Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 517.51

Нестеренко В.В.

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ТОЧОК СИМЕТРИЧНОЇ КВАЗІНЕПЕРЕРВНОСТІ ТА КЛІКОВОСТІ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Нестеренко В.В. *Достатні умови існування точок симетричної квазінеперервності та кліковості функцій двох змінних* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 114–119.

Встановлено достатні умови, при яких для функції $f : X \times Y \to Z$ існує така залишкова в X множина A, що функція f симетрично квазінеперервна /клікова/ відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

Вступ

Поняття квазінеперервності і симетричної квазінеперервності було введено С.Кемпістим в [8] для дійснозначних функцій, які визначені на відкритих паралелепіпедах. Пізніше в [9] для функцій зі значеннями в метричному просторі Тільман увів поняття, яке слабше квазінеперервності, назвавши його кліковістю. Аналогічно до симетричної квазінеперервності для функції від двох змінних в [7] було введено поняття симетричної кліковості. Ще в [8] було доведено, що для функції від двох змінних квазінеперервність відносно кожної змінної гарантує квазінеперервність за сукупністю змінних. Для кліковості це не так.

Нехай X, Y — топологічні простори і Z — метричний простір з метрикою d. Позначимо через $\omega_f(A) = \sup\limits_{a,b \in A} d(f(a), f(b))$ — коливання функції f на множині A. Функція $f : X \to Z$ називається *квазінеперервною у точці* $x \in X$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і для кожного околу U точки x в X існує така відкрита непорожня множина U_1, що $U_1 \subseteq U$ і $\omega_f(\{x\} \cup U_1) < \varepsilon$. Функція $f : X \times Y \to Z$ називається *симетрично квазінеперервною відносно x в точці* $p_0 = (x_0, y_0)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільних околів U та V відповідно точок $x_0 \in X$ та $y_0 \in Y$ існують окіл U_1 точки x_0 в X і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі що $U_1 \times V_1 \subseteq U \times V$ і $\omega_f(\{p_0\} \cup (U_1 \times V_1)) < \varepsilon$. Функція f є *квазінеперервною чи симетрично квазінеперервною відносно* x, якщо вона є такою в кожній точці.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 54E35.

Ключові слова і фрази: квазінеперервність, кліковість, симетрична квазінеперервність, симетрична кліковість.

Функція $f : X \to Z$ називається *кліковою в точці* x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного околу U точки x_0 в X існує така відкрита непорожня множина U_1, що $U_1 \subseteq U$ і $\omega_f(U_1) < \varepsilon$, і просто *кліковою*, якщо вона є такою в кожній точці. Функція $f : X \times Y \to Z$ називається *симетрично кліковою відносно x в точці* $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільних околів U та V відповідно точок $x_0 \in X$ та $y_0 \in Y$ існують окіл U_1 точки x_0 в X і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі що $U_1 \times V_1 \subseteq U \times V$ і $\omega(U_1 \times V_1) < \varepsilon$. Функція f є *симетрично кліковою відносно x*, якщо вона є такою в кожній точці.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ будемо розглядати відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$, такі що $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$.

Умови симетричної квазінеперервності та кліковості для функцій від двох змінних досліджувалися в працях багатьох математиків. Так в [7] було встановлено, що функція $f : X \times Y \to Z$, яка є кліковою відносно однієї змінної та квазінеперервною відносно другої, є кліковою за сукупністю змінних. За тих самих умов на функцію в [3] показано, що в X існує залишкова множина E, така що функція f симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $E \times Y$, що для берівського простору X гарантує сукупну кліковість.

К. Беґель в [5] ввів властивість функції визначеної на добутку паралелепіпедів, яка пізніше в [1] була перенесена на випадок довільних топологічних просторів і названа горизонтальною квазінеперервністю. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним*, якщо для довільної точки $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, для довільних околів U, V і W точок x_0, y_0 і $z_0 = f(x_0, y_0)$ в просторах X, Y і Z відповідно існують відкрита непорожня множина U_1 в X і точка $y_1 \in V$, такі що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W$. За допомогою цієї властивості в [1] вдалося покращити теореми про точки сукупної неперервності та квазінеперервності, замінивши неперевність чи відповідно квазінеперервність відносно першої змінної на горизонтальну квазінеперервність.

