Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.98

Голубчак О.М.

ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ℓ_1

Голубчак О.М. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 34–39.

В роботі розглянуто поповнення простору симетричних поліномів на ℓ_1 відносно деякої гільбертової норми і досліджено умови, при яких отриманий простір буде простором аналітичних функцій на ℓ_1. Розглянуто зв'язок з абстрактними просторами Фока.

Вступ

Нехай X — лінійний нормований простір з безумовним базисом над полем $\mathbb{K}$. Функція $f : X \to K$ називається симетричною, якщо $f\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k\Big) = f\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_{\sigma(k)}\Big)$ для довільної підстановки σ на деякій скінченній підмножині натуральних чисел $\mathbb{N}$.

Функція $P : X \to K$ називається поліномом степеня n, якщо $P = P_0 + P_1 + ... + P_n$, де $P_k(x) = B_k(x, x, ..., x)$ і B_k є k-лінійною формою $B_k : X \times X \times ... \times X \to K$ для кожного $1 \le k \le n$. При цьому $P_0 = \mathrm{const}$ і $P_n \ne 0$.

Розглянемо простір ℓ_1 абсолютно сумовних послідовностей над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$: $\ell_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...) | \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$.

Простір симетричних поліномів на ℓ_1 позначимо $P_s(\ell_1)$. Відомо, що поліноми

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$. Також відомо, що поліноми вигляду $P_\lambda = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_m}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$, де $P_{\lambda_k}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\lambda_k}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ — деяке розбиття натурального числа n, тобто $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = n$.

Симетричні аналітичні функції від нескінченної кількості змінних досліджувались в роботах [3, 4, 5]. У цій роботі ми розглядаємо гільбертові простори, породжені симетричними поліномами на ℓ_1, і встановлюємо умови, при яких елементи цих просторів

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46J15, 46J20, 46E15.
Ключові слова і фрази: симетричні аналітичні функції на банахових просторах, гільбертові простори аналітичних функцій.

© Голубчак О.М., 2011

будуть аналітичними функціями у деякій області $\Omega \subset \ell_1$. У першому розділі доведено загальний результат, який оцінює радіус кулі в ℓ_1, що міститься в Ω. У другому розділі показано, що Ω, в загальному випадку, не збігається з цією кулею, і побудовано Ω для одного конкретного випадку, використовуючи абстрактні простори Фока.

Розглянемо на $P_s(\ell_1)$ деякий скалярний добуток $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = b_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\mu}$, де $\delta_{\lambda\mu}$ — символ Кронекера, $b_{\lambda\lambda} = b_\lambda > 0$. Даний скалярний добуток породжує норму

$$\|P_\lambda\| = \sqrt{\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle} = \sqrt{b_\lambda}.$$

Поповнення простору $P_s(\ell_1)$ відносно даної норми позначимо $H_s(\ell_1)$. В цій роботі досліджуються умови на b_λ, при яких простір $H_s(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій в деякій області ℓ_1.

На просторі $P_s(\ell_1)$ також можна визначити норму

$$\|P\|_{\sup} = \sup_{\|x\| \le 1} |P(x)|.$$

Легко бачити, що $\|P_\lambda\|_{\sup} = 1$.

1 Простір аналітичних функцій

Очевидно, що значення в точці $x \in \ell_1$ породжує функціонал $\delta_x : P \mapsto P(x)$, $P \in P_s(\ell_1)$. Ми розглянемо питання: при яких x функціонал δ_x буде неперервним?

Припустимо, що для деякого $x \in \ell_1$, δ_x — неперервний. Тоді його можна продовжити за неперервністю до лінійного функціонала на $H_s(\ell_1)$. За теоремою Ріса існує елемент $R_x \in H_s(\ell_1)$, такий що

$$\delta_x(P) = P(x) = \langle P, R_x \rangle.$$

Знайдемо цей елемент.

