1968. – 183 с.
2. Далецкий Ю.Л. Крейн М.С. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
3. Копач М.І., Обшта А.Ф. Шувар Б.А. *Застосування аналогів двосторонніх методів Курпеля до звичайних диференціальних рівнянь* // Карпат. матем. публ. — 2010. — Т.2.,№2. — С. 85–89.
4. Ортега Дж. Рейнболдт В. Итерационные методы решений нелинейых систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975. — 558 с.
5. Шахно С. *Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для розділених різниць першого порядку* // Матем. вісник НТШ. — 2007. — Т.4. — С. 296–303.
6. Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. — Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. — 515 с.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна,

[2] Національний університет "Львівська Політехніка",
Львів, Україна

Надійшло 15.09.2011

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *The analogs of monotonous methods of Newton*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 83–87.

In this article there are investigated close to the method of Newton algorithms for equations with monotone operators.

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Аналоги мотонного метода Ньютона* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 83–87.

Исследованы близкие к методу Ньютона алгоритмы для уравнений с монотоными операторами.