Насправді в [1] при доведенні теорем про точки сукупної неперервності чи квазінеперервності використовувалася дещо слабша умова на функції, ніж горизонтальна квазінеперервність, а саме слабка горизонтальна квазінеперервність. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *слабко горизонтально квазінеперервним*, якщо для довільних відкритих множин U і V відповідно в X і Y та довільної множини $A \subseteq X$, такої що $U \subseteq \overline{A}$ виконується включення $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$. В [4] було показано, що слабко горизонтально квазінеперервна і квазінеперервна відносно другої змінної функція є сукупно квазінеперервною.

Зовсім нещодавно в [6] Бузіад і Труаллік, використовуючи поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності, яке в них назване X-квазінеперевністю знизу, встановили наступний результат, який нижче подано в дещо спрощеній формі.

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Z — метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ — слабко горизонтально квазінеперервна. Тоді:*

1) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і f^x — неперервна для всіх x з деякої залишкової множини, то існує залишкова в X множина A, така що функція f — неперервна в кожній точці множини $A \times Y$;

2) якщо простір Y має зліченну псевдобазу і f^x — квазінеперервна для всіх x з деякої залишкової множини, то існує залишкова в X множина A, така що функція f — симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $A \times Y$;

3) якщо простір Y має зліченну псевдобазу і f^x — клікова для всіх x з деякої залишкової множини, то існує залишкова в X множина A, така що функція f — симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

Раніше в [2] було одержано слабші умови на функцію, ніж в першій частині теореми 1, при яких існує залишкова в X множина A, така що функція f — неперервна в кожній точці множини $A \times Y$. В цій роботі ми покращимо теорему 1 для випадків 2) і 3).

Ми будемо казати, що функція $f : X \times Y \to Z$:

задовольняє умову (A), якщо для довільної десь щільної множини A в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y існують відкриті непорожні множини U_0 в X та V_0 в Y, такі що $U_0 \subseteq \overline{A}$, $V_0 \subseteq V$ і $f(U_0 \times V_0) \subseteq \overline{f((A \times V)}$;

задовольняє умову (B), якщо для кожного $\varepsilon > 0$, для довільної множини B другої категорії в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y існують множина B_1 десь щільна в X і функція $g : B_1 \to V$, такі що $B_1 \subseteq B$ і $\omega_f(Gr(g)) < \varepsilon$, де $Gr(g) = \{(x, g(x)) \in X \times Y : x \in B_1\}$ — графік відображення g.

Очевидно, що з слабкої горизонтальної квазінеперервності функції f випливає умова (A). В [4] було встановлено, що для довільних топологічних просторів X, Y і Z відображення $f : X \times Y \to Z$ — слабко горизонтально квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли для довільної точки $p = (x, y)$ і довільних околів U, V і W точок x, y і $z = f(p)$ в просторах X, Y і Z відповідно існують відкрита непорожня множина U_1 в X і відображення $g : U_1 \to V$, такі що $U_1 \subseteq U$ і $f(Gr(g)) \subseteq W$. Тому слабка горизонтальна квазінеперервність гарантує виконання також і умови (B).

Умови (A) і (B) простіші, ніж слабка горизонтальна квазінеперервність. Це демонструє наступний приклад.

Приклад 1. *Функція $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що визначена формулою*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

задовольняє умови (A) та (B), але не є слабко горизонтально квазінеперервною.

1 Основні результати

Для доведення основних результатів нам потрібна буде наступна лема.

Лема 1. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метричний простір з метрикою d, V — відкрита непорожня множина в Y, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (A), (B) та $B = \{x \in X : \omega_{f^x}(V) < \varepsilon\}$ — множина другої категорії в X. Тоді існують відкриті непорожні множини U_0 в X і V_0 в Y, такі що $U_0 \subseteq \overline{B}$, $V_0 \subseteq V$ і $\omega_f(U_0 \times V_0) \leq 3\varepsilon$.*

Доведення. Згідно з умовою (B), існують десь щільна множина B_1 в X і відображення $g : B_1 \to V$, такі що $\omega_f(Gr(g)) < \varepsilon$. Покажемо, що $\omega_f(B_1 \times V)) \leq 3\varepsilon$. Візьмемо точки $p = (x, y)$, $q = (u, v) \in B_1 \times V$. Тоді

$$d(f(p), f(q)) \leq d(f(p), f(x, g(x))) + d(f(x, g(x)), f(u, g(u))) + d(f(u, g(u)), f(q)) < 3\varepsilon.$$

Отже, $\omega_f(B_1 \times V)) \leq 3\varepsilon$. Це означає, що множина $f(B_1 \times V)$ міститься в деякій замкненій кулі радіуса 3ε.

