Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.98

Дубей М.В., Загороднюк А.В.

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ЛІПШИЦЕВО-ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ТА ЛІПШИЦЕВО-АНАЛІТИЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Дубей М.В., Загороднюк А.В. *Лінеаризація ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних відображень* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 40–48.

У статті введено поняття ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних функцій, аналоги тензорного та симетричного тензорного добутку метричних просторів. Використовуючи аналоги тензорного добутку метричних просторів та процес лінеаризації аналітичних функцій, здійснено глобальну лінеаризацію ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних відображень.

Вступ

Нехай X — непорожній метричний простір, зафіксуємо у ньому деяку точку θ_x. Такий метричний простір називається *простором з відміченою точкою*. Нагадаємо, що відображення f між метричними просторами X та Y називається *ліпшицевим*, якщо існує стала L_f така, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L_f \rho_X(x_1, x_2)$, де найменша з можливих сталих L_f називається сталою Ліпшица. Простір усіх ліпшицевих відображень з метричного простору X з відміченою точкою θ_x у метричний простір Y з відміченою точкою θ_y, які переводять θ_x в θ_y, позначається $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$. У випадку, коли Y є лінійним простором, ми завжди вважатимемо, що $\theta_y = 0$. Загальна теорія ліпшицевих відображень викладена у монографіях Н. Вівера [11], І. Беніаміні, Ж. Лінденштрауса [4]. У роботі В. Пестова [10] доведено, що для довільного метричного простору X з відміченою точкою θ_x існує єдиний (з точністю до ізометричного ізоморфізму) банахів простір $B(X)$ такий, що метричний простір X вкладається у банахів простір $B(X)$ і кожне відображення $f(x) \in \mathrm{Lip}_0(X,E)$ може бути продовжене до лінійного оператора $\widetilde{f}(x) : B(X) \to E$ для довільного нормованого простору E, причому $\|\widetilde{f}\| = L_f$. Позначимо через $\operatorname{span} X$ лінійну оболонку простору X, а елементи з лінійної оболонки через $\underline{x}$. За побудовою, елементи вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{x_k}$ є щільними у просторі $B(X)$. Простір $B(X)$ називається *вільним банаховим простором*.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 26A16, 45G25.

Ключові слова і фрази: тензорний добуток, ліпшицеве відображення, метричний простір, вільний банахів простір.

Деякий клас $\mathcal{F}(X,Y)$ нелінійних відображень з X в Y *допускає глобальну лінеаризацію*, якщо існує лінійний простір $W(X)$ та ін'єктивне відображення $\mathcal{U}_{\mathcal{F}(X,Y)} : X \to W(X)$ таке, що для довільного $F \in \mathcal{F}(X,Y)$ існує лінійний оператор $L_F \in \mathcal{L}(W(X),Y)$, для яких наступна діаграма є комутативною.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & Y \\ \mathcal{U}_{\mathcal{F}(X,Y)} \downarrow & \nearrow & L_F \\ W(X) & & \end{array} \tag{1}$$

Відображення $\mathcal{U}_{\mathcal{F}(X,Y)}$ при цьому називається *канонічним відображенням* у даній лінеаризаціїї.

Вільний банахів простір $B(X)$ та відображення $\nu : X \to B(X)$, $\nu(x) = \underline{x}$ задають лінеаризацію нелінійних функцій з класу $\mathrm{Lip}_0(X,E)$. Лінеаризацію ліпшицевих функцій досліджували Д. Райков [2], Р. Аренс та Ж. Ілс [3], Ж. Флуд [7], Ж. Годефруа, Н. Калтон [8] та інші. В роботі [6] автори досліджують властивості вільних банахових просторів.

Добре відомо, що поліноміальні та деякі класи аналітичних відображень банахового простору допускають глобальну лінеаризацію, з використанням тензорних добутків та їх топологічних сум. Метою цієї роботи є поєднання техніки вільних банахових просторів та тензорних добутків для лінеаризації і дослідження широкого класу відображень на метричних просторах, які в роботі названо ліпшицево-поліноміальними та ліпшицево-аналітичними.

