Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.965+517.18

Величко Е.В., Ткаченко И.Г.

О КОРРЕКТНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Величко Е.В., Ткаченко И.Г. *О корректности определения тригонометрических функций системой функциональных уравнений* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 15–21.

В работе показано, что система функциональных уравнений $S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$, $C(x+y) = C(x)C(y) - S(y)S(x)$ определяет более широкий класс функций, чем тригонометрические. Установлены дополнительные условия, которые необходимо добавить к этой системе, чтобы данная система имела единственное решение $S(x) = \sin ax$, $C(x) = \cos ax$. При доказательстве использовался способ сведения функциональных уравнений к дифференциальным.

Введение и анализ публикаций

Существуют различные подходы к определению функций. Анализ каждого из таких подходов позволяет сформулировать различные обобщения элементарных функций. Кроме того сравнение различных подходов интересно с методической точки зрения. При определении тригонометрических функций в основном используют такие способы:

- "геометрический подход", в котором функции вводятся как отношения сторон в прямоугольном треугольнике;

- "дифференциальный подход", в котором функции вводятся как решения задач Коши;

- "аналитический подход", при котором функции описываются степенными рядами;

- "функциональный подход", при котором функции определяются как решения функциональных уравнений.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 39B72.
Ключевые слова и фразы: тригонометрические функции, функциональное уравнение, дифференциальное уранение, ограниченные функции.

В данной статье анализируется корректность определения основных тригонометрических функций через функциональные уравнения. В многочисленных интернет-энциклопедиях, среди которых отметим Википедию и Вапедию, функции $\sin x$ и $\cos x$ определяются как непрерывные решения системы (1), (2). Однако функции $\sin ax$ и $\cos ax$ так же являются решением, поэтому необходимо, как минимум, одно дополнительное условие для определения константы a.

В работе [1] авторы предлагают взять несколько другую систему:

$$\begin{cases} S(x-y) = S(x)C(y) - S(y)C(x), \\ C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y) \end{cases}$$

и дополнить ее условиями

$$\begin{cases} S(x) > 0, x \in (0; a), \\ S(a) = 1. \end{cases}$$

Доказательство того, что $S(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$, $C(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$, проводится путем вычисления значений функций на некотором всюду плотном множестве и предельным переходом с использованием непрерывности.

В работе [2] чешского автора Otomar'a Hajek'a анализируются обобщения уравнений типа (1) и (2) при наличии дополнительных свойств, таких как дифференцируемость и аналитичность функций.

Целью данной статьи является решение в классе непрерывных функций системы (1), (2) с условием (3) и формулировка условий, обеспечивающих единственность решения.

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему функциональных уравнений

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x), \tag{1}$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(y)S(x), \tag{2}$$

которую дополним условием

$$\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = a \neq 0. \tag{3}$$

Будем искать непрерывные решения этой системы.

Выясним, будут ли функции $S(x) = \sin ax$ и $C(x) = \cos ax$ единственными решениями или нет.

2 Определение значений функций в точке 0

Найдем значение $s_0 = S(0)$ и $c_0 = C(0)$. Для этого в (2) и (3) подставим $y = 0$ и получим

$$S(x) = S(x+0) = S(x)c_0 + C(x)s_0,$$

$$C(x) = C(x+0) = C(x)c_0 - S(x)s_0.$$

Перепишем эти тождества в виде

$$\begin{cases} S(x)(1-c_0) - C(x)s_0 = 0, \\ S(x)s_0 + C(x)(1-c_0) = 0, \end{cases}$$

и рассмотрим как систему относительно неизвестных $S(x)$, $C(x)$. Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение (а иначе условие (3) не будет иметь места), необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-c_0 & -s_0 \\ s_0 & 1-c_0 \end{vmatrix} = (1-c_0)^2 + s_0^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$s_0 = S(0) = 0,\ c_0 = C(0) = 1. \tag{4}$$

