Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 512.542.3+512.547

Леонов Ю.Г.

ТОЧНІ ТРИКУТНІ ЗОБРАЖЕННЯ P-ГРУП КАЛУЖНІНА НАД ПОЛЕМ ІЗ P ЕЛЕМЕНТІВ

Леонов Ю.Г. *Точні трикутні зображення p-груп Калужніна над полем із p елементів* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 108–113.

В роботі вивчаються точні трикутні зображення силовських p-підгруп симетричних груп S_{p^n}, $n \in \mathbb{N}$ – груп Калужніна. Зокрема, ми описуємо матричні образи системи твірних цих груп. Розглядаються зображення індуктивної границі p-груп Калужніна $\hat{P}_p$ в групі унітрикутних нескінченновимірних матриць та матричні образи (нескінченної) системи твірних групи $\hat{P}_p$ цього зображення.

Вступ

В роботі [4] було вперше встановлено точне унітрикутне зображення силовських p-підгруп $P_{p,n}$ симетричних груп $S_{p^{n+1}}$ степеня p^{n+1} над полем із p елементів. Група $P_{p,n}$ є добре відомою групою Калужніна (див. [1]), яка ізоморфна n-кратному вінцевому добутку циклічних груп $\mathbb{Z}_p$. Більш точно, послідовність груп Калужніна може бути визначена рекурентно: $P_{p,0} = \mathbb{Z}_p$, та $P_{p,n} = P_{p,n-1} \wr \mathbb{Z}_p$, при $n > 0$.

Нехай $UT_m(p)$ — група нижніх унітрикутних матриць (нижніх трикутних матриць з одиницями на головній діагоналі) над полем із p елементів. Має місце наступна теорема.

Теорема ([4])**.** *Для кожного $n \geq 0$ існує точне зображення*

$$f_{p,n} \,:\, P_{p,n} \to UT_m(p),$$

причому $m = p^n + 1$ є найменшим можливим числом з цією властивістю.

Метою нашої роботи є більш детальне вивчення зображень $f_{p,n}$. Зокрема, ми описуємо образи твірних груп $P_{p,n}$ у матричному вигляді. Зауважимо, що випадок $p = 2$ розглядався в роботах [3] та [5].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20C11, 20E22, 20H30.
Ключові слова і фрази: група Калужніна, трикутне зображення, індуктивна границя, шаблон матриці.
Робота виконана за підтримки ДФФД, договір № Ф40.1/009

1 Трикутні зображення груп $P_{p,n}$

Побудуємо зображення, про яке було вказано в роботі [4]. Розглянемо групу $P_{p,n}$. Згідно [2], кожний елемент $y \in P_{p,n}$ може бути представлений у вигляді таблиці

$$y = [y_0, \dots, y_k(t_1, \dots, t_k), \dots, y_n(t_1, \dots, t_n)],$$

де на k-тому місці ($k = 0, 1, \dots, n$) розташований поліном $y_k(t_1, \dots, t_k)$, який є представником мінімального степеня класів решт кільця поліномів $\mathbb{Z}_p[t_1, \dots, t_k]$ за модулем ідеалу, породженого поліномами виду $t_1^p - t_1, \dots, t_n^p - t_n$. Такі поліноми називатимемо редукованими. Кожен моном кільця редукованих поліномів $\mathbb{Z}_p[t_1, \dots, t_k]$ має вигляд $\alpha \cdot t_1^{b_1} \cdots t_n^{b_n}$, де $\alpha, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}_p$. Висотою монома назвемо число

$$h(\alpha \cdot t_1^{b_1} \cdots t_n^{b_n}) = 1 + \sum_{s=1}^{n} b_s \cdot p^{s-1}.$$

Моном висоти j з коефіцієнтом $\alpha = 1$ позначимо $t(j)$. Кожний поліном кільця редукованих поліномів $\mathbb{Z}_p[t_1, \dots, t_k]$ може бути однозначно представлений у вигляді суми мономів попарно різних висот наступним чином:

$$y_k(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^{p^k} y_{k,j} t(j), \tag{1}$$

де $t(j)$ – моном висоти j, $t(1) = 1$, $y_{k,j} \in \mathbb{Z}_p$. Висотою полінома y_k назвемо найбільшу з висот мономів в сумі (1) з ненульовим коефіцієнтом.