У першому розділі досліджено аналоги тензорних добутків метричних просторів і введено ліпшицево-поліноміальні відображення.

У другому розділі розглянуто широкий клас аналітичних відображень на комплексних банахових просторах, який допускає глобальну лінеаризацію, і застосовано його для дослідження ліпшицево-аналітичних відображень.

1 Тензорні добутки метричних просторів

Нехай X, Y – метричні простори. Побудуємо множину

$$\Omega_X = \{\underline{x} - \underline{x}' \,|\, x, x' \in X, x \neq x'\} \cup \theta_x \subset B(X),$$

аналогічно можна побудувати множину Ω_Y. Розглянемо лінійний простір Σ формальних сум $\sum\limits_i \lambda_i(x_i, y_i)$, де $(x_i, y_i) \in \Omega_X \times \Omega_Y$. Очевидно, що множина елементів

$$\Sigma_0 = \sum_k \gamma_k(x_k, \theta_y) + \sum_j \mu_j(\theta_x, y_j)$$

є лінійним підпростором Σ.

Розглянемо фактор-простір $\widetilde{\Sigma} = \Sigma/\Sigma_0$. Позначимо клас еквівалентності елемента (x, y) через $x\diamond y$. Тензорним добутком метричних просторів X, Y називатимемо множину $X \diamond Y = \{x \diamond y \,|\, x \in \Omega_X, y \in \Omega_Y\}$. Для кожного елемента $\omega \in \widetilde{\Sigma}$ визначимо норму

$$\|\omega\| := \inf \sum_k |\lambda_k| \|\underline{u_k} - \underline{u_k'}\| \|\underline{v_k} - \underline{v_k'}\|, \tag{2}$$

де інфімум береться по всіх зображеннях елемента ω у такому вигляді:

$$\omega = \sum_k \lambda_k(\underline{u_k} - \underline{u'_k}) \diamond (\underline{v_k} - \underline{v'_k}) \tag{3}$$

де $u_k, u'_k \in X, v_k, v'_k \in Y$. У статті [1] доведено наступне твердження.

Твердження 1.1. *Поповнення простору* $\widetilde{\Sigma}$ *відносно норми (2) ізометрично ізоморфне проективному тензорному добутку* $B(X)\widehat{\bigotimes}_\pi B(Y)$ *банахових просторів* $B(X)$ *та* $B(Y)$.

Зокрема, з цієї теореми випливає, що $X \diamond Y$ вкладається в $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$. Проективна тензорна норма простору $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$ індукує метрику на $X \diamond Y$, яка має вигляд

$$\begin{gathered}\rho((x_1 - x'_1) \diamond (y_1 - y'_1), (x_2 - x'_2) \diamond (y_2 - y'_2)) = \\ \|(\underline{x_1} - \underline{x'_1}) \diamond (\underline{y_1} - \underline{y'_1}) - (\underline{x_2} - \underline{x'_2}) \diamond (\underline{y_2} - \underline{y'_2})\| = \\ \|(x_1 - x'_1) \otimes (y_1 - y'_1) - (x_2 - x'_2) \otimes (y_2 - y'_2)\|_\pi.\end{gathered} \tag{4}$$

Таким чином, $X \diamond Y$ є метричним простором з відміченою точкою $\theta_X \diamond \theta_Y$.

Нехай Z — метричний простір з відміченою точкою θ_z. Побудуємо тензорний добуток $(X \diamond Y) \diamond Z$. Лінійний простір формальних сум запишеться у такому вигляді:

$$\Sigma = \sum_i \lambda_i(x_i \diamond y_i, z_i),$$

де $(x_i \diamond y_i, z_i) \in \Omega_{X\diamond Y} \times \Omega_Z$, і $\Omega_Z = \{\underline{z} - \underline{z'} | z, z' \in Z, z \neq z'\} \cup \theta_z$, а множина $\Omega_{X\diamond Y}$ має наступне зображення

$$\Omega_{X\diamond Y} = \{\underline{x \diamond y} - \underline{x' \diamond y'} \,|\, x \diamond y, x' \diamond y' \in X \diamond Y\} \cup \theta_x \diamond \theta_y \subset B(X \diamond Y),$$

де $x \diamond y$ та $x' \diamond y'$ не належать до одного класу еквівалентності.