Якщо такий елемент R_x існує та оскільки $\dfrac{P_\lambda}{\|P_\lambda\|} = \dfrac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}$ — ортонормований базис в $H_s(\ell_1)$, то $\delta_x\Big(\dfrac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}\Big) = \dfrac{P_\lambda(x)}{\sqrt{b_\lambda}} = \Big\langle \dfrac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}, R_x \Big\rangle$. Тому

$$R_x = \sum_\lambda \frac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}} \frac{\overline{P_\lambda(x)}}{\sqrt{b_\lambda}} = \sum_\lambda \frac{P_\lambda}{b_\lambda} \overline{P_\lambda(x)}. \tag{1}$$

Отже, R_x є визначеним для тих елементів x, для яких ряд (1) збігається в $H_s(\ell_1)$. Знайдемо область збіжності даного ряду.

$$\|R_x\|_{H_s} = \Big\| \sum_\lambda \frac{P_\lambda}{b_\lambda} \overline{P_\lambda(x)} \Big\|_{H_s} \le \sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \sum_{|\lambda|=n} \frac{P_\lambda}{b_\lambda} \overline{P_\lambda(x)} \Big\|_{H_s} \le$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \Big\| \frac{P_\lambda}{b_\lambda} \Big\|_{H_s} |P_\lambda(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{|P_\lambda(x)|}{\sqrt{b_\lambda}} \le$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\frac{\|P_\lambda\|_{\sup}\|x\|_{\ell_1}^n}{\sqrt{b_\lambda}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\frac{\|x\|_{\ell_1}^n}{\sqrt{b_\lambda}}.$$

Позначимо через $p(n)$ — кількість розбиттів λ натурального числа n. Нехай

$$d_n=\max_{|\lambda|=n}\frac{1}{\sqrt{b_\lambda}}. \tag{2}$$

Тоді

$$\|R_x\|_{H_s}\le\sum_{n=1}^{\infty}p(n)d_n\|x\|_{\ell_1}^n.$$

Використовуючи формулу Коші-Адамара та відому асимптотику для $p(n)$, можна оцінити радіус збіжності ряду:

$$r\ge\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}(p(n)d_n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}d_n^{\frac{1}{n}}}.$$

Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 1. *Простір $H_s(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій в кулі з центром в нулі радіуса*

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}d_n^{\frac{1}{n}}}$$

в ℓ_1, де константи d_n визначаються формулою (2).

З теореми 1 маємо, що коли $\|P_\lambda\|_{H_s}\ge 1$ для довільного розбиття λ, то $H_s(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій на одиничній кулі в ℓ_1.

2 Зв'язок з абстрактними просторами Фока

Зауважимо, що в деяких випадках можна зробити точнішу оцінку для області збіжності ряду (1). Нам потрібні будуть деякі відомі результати стосовно абстрактних просторів Фока. Нехай E — гільбертів простір з ортонормованим базисом (e_n). Скажемо, що гільбертів простір $\mathcal{F}=\mathcal{F}(E)$ з нормою $\|\cdot\|_\eta$ є *(абстрактним) симетричним простором Фока над простором* E, якщо вектори $1, e_{[i]}^{(k)}=e_{i_1}^{k_1}\dots e_{i_n}^{k_n}$ утворюють ортогональний базис в $\mathcal{F}$, де $n=|(k)|=k_1+\dots+k_n\in\mathbb{N}$, $k_j\ge 0$, $i_1<\dots<i_n$,

$$e_{i_1}^{k_1}\dots e_{i_n}^{k_n}=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma}\overbrace{e_{\sigma(i_1)}\otimes\dots\otimes\ e_{\sigma(i_1)}}^{k_1}\otimes\dots\otimes\overbrace{e_{\sigma(i_n)}\otimes\dots\otimes e_{\sigma(i_n)}}^{k_n}$$

є симетричним тензорним добутком векторів.

Покладемо $c_{[i]}^{(k)}:=\left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|_\eta^{-2}$ і $c_0=1$. Розглянемо степеневий ряд

$$\eta(x)=\sum_{k_1+\dots+k_n=0}^{\infty}\sum_{i_1<\dots<i_n}c_{i_1\dots i_n}^{k_1\dots k_n}x_{i_1}^{k_1}\dots x_{i_n}^{k_n}e_{i_1}^{k_1}\dots e_{i_n}^{k_n}=\sum_{|(k)|=0}^{\infty}\sum_{[i]}c_{[i]}^{(k)}x_{[i]}^{(k)}e_{[i]}^{(k)} \tag{3}$$

для будь-якого $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in E$.