Згідно з умовою (A) існують відкриті непорожні множини U_0 і V_0 в просторах X і Y відповідно, такі що $U_0 \subseteq \overline{B_1} \subseteq \overline{B}$, $V_0 \subseteq V$ і $f(U_0 \times V_0) \subseteq \overline{f(B_1 \times V)}$. Оскільки множина $f(B_1 \times V)$ міститься у деякій замкненій кулі радіуса 3ε, то і множина $\overline{f(B_1 \times V)}$ міститься у цій же замкненій кулі. Тоді множина $f(U_0 \times V_0)$ теж міститься у замкненій кулі радіуса 3ε. Це означає, що $\omega_f(U_0 \times V_0) \leq 3\varepsilon$. □

Наступна теорема покращує теорему 1 для випадку симетричної квазінеперервності.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — метричний простір з метрикою d, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (A) та (B) і f^x — квазінеперервна для всіх x з деякої залишкової множини M в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така що функція f — симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Припустимо, що існує множина E_0 другої категорії в X, така що для кожної точки $x \in E_0$ існує точка $y_x \in Y$, така що f не є симетрично квазінеперервною відносно x в точці $p_x = (x, y_x)$. Тоді для кожної точки $x \in E_0$ існують число $\varepsilon_x > 0$, окіл $U(x)$ точки x в X і окіл $V(x)$ точки y_x в Y, такі що для довільного околу U точки x і довільної відкритої непорожньої множини V, що $U \subseteq U(x)$, $V \subseteq V(x)$, маємо $\omega_f(\{p_x\} \cup (U \times V)) \geq \varepsilon_x$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — псевдобаза простору Y. Позначимо через $E_1 = E_0 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номерів n та m розглянемо множини

$$E_{n,m} = \{x \in E_1 : \tfrac{1}{m} < \tfrac{\varepsilon_x}{4}, V_n \subseteq V(x), \omega_{f^x}(\{y_x\} \cup V_n) < \tfrac{1}{m}\}.$$

Оскільки функція f^x — квазінеперервна для всіх $x \in E_1$, то $E_1 = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$. Тоді існують номери n_0 і m_0, такі що множина $E = E_{n_0,m_0} \subseteq E_1$ є множиною другої категорії в X. Згідно з лемою 1 існують відкриті непорожні множини U_0 в X та V_0 в Y, такі що $U_0 \subseteq \overline{E}$, $V_0 \subseteq V_{n_0}$ і $\omega_f(U_0 \times V_0) \leq \frac{3}{m}$.

Візьмемо довільну точку $x \in U_0 \cap E \subseteq E_0$. Тоді множина $U = U_0 \cap U(x) \subseteq U(x)$ — окіл точки x, $V = V_0 \subseteq V_{n_0} \subseteq V(x)$, і покажемо, що $\omega_f(\{p_x\} \cup (U \times V)) \leq \frac{4}{m}$. Справді, $\omega_f(U \times V) \leq \omega_f(U_0 \times V_0) \leq \frac{3}{m}$. Візьмемо $p = (u, v) \in U \times V$. Тоді

$$d(f(p_x), f(p)) \leq d(f(p), f(x, v))) + d(f(x, v)), f(p)) < \frac{1}{m} + \frac{3}{m} = \frac{4}{m}.$$

Це і означає, що $\omega_f(\{p_x\} \cup (U \times V)) \leq \frac{4}{m} < \varepsilon_x$. Оскільки $x \in E_0$, то ми одержали суперечність. □

Наступний результат покращує теорему 1 у випадку симетричної кліковості.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (A) та (B) і f^x — клікова для всіх x з деякої залишкової множини M в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така що функція f — симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Припустимо, що існує множина E_0 другої категорії в X, така що для кожної точки $x \in E_0$ існує точка $y_x \in Y$, така що f не є симетрично кліковою відносно x в точці $p_x = (x, y_x)$. Тоді для кожної точки $x \in E_0$ існують число $\varepsilon_x > 0$, окіл $U(x)$ точки x в X і окіл $V(x)$ точки y_x в Y, такі що для довільного околу U точки x і довільної відкритої непорожньої множини V, таких що $U \subseteq U(x)$, $V \subseteq V(x)$ маємо $\omega_f(U \times V) \geq \varepsilon_x$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — псевдобаза простору Y. Позначимо через $E_1 = E_0 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номерів n та m розглянемо множини

$$E_{n,m} = \{x \in E_1 : \tfrac{1}{m} < \tfrac{\varepsilon_x}{3}, V_n \subseteq V(x), \omega_{f^x}(V_n) < \tfrac{1}{m}\}.$$