Покладемо у відповідність елементу з простору $(X \diamond Y) \times Z$ елемент з простору $X \times Y \times Z$ за таким правилом:

$$(x_i \diamond y_i, z_i) = ((x_i, y_i) + (\theta_x, y_i) + (x_i, \theta_y), z_i) = (x_i, y_i, z_i) + (\theta_x, y_i, z_i) + (x_i, \theta_y, z_i). \tag{5}$$

Тоді $\Sigma = \sum\limits_i \lambda_i((x_i, y_i, z_i) + (x_i, \theta_y, z_i) + (\theta_x, y_i, z_i))$. Підпростір Σ_0 у цьому випадку матиме вигляд $\Sigma_0 = \sum\limits_k \alpha_k(x_k \diamond y_k, \theta_z) + \sum\limits_j \beta_j(\theta_x \diamond \theta_y, z_j)$. Враховуючи (5), отримаємо, що

$$\begin{gathered}\Sigma_0 = \sum_k \alpha_k((x_k, y_k) + (x_k, \theta_y) + (\theta_x, y_k), \theta_z)) + \sum_j \beta_j(\theta_x, \theta_y, z_j) = \\ \sum_k \alpha_k((x_k, y_k, \theta_z) + (x_k, \theta_y, \theta_z) + (\theta_x, y_k, \theta_z)) + \sum_j \beta_j(\theta_x, \theta_y, z_j).\end{gathered}$$

Розглянемо фактор-простір $\widetilde{\Sigma} = \Sigma/\Sigma_0$. Аналогічно, як у випадку двох просторів, клас еквівалентності елемента $((x, y), z)$ позначимо через $(x\diamond y)\diamond z$. Тензорним добутком $(X \diamond Y) \diamond Z$ метричного простору $X \diamond Y$ та метричного простору Z назвемо множину класів еквівалентності $(x \diamond y) \diamond z$, тобто

$$(X \diamond Y) \diamond Z = \{(x \diamond y) \diamond z | x \diamond y \in \Omega_{X\diamond Y}, z \in Z\}.$$

Аналогічно можна побудувати тензорний добуток

$$X \diamond (Y \diamond Z) = \{x \diamond (y \diamond z) | x \in X, y \diamond z \in \Omega_{Y\diamond Z}\}.$$

Твердження 1.2. *Простори $(X \diamond Y) \diamond Z$ та $X \diamond (Y \diamond Z)$ є ізометрично ізоморфними.*

Доведення. Побудуємо відображення $I : (x \diamond y) \diamond z \mapsto x \diamond (y \diamond z)$, яке кожному класу $(x \diamond y) \diamond z$ ставить у відповідність клас $x \diamond (y \diamond z)$. Запишемо метрику простору $(X \diamond Y) \diamond Z$:

$$\rho((x_1 \diamond y_1) \diamond z_1, (x_2 \diamond y_2) \diamond z_2) = \|(x_1 \diamond y_1) \diamond z_1 - (x_2 \diamond y_2) \diamond z_2\| =$$

$$\|(x_1 \otimes y_1) \otimes z_1 - (x_2 \otimes y_2) \otimes z_2\|_\pi = \|x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 - x_2 \otimes y_2 \otimes z_2\|_\pi .$$

Метрика простору $X \diamond (Y \diamond Z)$ матиме такий вигляд:

$$\rho(x_1 \diamond (y_1 \diamond z_1), x_2 \diamond (y_2 \diamond z_2)) = \|x_1 \diamond (y_1 \diamond z_1) - x_2 \diamond (y_2 \diamond z_2)\| =$$

$$\|x_1 \otimes (y_1 \otimes z_1) - x_2 \otimes (y_2 \otimes z_2)\|_\pi = \|x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 - x_2 \otimes y_2 \otimes z_2\|_\pi .$$