3 Исследование функций на четность

Исследуем, как связаны значения функций $S(x)$ и $C(x)$ в точках x и $-x$. Для этого положим в (1) и (2) $y = -x$:

$$0 = S(0) = S(x-x) = S(x)C(-x) + C(x)S(-x),$$

$$1 = C(0) = C(x-x) = C(x)C(-x) - S(x)S(-x).$$

Выразим из этих соотношений функции $S(-x)$ и $C(-x)$, рассматривая их как систему линейных уравнений:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} C(x) & S(x) \\ -S(x) & C(x) \end{vmatrix} = C^2(x) + S^2(x) \geq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & S(x) \\ 1 & C(x) \end{vmatrix} = -S(x),\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} C(x) & 0 \\ -S(x) & 1 \end{vmatrix} = C(x).$$

Таким образом

$$S(-x) = \frac{-S(x)}{\Delta(x)}, \quad C(-x) = \frac{C(x)}{\Delta(x)}. \tag{5}$$

4 Исследование функции $\Delta(x)$

Положим в (1) $y = -y$ и вычислим значение выражения $S(x+(-y))$, используя (5):

$$S(x-y) = S(x)C(-y) + S(-y)C(x) = \frac{S(x)C(y) - S(y)C(x)}{\Delta(y)}. \tag{6}$$

Аналогично вычисляем $S(y-x)$, используя (1), (5) и (6):

$$S(y-x) = S(y)C(-x) + S(-x)C(y) = \frac{S(y)C(x) - S(x)C(y)}{\Delta(x)} = -S(x-y)\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}. \tag{7}$$

Мы так же можем подсчитать $S(y-x)$, использовав тождества (5) и (7):

$$S(x-y) = S(-(y-x)) = -\frac{S(y-x)}{\Delta(y-x)} = \frac{S(x-y)\Delta(y)}{\Delta(y-x)\Delta(x)}. \tag{8}$$

Из соотношения (8) делаем вывод, что

$$\Delta(y-x) = \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}.$$

Общее непрерывное решение функционального уравнения (5), которое называется уравнением Коши [3], имеет вид

$$\Delta(x) = e^{2bx}, \tag{9}$$

где b — параметр, подлежащий определению.

5 Сведение функциональных уравнений к дифференциальным

Подставляя (9) в (5), получим, что $S(-x) = -S(x)e^{-2bx}$, $C(-x) = C(x)e^{-2bx}$. Найдем приращение функции $S(x)$:

$$S(x+y) - S(x-y) = S(x)C(y) + S(y)C(x) - S(x)C(-y) - C(x)S(-y) =$$

$$S(x)C(y) + S(y)C(x) - S(x)C(y)e^{-2by} + C(x)S(y)e^{-2by} =$$

$$S(x)C(y)(1-e^{-2by}) + C(x)S(y)(1+e^{-2by}).$$

Вычислим производную

$$S'(x) = \lim_{y\to 0}\frac{S(x+y)-S(x-y)}{2y} = S(x)\lim_{y\to 0}\frac{C(y)(1-e^{-2by})}{2y} +$$

$$C(x)\lim_{y\to 0}\frac{S(y)(1+e^{-2by})}{2y} = bS(x) + aC(x).$$

Найдем приращение функции $C(x)$ и вычислим производную:

$$C(x+y) - C(x-y) = C(x)C(y) - S(x)S(x) - C(x)C(y)e^{-2by} -$$

$$S(x)S(y)e^{-2by} = C(x)C(y)(1-e^{2by}) - S(x)S(y)(1+e^{2by}),$$

$$C'(x) = \lim_{y\to 0}\frac{C(x+y)-C(x-y)}{2y} = C(x)\lim_{y\to 0}\frac{C(y)(1-e^{-2by})}{2y} -$$

$$S(x)\lim_{y\to 0}\frac{S(y)(1+e^{-2by})}{2y} = bC(x) - aS(x).$$

Получаем, что функции $S(x)$ и $C(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} S'(x) = bS(x) + aC(x), \\ C'(x) = -aS(x) + bC(x). \end{cases} \tag{10}$$