Для побудови точного трикутного зображення групи $P_{p,n}$ над полем із p елементів вкажемо мономорфізм групи $P_{p,n}$ в групу нижніх трикутних матриць $UT_{p^n+1}(p)$ за аналогією з роботою [3]. Означимо дію таблиці $y \in P_{p,n}$ на поліном g висоти j. Для даних n і g складемо таблицю елемента $\bar{g}$ у вінцевому добутку наступним чином. Перші n координат таблиці оберемо нульовими, а останню координату візьмемо рівною g. Легко бачити, що означення коректне і $\bar{g} \in P_{2,n}$. Розглянемо елемент $\bar{g}^y = y^{-1} \cdot \bar{g} \cdot y$. Усі координати його таблиці нульові, крім, можливо, останньої. Поліном, який розташовано на останній координаті, позначимо як g^y. Із означення видно, що висоти поліномів $h(g)$ і $h(g^y)$ збігаються. Будемо казати, що поліном g^y отримується дією елемента y на g.

Визначимо відображення $f_{p,n} : P_{p,n} \to UT_{p^n+1}(p)$ таким чином. Висота полінома на останній координаті таблиці $y \in P_{p,n}$ обмежена числом p^n. Розглянемо мономи $t(k)$ висот $k = 1, 2, \dots, p^n + 1$ і поліноми

$$t(k)^y = \sum_{j=1}^{k} u_{k,j} \cdot t(j).$$

Візьмемо квадратну матрицю $U = U(y)$ розмірності $p^n + 1$, визначену умовою

$$U(y)_{k,j} = \begin{cases} 0, & k < j, \\ u_{k,j}, & k \geq j. \end{cases} \tag{2}$$

З цього означення видно, що $U(y)_{i,i} = u_{i,i} = 1$ для кожної таблиці y. Відображення $f_{p,n}$ за теоремою 1 визначається рівністю $f_{p,n}(y) = U(y)$.

2 Матричні образи твірних групи $P_{p,n}$

Розглянемо групу $P_{p,n}$ для деякого $n \geq 0$ та її відому (див. напр. [6]) систему твірних

$$\xi_{i,n} = [0, \dots, 0, t_1^{p-1} \cdots t_i^{p-1}, 0, \dots, 0],$$

$0 \leq i \leq n$. В цій системі кожна таблиця є послідовністю із нульових поліномів за винятком i-ої координати, висота якої дорівнює p^i, $0 \leq i \leq n$.

Опишемо образи $f_{p,n}(\xi_{i,n})$ цих твірних. Для цього доцільно розглянути номер рядка, або стовпця матриці, використовуючи його p-адичний розклад. А саме, для натурального $k \leq p^n - 1$, розглянемо послідовність елементів множини $\{0, 1, \dots, p-1\}$ довжини n: $k|_p^n = k_n \dots k_1$, яка задовольняє умову

$$k = \sum_{s=1}^{n} k_s \cdot p^{s-1}$$

(індексація послідовності починається з одиниці та ведеться справа наліво). Зрозуміло, що $t(k+1) = t_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n}$. Нижче будемо розглядати біноміальні коефіцієнти $\binom{z_1}{z_2}$, $z_1 \geq z_2 \geq 0$ за модулем p. Будемо вважати також, $\binom{z_1}{z_2} = 0$, при $z_1 < z_2$.

Лема 1. *Нехай* $\Xi_{i,n} = f_{p,n}(\xi_{i,n}) \in UT_{p^n+1}(p)$, $0 \leq i < n$. *Тоді, для числа* k, $1 \leq k \leq p^n$, *що задовольняє умову* $(k-1)|_p^n = k_n \dots k_1$, *виконуються наступні рівності:*
1. $(\Xi_{i,n})_{k,k} = 1$.
2. $(\Xi_{i,n})_{k,j} = \binom{k_{i+1}}{u}$, *якщо* $k_{i+1} \neq 0$, *та* j *задовольняє умову*

$$(j-1)|_p^n = k_n \dots k_{i+2} u (k_i - 1) \dots (k_1 - 1)$$

(сумування елементів послідовності здійснюється за модулем p*),* $0 \leq u \leq p-1$.
3. $(\Xi_{i,n})_{k,j} = 0$ *в інших випадках.*