Наступну теорему доведено в [2].

Теорема 2. *Припустимо, що існує константа $S > 0$ і послідовність додатних чисел (M_n), така що для кожного n $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = M \le \infty$ і*

$$0 < c_{[i]}^{(k)} = c_{i_1\ldots i_n}^{k_1\ldots k_n} \le SM_n^2 \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1!\ldots k_n!} = SM_n^2 \frac{n!}{k_1!\ldots k_n!}, \tag{4}$$

де $n = k_1 + \cdots + k_n$. Тоді

(i) *ряд (3) збігається для кожного $x \in E$, $\|x\| < 1/M$ і η є аналітичним відображенням на кулі $B(0, 1/M) \subset E$ з центром в нулі радіуса $1/M$ зі значенням в $\mathcal{F}$;*

(ii) *для кожного $\varphi \in \mathcal{F}$ відображення $f_\varphi(x) = \langle \eta(x) \mid \varphi\rangle$ є аналітичною функцією на $B(0, 1/M) \subset E$;*

(iii) *функція $\left\langle \eta(x) \,\middle|\, e_{[i]}^{(k)} \right\rangle$ є n-однорідним поліномом і $\left\langle \eta(x) \,\middle|\, e_{[i]}^{(k)} \right\rangle = x_{i_1}^{k_1} \ldots x_{i_n}^{k_n}$.*

Твердження 2.1. *Відображення*

$$\xi \colon P_\lambda \mapsto e_{\lambda_1} \ldots e_{\lambda_m}, \qquad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

задає ізометричний ізоморфізм простору $H_s(\ell_1)$ на абстрактний симетричний простір Фока $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E)$, для якого константи $c_{[i]}^{(k)}$ з формули (3) визначаються рівністю $c_{[i]}^{(k)} = \|P_{i_1}^{k_1} \ldots P_{i_n}^{k_n}\|^{-2}$. Ізоморфізм ξ є мультиплікативним на підпросторі поліномів у $H_s(\ell_1)$.

Доведення цього твердження безпосередньо випливає з означень. Зауважимо, що замкнена лінійна оболонка $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ є прообразом простору E при відображенні ξ.

Позначимо Ω — область в ℓ_1

$$\Omega = \{x \in \ell_1 \colon |P_n(x)| < 1,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко бачити, що Ω містить відкриту одиничну кулю простору ℓ_1 як власну підмножину.

Твердження 2.2. *Множина Ω є необмеженою і відкритою підмножиною в ℓ_1. Крім того, для кожного $x \in \Omega$ $\sum |P_n(x)| < \infty$.*

Доведення. Покажемо, що існує необмежена послідовність в ℓ_1, яка належить Ω. Розглянемо числову послідовність

$$x_n = (-1)^n \frac{6}{\pi^2 n}.$$

Нехай $(z_{(m)})$ — послідовність з ℓ_1, така що $z_{(m)} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$.

Оскільки $P_n(z_{(m)}) < 1 \quad \forall n, m$, то $z_{(m)} \in \Omega$. З іншого боку, очевидно, що $\|z_{(m)}\| \to \infty$ при $m \to \infty$. Отже, Ω є необмеженою множиною.

Зауважимо, що коли $x = \sum x_k e_k \in \Omega$, то $|x_k| < 1$ для кожного k. Тобто Ω лежить у відкритій підмножині

$$\mathbb{D}_1 = \{x \in \ell_1 \colon \forall k \in \mathbb{N} \quad |x_k| < 1\}.$$

Розглянемо відображення $\Psi(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots)$. У роботі [4] показано, що Ψ — неперервне відображення і $\Psi\colon \mathbb{D}_1 \to \ell_1$. Тому $\sum |P_n(x)| < \infty$. З іншого боку, Ω є прообразом відкритої множини $\mathbb{D}_1$ при відображенні Ψ. Тому Ω — відкрита підмножина. $\square$

Розглянемо абстрактний простір Фока $\mathcal{F}$ з нормою $\left\| e_{[i]}^{(k)} \right\|_\eta = 1$. Згідно формули (3), цій нормі відповідає відображення η:

$$\eta(y) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y_i^k e_i^k = \sum_{|(k)|=0}^{\infty} \sum_{[i]} y_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)},$$

де $y_i = (y, e_i)$ — координати вектора $y \in \ell$. В роботі [1] показано, що η є аналітичним відображенням з $\mathbb{D}_2 \supset \mathbb{D}_1$ в $\mathcal{F}$, де

$$\mathbb{D}_2 = \{x \in \ell_2 \colon \forall k \in \mathbb{N} \quad |x_k| < 1\}$$

є відкритою підмножиною в ℓ_2.