Очевидно, що I є бієктивним ізометричним відображенням, тому простори $(X \diamond Y) \diamond Z$ та $X \diamond (Y \diamond Z)$ є ізометрично ізоморфними. $\square$

Таким чином, ми можемо побудувати тензорний добуток трьох метричних просторів двома способами, і ці множини співпадуть з точністю до ізометричного ізоморфізму. Позначимо його $X \diamond Y \diamond Z$. Зауважимо, що тензорний добуток $X \diamond Y \diamond Z$ вкладається у простір $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)\widehat{\otimes}_\pi B(Z)$ і проективна тензорна норма індукує метрику на $X \diamond Y \diamond Z$.

Тензорний добуток трьох метричних просторів також буде метричним простором з відміченою точкою $\theta_x \diamond \theta_y \diamond \theta_z$.

Аналогічно, за індукцією, якщо ми побудували тензорний добуток $n-1$ метричного простору, то n-тий тензорний добуток метричних просторів можна ввести як тензорний добуток простору X_n та тензорного добутку метричних просторів X_i, де $i = 1, 2, ..., n-1$, тобто $X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n = (X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1}) \diamond X_n$ або $X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n = X_1 \diamond (X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n)$. Тензорний добуток n метричних просторів вкладається у $\widehat{\otimes}_\pi^n B(X_i) = B(X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_n)$, де $i = 1, 2, ..., n$ і проективна тензорна норма індукує метрику на $X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n$, тому тензорний добуток n метричних просторів також буде метричним простором з відміченою точкою $\theta_{x_1} \diamond \theta_{x_1} \diamond \cdots \diamond \theta_{x_n}$.

Для метричного простору X можна ввести поняття симетричного тензорного добутку. Симетричним тензорним добутком назвемо таку множину

$$X \diamond_s X = \{x_1 \diamond_s x_2 | x_1, x_2 \in \Omega_X\},$$

де

$$x_1 \diamond_s x_2 = \frac{x_1 \diamond x_2 + x_2 \diamond x_1}{2}.$$

Зауважимо, що $X \diamond_s X \subset X \diamond X$. Аналогічно можна будувати n-тий симетричний тензорний степінь $\diamond_s^n X$ метричного простору X. Очевидно, що при цьому $B(\diamond_s^n X) = \widehat{\otimes}_{s,\pi}^n B(X)$. Тому $B'(\diamond_s^n X) = \mathcal{L}(^n B(X))$ — простір всіх n-лінійних симетричних відображень на $B(X)$. Будемо позначати $\underbrace{x \diamond x \diamond \cdots \diamond x}_{n}$ через $x^{\diamond n}$, а $\underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{n}$ — через $x^{\otimes n}$. Відомо [5], що на $\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n B(X)$ існує норма, еквівалентна до норми, індукованої з $\widehat{\otimes}_\pi^n B(X)$, і така, що для кожного $u \in B(X)$

$$\|u^{\otimes n}\| = \sup\{|P(u)| P \in \mathcal{P}(^n B(X)), \|P\| \leq 1\},$$

де $\mathcal{P}({}^nB(X))$ — банахів простір n-однорідних неперервних поліномів на $B(X)$. Звуження цієї норми на $\diamond_s^n X$ породжує метрику, яка буде ліпшицево еквівалентною до метрики, індукованої з $\diamond_s^n X$. Нагадаємо, що метрика ρ_1 є ліпшицево еквівалентною до метрики ρ_2, якщо існують сталі $c_1 > 0, c_2 > 0$, такі що

$$c_2\rho_2(x_1, x_2) \leq \rho_1(x_1, x_2) \leq c_1\rho_2(x_1, x_2)$$

для всіх елементів x_1, x_2 метричного простору X.