6 Решение системы дифференциальных уравнений

Решим систему (10) с условиями (4) методом сведения к одному уравнению. Продифференцируем первое уравнение системы:

$$S''(x) = bS'(x)+aC'(x) = b(bS(x)+aC(x))+a(-aS(x)+b(C(x)) = (b^2-a^2)S(x)+2abC(x) =$$

$$(b^2-a^2)S(x)+2b(S'(x)-bS(x)) = 2bS'(x)-(b^2+a^2)S(x).$$

Получили тождество $S''(x)-2bS'(x)+(b^2+a^2)S(x)=0$, характеристическое уравнение которого имеет вид $\lambda^2-2b\lambda+(b^2+a^2)=0$. Последовательно находим дискриминант $D=4b^2-4b^2-4a^2=(2ai)^2$ и корни $\lambda_{1,2}=b\pm ai$. Таким образом, $S(x)=e^{bx}(A\sin ax + B\cos ax)$. Из граничного условия $S(0)=0$, полученного выше, найдем, что $B=0$. С учетом этого $S(x)=Ae^{bx}\sin ax$. Далее, из первого уравнения системы (10) найдем $aC(x) = S'(x)-bS(x) = Aa\cos axe^{bx}+Ab\sin axe^{bx}-Ab\sin axe^{bx}$. Приводя подобные, получим $C(x)=A\cos axe^{bx}$. Подставляя условие $C(0)=1$, получаем, что $C(0)=A=1$. На основании вышеизложенного приходим к выводу, что решения системы (1)–(3) нужно искать в виде

$$\begin{cases} S(x)=e^{bx}\sin ax, \\ C(x)=e^{bx}\cos ax. \end{cases} \tag{11}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при любом значении b эти функции будут удовлетворять указанной системе.

7 О дополнении исходной системы функциональных уравнений

Как показано выше, для того, что бы система (1)–(3) однозначно определяла функции $\sin ax$ и $\cos(ax)$ необходимо добавить условие, обеспечивающее равенство $b=0$ в формулах (11). В качестве такого предлагается взять условие ограниченности функций $S(x)$ и $C(x)$:

$$\exists M : \forall x \max\{|S(x)|, |C(x)|\} < M. \tag{12}$$

Покажем, что система (1)–(3) и условие (12) однозначно определяют функции $S(x)=\sin ax$ и $C(x)=\cos ax$.

Сначала доказывается (точно так же, как это было сделано выше), что имеют место соотношения (4) и (5). Потом предполагаем, что $\exists z : \Delta z \neq 1$. Применяя два раза формулу (5), получим что

$$S(x)=S(-(-x))=\frac{-S(-x)}{\Delta(-x)}=\frac{S(x)}{\Delta(x)\Delta(-x)}.$$

Откуда делаем вывод, что $\forall x\ \Delta(x)\Delta(-x)=1$. Поскольку

$$\Delta(z)\geq 0,\ \Delta(-z)\geq 0 \vee \Delta(z)\neq 1 \vee \Delta(z)\Delta(-z)=1,$$

то значит $\exists t\in\{-z;\, z\}$, такое что

$$\Delta(t)=T>1. \tag{13}$$

Подставляя в (1) $y = x$, получаем, что $S(2x) = 2S(x)C(x)$. Тогда, применив формулу (5), получим, что

$$S(-2x) = 2S(-x)C(-x) = \frac{-2S(x)C(x)}{\Delta^2(x)} = \frac{-S(2x)}{\Delta^2(x)}.$$

С другой стороны,

$$S(-2x) = -\frac{S(2x)}{\Delta(2x)}.$$

Сравнивая последние два выражения, делаем вывод, что

$$\Delta(2x) = \Delta^2(x). \tag{14}$$

Используя метод математической индукции и соотношения (13) и (14), легко показать, что $\forall n \in N\; \Delta(2^n t) = T^n$. Поскольку последовательность T^n возрастает и неограниченна, то выберем n_0 так, чтобы $T^{n_0} > 2M^2$. Тогда $\Delta(2^{n_0}t) = S^2(2^{n_0}t) + C^2(2^{n_0}t) > 2M^2$, а, значит $|S(2^{n_0}t)| > M \vee |C(2^{n_0}t)| > M$, что противоречит (12). Мы показали, что $\Delta(x) \equiv 1$, и тогда из (5) следует, что $S(-x) = -S(x)$, $C(-x) = C(x)$. Найдем приращения и производные:

$$S(x+y) - S(x-y) = S(x)C(y) + S(y)C(x) - S(x)C(-y) - C(x)S(-y) = 2C(x)S(y),$$

$$S'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{S(x+y) - S(x-y)}{2y} = \lim_{y\to 0} \frac{2C(x)S(y)}{2y} = C(x)\lim_{y\to 0}\frac{S(y)}{y} = aC(x).$$

$$C(x+y) - C(x-y) = C(x)C(y) - S(y)S(x) - C(x)C(-y) + S(x)S(-y) = -2S(x)S(y),$$

$$C'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{C(x+y) - C(x-y)}{2y} = \lim_{y\to 0} \frac{-2S(x)S(y)}{2y} = -S(x)\lim_{y\to 0}\frac{S(y)}{y} = -aS(x).$$

Теперь найдем вторую производную

$$S''(x) = (S'(x))' = (aC(x))' = a(-aS(x)) = -a^2 S(x).$$

Найдем граничные условия: $S(0) = 0$, $S'(0) = aC(0) = a$.

Таким образом, функция $S(x)$ является решением следующей задачи Коши:

$$y'' + a^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = a. \tag{15}$$

Аналогично получается, что функция $C(x)$ является решением следующей задачи Коши:

$$y'' + a^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{16}$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что функции $y(x) = \sin ax$ и $y(x) = \cos ax$ являются единственными решениями задач (15) и (16) соответственно. Непосредственно проверяется, что функции

$$S(x) = \sin ax,\; C(x) = \cos ax$$

удовлетворяют функциональным уравнениям (1), (2) с условиями (3) и (12), и проведенный выше анализ доказывает, что это решение единственно в классе непрерывных функций.

Выводы

В работе показано, что система функциональных уравнений (1), (2) определяет функции $\sin ax$ и $\cos ax$ только при наличии дополнительных условий, в качестве которых можно взять условие (3), описывающее поведение функции $S(x)$ в окрестности нуля, и условие ограниченности функций $S(x)$ и $C(x)$. Решение системы проводилось путем сведения функциональных уравнений к дифференциальным.

Список литературы

1. Андреев А.А., Костиков Д.В., Саушкин И.Н. *Система функциональных уравнений тригонометрических функций* [Електронний ресурс]: http://ermine.narod.ru/MATH/STAT/DANILA/sect2.html
2. Otomar Hajek *Function equations for trigonometric functions*, Czechoslovak Mathematical Journal, **5**, 3 (1955), 432–434.
3. Acz'el J., Dhombres J. Functional Equations in Several Variables. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

Запорожский национальный университет,
Запорожье, Украина

Поступило 15.09.2010

Velichko E.V., Tkachenko I.G. *On the correctness of the determination of trigonometric functions by the system of functional equations*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 15–21.

The article shows that the system of the functional equations $S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$, $C(x+y) = C(x)C(y) - S(y)S(x)$ defines a broader class of the functions than the trigonometric equations. The conditions, which must be added to this system to obtain the unique solution have been developed $S(x) = \sin ax$, $C(x) = \cos ax$. The method of the reduction of the functional equations to the differential equations is used.

Величко О.В., Ткаченко І.Г. *Про коректність визначення тригонометричних функцій системою функціональних рівнянь* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 15–21.

У роботі показано, що система функціональних рівнянь $S(x+y) = S(x)C(y)+S(y)C(x)$, $C(x+y) = C(x)C(y) - S(y)S(x)$ визначає більш ширший клас функцій, ніж тригонометричні. Встановлені умови, які необхідно додати до цієї системи, щоб вона мала єдиний розв'язок $S(x) = \sin ax$, $C(x) = \cos ax$. При доведенні використовувався спосіб зведення функціональних рівнянь до диференційних.