Оскільки функція f^x — клікова для всіх $x \in E_1$, то $E_1 = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$. Тоді існують номери n_0 і m_0, такі що множина $E = E_{n_0,m_0} \subseteq E_1$ є множиною другої категорії в X. Згідно з лемою 1, існують відкриті непорожні множини U_0 в X та V_0 в Y, такі що $U_0 \subseteq \overline{E}$, $V_0 \subseteq V_{n_0}$ і $\omega_f(U_0 \times V_0) \leq \frac{3}{m}$.

Тоді для довільної точки $x \in U_0 \cap E \subseteq E_0$ маємо, що $U = U_0 \cap U(x)$ — окіл точки x, $V = V_0 \subseteq V_{n_0} \subseteq V(x)$ і $\omega_f(U \times V) \leq \frac{3}{m} < 3 \cdot \frac{\varepsilon_x}{3} = \varepsilon_x$. Одержали суперечність. □

2 Деякі наслідки

В цьому пункті ми покажемо, що умова (B) завжди виконується для довільної функції зі значеннями у метризовному сепарабельному просторі і переформулюємо теореми 2 і 3 для функцій в таких просторах.

Лема 2. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метризовний сепарабельний простір, $f : X \times Y \to Z$ — функція. Тоді функція f задовольняє умову (B).*

Доведення. Зафіксуємо метрику на просторі Z, яка породжує його топологію. Візьмемо довільну відкриту непорожню множину V в Y і довільну точку $a \in V$. Для кожного $\varepsilon > 0$ в просторі Z існує зліченна ε-сітка. Тоді для довільної множини B другої категорії в X існує десь щільна множина $B_1 \subseteq B$, така що $\omega_{f_a}(B_1) < \varepsilon$. Тому в ролі функції $g : B_1 \to V$ досить взяти $g(x) = a$ для $x \in B_1$. □

Як наслідки з теорем 2 і 3 одержуємо два наступні результати.

Наслідок 1. *Нехай X — топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — метризовний сепарабельний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умову (A) і f^x — квазінеперервна для всіх x з деякої залишкової множини M в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така що функція f симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Наслідок 2. *Нехай X — топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — метризовний сепарабельний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умову (A) і f^x — клікова для всіх x з деякої залишкової множини M в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така що функція f — симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Література

1. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. *Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій* // Укр. мат. журн. — 2000. — Т.52, №12. — С. 1711–1714.
2. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. *Точки сукупної неперервності та великі коливання* // Укр. мат. журн. — 2010. — Т.62, №6. — С.791–800.
3. Нестеренко В.В. *Про симетричну квазінеперервність та їх аналоги* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: збірник наук. праць. Математика. — 2009. — Вип. 485. — С. 78–83.
4. Нестеренко В.В. *Слабка горизонтальна квазінеперервність* // Математичний вісник НТШ. — 2008. — Т.5. — С. 177–182.
5. Bögel K. *Über partiell differenzierbare Funktionen*, Math. Z., **25** (1926), 490–498.
6. Bouziada A., Troallic J.-P. *Lower quasicontinuity, joint continuity and related concepts*, Topology Appl., **157**, 18 (2010), 2889–2894.
7. Fudali L.A. *On cliquish functions on product spaces*, Mathematica Slovaca, **33**, 1 (1983), 53–58.
8. Kempisty S. *Sur les fuctions quasicontinues*, Fund. Math., **19** (1932), 184–197.
9. Thielman H.P. *Types of functions*, Amer. Math. Monthly, **60** (1953), 156–161.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна

Надійшло 05.02.2011

Nesterenko V.V. *Sufficient conditions for the existence of points of symmetrically quasi-continuity and of symmetrically cliquishness of functions of two variables*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 114–119.

It is established sufficient conditions under which for the function $f : X \times Y \to Z$ there is a residual in X set A, such that the function f is symmetrically quasi-continuous /cliquish/ one with respect to x at each point of the set $A \times Y$.

Нестеренко В.В. *Достаточные условия существования точек симетричной квазинепрерывности та кликовости функций двух переменных* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 114–119.

Установлено достаточные условия, при которых для функции $f : X \times Y \to Z$ существует остаточноев X множество A, такое, что функция f симетрично квазинепрерывная /кликовая/ относительно x в каждой точке множества $A \times Y$.