Нехай X, Y — метричні простори, позначимо через $\mathbb{P}({}^nX, Y)$ множину відображень з X в Y таких, що для довільного відображення $F \in \mathbb{P}({}^nX, Y)$ існує n-однорідний неперервний поліном $P_F \in \mathcal{P}({}^nB(X), B(Y))$, для якого $P_F(\underline{x}) = \underline{F(x)}$ для довільного $x \in X$. Елементи класу $\mathbb{P}({}^nX, Y)$ будемо називати *n-однорідними ліпшицево-поліноміальними відображеннями* з простору X у простір Y.

Твердження 1.3. *Для кожного $F \in \mathbb{P}({}^nX, Y)$ існує ліпшицеве відображення $\Phi_F(\diamond_s^n X, Y)$, таке що*

$$\Phi_F(x^{\diamond x}) = F(x) \quad i \quad L_{\Phi_F} = \|P\|.$$

Доведення. Нехай P_F — n-однорідний поліном з $B(X)$ в $B(Y)$, який відповідає відображенню F. Цьому поліному відповідає лінійний оператор

$$\widetilde{P}_F : \widehat{\otimes}_{s,\pi}^n B(X) \to B(Y),$$

такий що $\widetilde{P}_F(\underline{x}^{\otimes n}) = P_F(\underline{x})$.

Оскільки $\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n B(X) = B(\diamond_{s,\pi}^n X)$, то лінійному оператору $\widetilde{P}_F$ відповідає ліпшицеве відображення $\widetilde{\Phi}_F : \diamond_s^n X \to B(Y)$, таке що $\widetilde{\Phi}_F(x^{\diamond n}) = P_F(\underline{x}) = \underline{F(x)}$. Образ $F(x)$ міститься в Y, тому $\underline{F(x)} \subset \nu_Y(Y)$, де $\nu_Y : y \mapsto \underline{y}$ — ізометричне вкладення. Покладемо

$$\Phi_F = \nu_Y^{-1} \circ \widetilde{\Phi}_F,$$

це і буде шуканим відображенням, крім того,

$$L_{\Phi_F} = L_{\widetilde{\Phi}_F} = \|P_F\| = \|P\|.$$

□

З твердження 1.3 випливає, що $\mathbb{P}({}^nX, Y)$ є банаховим простором, ізоморфним до простору $\mathcal{P}({}^nB(X), B(Y))$ n-однорідних поліномів з $B(X)$ в $B(Y)$.

Нехай γ — деяка тензорна норма на $B(X)$. Тоді $\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n B(X) \subset \widehat{\otimes}_{s,\gamma}^n B(X)$. Тому простір лінійних неперервних операторів з $\widehat{\otimes}_{s,\gamma}^n B(X)$ в довільний банахів простір E є природно ізоморфний до деякого підпростору n-однорідних поліномів у $\mathcal{P}({}^nB(X), E)$.

Розглянемо випадок, коли $Y = E$ — лінійний метричний простір. Тоді можна визначити неперервне поліноміальне відображення $P \in \mathcal{P}({}^nB(X), E)$. Позначимо через h_0 відображення, яке кожному елементу $z \in \operatorname{span} E$, $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \underline{x_k}$ ставить у відповідність елемент $h_0(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k \in E$. У [6] показано, що коли E — банахів простір, то h_0 — лінійний обмежений оператор, який можна продовжити за лінійністю і неперервністю до оператора $h : B(E) \to E$, причому $\|h\| = 1$ і відображення $x \mapsto \underline{h(x)}$ є ліпшицевою ретракцією з $B(E)$ в $\underline{E} \subset B(E)$.

Теорема 1. *Нехай E — лінійний метричний простір, такий що відображення*

$$h : B(E) \to E$$

коректно визначене і є лінійним неперервним оператором. Тоді для кожного

$$F \in \mathbb{P}(^n X, E)$$

існує поліном $P \in \mathcal{P}(^n B(X), E)$ такий, що $P(\underline{x}) = F(x)$ для всіх $x \in X$. І навпаки, якщо $P \in \mathcal{P}(^n B(X), E)$, то $P(\underline{x}) \in \mathbb{P}(^n X, E)$.