Доведення. Нехай $\Xi_{i,n} \in UT_{p^n+1}(p)$, та $k \in \mathbb{N}$ задовольняють умови леми. Перший пункт леми є очевидним тому що він випливає з означення зображення. Для доведення п.2 і п.3 розглянемо $t(k)^{\xi_{i,n}}$, та отримаємо потрібний вигляд k-ого рядка матриці $\Xi_{i,n}$ за означенням зображення $f_{p,n}$. Маємо,

$$t(k)^{\xi_{i,n}} = t_1^{k_1} \cdots t_i^{k_i} (t_{i+1} + t_1^{p-1} \cdots t_i^{p-1})^{k_{i+1}} t_{i+2}^{k_{i+2}} \cdots t_n^{k_n}.$$

Зауважимо, що

$$(t_{i+1} + t_1^{p-1} \cdots t_i^{p-1})^{k_{i+1}} = t_{i+1}^{k_{i+1}} + \sum_{u=0}^{k_{i+1}-1} \binom{k_{i+1}}{u} t_{i+1}^{u} (t_1^{p-1} \cdots t_i^{p-1})^{k_{i+1}-u}.$$

Крім того, $(t_i^{p-1})^s = t_i^{p-1}$, для $1 \leq i \leq p$ та $0 < s \leq p-1$. Звідси отримуємо, що коефіцієнт при мономі $t_1^{p-1+k_1} \cdots t_i^{p-1+k_i} t_{i+1}^{u} t_{i+2}^{k_{i+2}} \cdots t_n^{k_n}$ полінома $t(k)^{\xi_{i,n}}$ дорівнює $\binom{k_{i+1}}{u}$ і, таким чином, виконується пункт 2 твердження леми. Оскільки в поліномі $t(k)^{\xi_{i,n}}$ інших доданків немає, то і коефіцієнти при інших мономах є нульовими, звідки випливає, що в відповідних стовпцях матриці $\Xi_{i,n}$ k-ого рядка стоять нулі. Лему доведено. $\square$

Окремий випадок зображення твірного $\xi_{n,n}$ виділимо в наступну лему.

Лема 2. *Нехай* $\Xi_{n,n} = f_{p,n}(\xi_{n,n}) \in UT_{p^n+1}(p)$. *Тоді,*

$$(\Xi_{n,n})_{k,j} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 1, & k = j+1 = p^n+1, \\ 0, & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

для усіх $1 \le k, j \le p^n + 1$.

Доведення не важко провести за аналогією з доведенням леми 1.

3 Матричні образи твірних індуктивної границі груп $P_{p,n}$

Побудуємо індуктивну границю $\hat{P}_p = \cup_{n=0}^{\infty} P_{p,n}$ груп $P_{p,n}$. Кожен елемент цієї групи можна розглядати у вигляді нескінченної послідовності редукованих многочленів $y = [y_0, y_1(t_1), y_2(t_1,t_2), \dots]$ за аналогією із скінченними таблицями Калужніна. При цьому, кожна таблиця складається з нульових поліномів, починаючи з деякого місця в послідовності.

З означення добутку таблиць із вінцевого добутку $P_{p,n}$ випливає, що поліном $t(j)^y$, $1 \le j \le p^n$, не залежить від фіксованого числа n. Розглянемо при $n > m$ гомоморфізм $\tilde{\tau}_{n,m} : P_{p,n} \to P_{p,m}$, який видаляє зайві координати в кінці таблиці, та гомоморфізм $\tau_{n,m} : P_{p,n} \to P_{p,m}$, який дописує (в кінці послідовності) необхідні нульові координати при $n < m$. Дію $y \in P_{p,n}$ на $t(j)$ можна розглянути у вінцевому добутку $P_{p,m}$, $m = [\log_p(j+1)]$, поклавши

$$t(j)^y = \begin{cases} t(j)^{\tilde{\tau}_{n,m}(y)}, & n > m, \\ t(j)^{\tau_{n,m}(y)}, & n < m. \end{cases}$$

Нехай,

$$\tau_n = \lim_{\substack{m \to \infty \\ m > n}} \tau_{n,m} \,:\, P_{p,n} \to \hat{P}_p.$$

З означення відображень $\tau_{n,m}$ випливає, що $\tau_m(\xi_{n,m}) = \tau_n(\xi_{n,n})$ для всіх $m > n$, $n, m \in \mathbb{N}$. Крім того, система твірних групи $\hat{P}_p$ може бути вибраною у вигляді множини

$$\{\xi_n = \tau_n(\xi_{n,n})\,,\, n = 0, 1, \dots\}.$$

Сказане вище дозволяє зробити висновок, що система мономорфізмів

$$f_{p,n} :\; P_{p,n} \to UT_{p^n+1}(p),\, n \in \mathbb{N}$$

визначає мономорфізм

$$\hat{f}_p :\; \hat{P}_p \to UT(p),$$

де $UT(p)$ — група нескінченновимірних унітрикутних матриць над полем із p елементів. Відмітимо, що для довільної таблиці $y \in \hat{P}_p$ матриця $U = \hat{f}_p(y)$ визначається також за допомогою формули (2) з врахуванням розширеного означення дії y на $t(j)$.