Оскільки відображення ξ є ізометричним ізоморфізмом з $H_s(\ell_1)$ в $\mathcal{F}$, то $\xi(R_x) \in \mathcal{F}$ для кожного $x \in \ell_1$, $\|x\| < 1$. Покажемо, що елемент R_x коректно визначений для всіх $x \in \Omega$. Для цього достатньо показати, що $\xi(R_x) \in \mathcal{F}$ при $x \in \Omega$. З формули (1) маємо

$$\xi(R_x) = \xi\Big(\sum_{\lambda} P_\lambda \overline{P_\lambda(x)}\Big) = \sum_{\lambda} e_\lambda \overline{P_\lambda(x)}. \tag{5}$$

Оскільки $|P_n(x)| < 1$ і ряд $\sum |P_n(x)|$ збігається для кожного $x \in \Omega$, то

$$\sum_{\lambda} |P_\lambda(x)|^2 \leq \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |P_i(x)|^{2k} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |P_i(x)|^2}.$$

З іншого боку,

$$\ln\Big(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |P_i(x)|^2}\Big) = -\ln \prod_{i=1}^{\infty} (1 - |P_i(x)|^2) \leq -\sum_{i=1}^{\infty} (-|P_i(x)|^2) = \sum_{i=1}^{\infty} |P_i(x)|^2.$$

Тому

$$\|\xi(R_x)\|^2 = \sum_{\lambda} |P_\lambda(x)|^2 \leq \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |P_i(x)|^2\Big) < \infty.$$

Отже, $\xi(R_x) \in \mathcal{F}$, тобто $R_x \in H_s(\ell_1)$ для всіх $x \in \Omega$. Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай $\|P_\lambda\| = 1$ для довільного розбиття λ. Тоді $H_s(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій на Ω. При цьому*

$$F(x) = \langle F, R_x \rangle = \langle \xi(F), \xi(R_x) \rangle, \quad x \in \Omega, \quad F \in H_s(\ell_1).$$

Зауважимо, що коли $x \notin \Omega$, то для деякого m $|P_m(x)| > 1$. Тоді у формулі (5) ряд буде містити розбіжний доданок $\sum_k e_m^k \overline{(P_m(x))^k}$. Тому R_x не буде коректно визначеним. Отже, область Ω у теоремі 3 не може бути розширеною.

Література

1. А.В. Загороднюк, М.А. Митрофанов, *Аналітичні функції на одиничному диску гільбертового простору* // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – 2004. – Т.63. – С. 80–87.
2. А. Загороднюк, З. Можировська, *Гільбертові простори цілих функцій від нескінченної кількості змінних*// Математичний вісник НТШ. – 2006. – Т.3. – С. 44–55.
3. R. Alencar, R. Aron, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*, Bull. Lond. Math. Soc. **35** (2003), 55–64.
4. I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (to appear).
5. M. González, R. Gonzalo and J. Jaramillo, *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function space*, J. London Math. Soc. **59**, 2 (1999), 681–697.

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України,
Львів, Україна

Надійшло 15.12.2010

Holubchak O.M. *Hilbert spaces of symmetric analytical functions on ℓ_1*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 34–39.

We consider completions of the space of symmetric polynomials on ℓ_1 with respect to some Hilbert norm and investigate conditions under which the obtained spaces consist of analytic functions with domains in ℓ_1. Some connections with abstract Fock spaces are established.

Голубчак О.М. *Гильбертовы пространства симметрических функций на ℓ_1* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 34–39.

В работе рассмотрены пополнения пространства симметрических полиномов на ℓ_1 относительно некоторой гильбертовой нормы и исследованы условия, при которых полученное пространство будет пространством аналитических функций на ℓ_1. Рассмотрена связь с абстрактными пространствами Фока.