Таким чином, має сенс розглянути образи твірних групи $\hat{P}_p$ в групі $UT(p)$. Для цього використаємо мову шаблонів, яка була вперше розроблена в роботі [3] для $p = 2$.

Нехай $M(p)$ — множина матриць над кільцем $\mathbb{Z}_p$, рядки та стовпці яких індексуються натуральними числами, з нульовими елементами над головною діагоналлю. Зрозуміло, що $UT(p) \subset M(p)$. Розглянемо також підмножину $M^0(p)$ множини $M(p)$, яка складається із усіх матриць з нульовою головною діагоналлю. На множині $M(p)$ природним чином визначена операція добутку матриць.

Для деякого натурального n, розглянемо множину $SH_n(p)$ квадратних матриць розмірності n, елементи яких є, у свою чергу, матрицями. А саме, множина $SH_n(p)$ складається з усіх матриць U з елементами, які задовольняють умови включення:

$$U_{i,j} \in \begin{cases} UT(p), & i = j, \\ M^0(p), & i < j, \\ M(p), & i > j. \end{cases} \tag{3}$$

Введемо на множині $SH_n(p)$ стандартну операцію добутку матриць розмірності n. Для зручності, будемо починати нумерацію рядків та стовпців матриць множини $SH_n(p)$ з нуля. Головним для нас є наступне

Твердження ([3]). *Множина $SH_n(p)$ із стандартною операцією добутку матриць розмірності n є групою, яка ізоморфна групі $UT(p)$.*

Найбільш природний ізоморфізм $sh_n : UT(p) \to SH_n(p)$ задається наступним чином. Для матриці $u = (u_{k,j})_{1 \le k,j < \infty} \in UT(p)$ матриця $U_{i,s} = sh_n(u)_{i,s}$ має таке означення:

$$(U_{i,s})_{k,j} = u_{i+(k-1)n+1, s+(j-1)n+1}, 0 \le i, s \le n-1.$$

Матрицю $U = sh_n(u)$ будемо називати шаблоном матриці u розмірності n. Нехай E та 0 – відповідно одинична та нульова матриці множини $M(p)$.

За допомогою шаблонів отримуємо повний опис образів твірних елементів групи $\hat{P}_p$ в групі матриць $UT(p)$ в наступній теоремі.

Теорема 1. *Нехай $\Xi_i = \hat{f}_p(\xi_i)$, $i \ge 0$, $M_i = sh_{p^{i+1}}(\Xi_i)$ – шаблон розмірності p^{i+1}. Тоді, для рядка з номером k, $0 \le k \le p^{i+1} - 1$, з кодом $k|_p^{i+1} = k_{i+1}k_i \dots k_1$ маємо наступні значення елементів матриці-шаблона:*
1. $(M_i)_{k,k} = E$;
2. $(M_i)_{k,j} = \binom{k_{i+1}}{u} \cdot E$, для стовпця j з кодом $j|_p^{i+1} = u(k_i - 1) \dots (k_1 - 1)$, $0 \le u < k_{i+1}$;
3. $(M_i)_{k,j} = 0$, в інших випадках.

Доведення. Твердження теореми є наслідком леми 1. Дійсно, для $i \ge 0$ розглянемо матрицю $\Xi_{i,i+1} = f_{p,i+1}(\xi_{i,i+1})$. Елемент матриці $(\Xi_{i,i+1})_{k,j}$, $1 \le j \le k \le p^{i+1}$ є коефіцієнтом при одночлені $t(j)$ в розкладі полінома $t(k)^{\xi_{i,i+1}}$. При $k \le p^i$, очевидно, $t(k)^{\xi_{i,i+1}} = t(k)$. Нехай, $p^i + 1 \le k \le p^{i+1}$ і $(k-1)|_p^{i+1} = k_{i+1}k_i \dots k_1$. Ясно, що $k_{i+1} \ne 0$. За лемою 1 $(\Xi_{i,i+1})_{k,j} = \binom{k_{i+1}}{u}$, якщо номер стовпця j задовольняє умову $(j-1)|_p^{i+1} = u(k_i - 1) \dots (k_1 - 1)$, $0 \le u < k_{i+1}$. В інших випадках, $(\Xi_{i,i+1})_{k,j} = 0$, при $k \ne j$ і $(\Xi_{i,i+1})_{k,k} = 1$.

Розглянемо тепер матрицю $\Xi_{i,n} = f_{p,n}(\xi_{i,n})$, $n > i + 1$ розмірності $p^n + 1$. В силу узгодженості відображень $f_{p,i+1}$ і $f_{p,n}$ (внаслідок означень) головний мінор розмірності

$p^{i+1}+1$ матриці $\Xi_{i,n}$ збігається з матрицею $\Xi_{i,i+1}$. Отже, для вищеописаних k і j виконується рівність $(\Xi_i)_{k,j} = (\Xi_{i,n})_{k,j} = \binom{k_{i+1}}{u}$.

Продовжуючи ці міркування для довільного n, та використовуючи доведення леми 1, бачимо, що рівність $(\Xi_i)_{k',j'} = \binom{k_{i+1}}{u}$ є справедливою, для довільного натурального l і $k' = k + p^{i+1}l$, $j' = j + p^{i+1}l$. Для пар чисел (k', j'), які не задовольняють вищенаписані рівності для пари (k, j) з кодами із умови леми 1, маємо $(\Xi_i)_{k',j'} = 0$, при $k' \neq j'$ і $(\Xi_i)_{k',k'} = 1$. Це означає, що для пар (k, j) із умови леми 1, виконується $(M_i)_{k-1,j-1} = \binom{k_{i+1}}{u} \cdot E$ (нагадаємо, що нумерація елементів в матриці-шаблоні починається з нуля). З вищеозначених міркувань випливає також рівність $(M_i)_{k-1,k-1} = E$, а інші елементи матриці-шаблону є нульовими матрицями. Теорему доведено. $\square$

Література

1. Калужнин Л.А. *Об одном обобщении силовских p-подгрупп симметрических групп* // Acta Math. Acad. Sci. Hung. — 1951. — №2. — С. 197–221.
2. Калужнин Л.А. Избранные главы теории групп. — К.: Изд-во КГУ, 1979. — 52 с.
3. Леонов Ю.Г. *Представление финитно-аппроксимируемых* 2*-групп бесконечномерными унитреугольными матрицами над полем из двух элементов* // Мат. Студ. — 2004. — Т.22, №2. — С. 134–140.
4. Леонов Ю.Г., Некрашевич В.В., Сущанський В.І. *Зображення вінцевих добутків унітрикутними матрицями* // Допов. НАН України. — 2005. — №4. — С. 29–33.
5. Леонов Ю.Г., Ясинський В.В. *Про зображення кратних вінцевих добутків груп* $\mathbb{Z}_2$ // Вісник Київського нац. ун-ту (фіз.-мат. науки). — 2007. — №2. — С. 14–17.
6. Ceccherini-Silberstein T., Leonov Yu. G. , Scarabotti F., Tolli F. *Generalized Kaloujnine groups, uniseriality and height of automorphisms*, Intern. Journal of Algebra and Computation, **15**, 3 (2005), 503–527.

Одеська національна академія зв'язку імені О.С.Попова,
Одеса, Україна
email: *leonov_ yu@yahoo.com*

Надійшло 23.06.2011

Leonov Y.G. *The faithful triangular representations of Kaloujnine p-groups over a p-element field*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 108–113.

The faithful triangular representations of finite Kaloujnine p-groups is studied. Images of generators of those groups are described. Infinite-dimensional representation of the direct limit of Kaloujnine p-groups is regarded.

Леонов Ю.Г. *Точные треугольные представления p-групп Калужнина над полем из p элементов* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 108–113.

В работе изучаются точные треугольные представления p-подгрупп симметрических групп S_{p^n}, $n \in \mathbb{N}$ – групп Калужнина. Описываются матричные образы системы порождающих этих групп. Рассматриваются представления индуктивного предела p-групп Калужнина $\hat{P}_p$ в группе унитреугольных бесконечномерных матриц и матричные образы (неограниченной) системы образующих группы $\hat{P}_p$ этого представления.