Доведення. Нехай $F \in \mathbb{P}(^n X, E)$, тоді $P_F \in \mathcal{P}(^n B(X), B(E))$. Визначимо відображення $P = h \circ P_F$, тоді $P(\underline{x}) = h(P_F(\underline{x})) = h(\underline{F(x)}) = F(x)$.

Навпаки, нехай $P \in \mathcal{P}(^n B(X), E)$. Поліному P відповідає ліпшицеве відображення $\Phi : \diamond_s^n X \to E$ з ліпшицевою константою $L_\Phi = \|P\|$. Тому відображення $\psi : \diamond_s^n X \to B(E)$, $\psi(u) = \underline{\Phi(u)}$, буде ліпшицевим і $L_\psi = L_\Phi = \|P\|$. Відображенню ψ відповідає n-однорідний неперервний поліном, який ми позначимо P_F, $P_F : B(X) \to B(E)$, $P_F(z) = \psi(z^{\diamond n})$ для довільного $z \in B(X)$. Тоді $P_F(\underline{x}) = \underline{P(\underline{x})}$ і $F(x) = h(\underline{P(\underline{x})}) = P(\underline{x}) \in \mathbb{P}(^n X, E)$. $\square$

Наслідок 1.1. *В умовах теореми відображення $P(x) \mapsto P(\underline{x})$ є ізоморфізмом банахових просторів $\mathcal{P}(^n B(X), E)$ та $\mathbb{P}(^n X, E)$.*

2 Лінеаризація аналітичних та ліпшицево-аналітичних функцій

Простір всіх аналітичних відображень на відкритій множині U зі значеннями у банаховому просторі Y будемо позначати через $H(U, Y)$. Аналітичні функції також допускають лінеаризацію з використанням тензорного добутку. Відомості з теорії аналітичних функцій на банахових просторах можна знайти у [5].

Нехай $\xi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — деяка аналітична функція однієї комплексної змінної в околі нуля радіуса $\rho_0 = \frac{1}{\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}}}$. Нехай X — комплексний банахів простір, $\otimes_{\gamma,s}^n X$— n-тий симетричний тензорний степінь простору X, поповнений відносно деякої тензорної норми γ. Позначимо через $F_\xi(x)$ формальний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{\otimes n}$. Нехай $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma} = \mathcal{F}_{\alpha,\gamma}(X)$ — простір $(\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty})_\alpha \bigotimes_{\gamma,s}^n X$ скінченних прямих сум $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\gamma,s}^n X$, поповнений відносно деякої норми α.

Нагадаємо означення радіуса рівномірної збіжності та радіуса обмеженості аналітичної функції [5]. Нехай $f \in H(U, Y)$, де U — відкрита підмножина в X і $x \in U$. *Радіус рівномірної збіжності* $\varrho_x(f)$ функції f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що $x + \lambda B \subset U$ і ряд Тейлора функції f в околі точки x збігається до f рівномірно на множині $x + \lambda B$, де B — одинична куля в X. *Радіус обмеженості* f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що f є обмеженою функцією на множині $x+\lambda B$. Відомо [5], що радіус рівномірної збіжності аналітичної функції дорівнює радіусу обмеженості.

Твердження 2.1. *F_ξ є аналітичним відображенням з відкритої кулі $B_{\rho_0(\xi)}$ в X з центром в нулі радіуса ρ_0 в $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ тоді F_ξ є обмеженим на кулі будь-якого меншого радіусу з центром в нулі.*

Доведення. Розглянемо n-ту однорідну компоненту відображення F_ξ:

$$F_{\xi,n} = c_n x^{\otimes n}.$$

Відомо [5], що радіус рівномірної збіжності в нулі (дорівнює радіусу обмеженості в нулі) функції F_ξ можна знайти за формулою:

$$\varrho_0(F_\xi) = \frac{1}{\limsup \|F_{\xi n}\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \rho_0.$$

Тому F_ξ буде аналітичною функцією в околі нуля радіуса ρ_0. $\square$

Зауважимо, що для кожного лінійного неперервного функціоналу $\varphi \in \mathcal{F}'_{\alpha,\gamma}$ композиція $\varphi \circ F_\xi$ буде аналітичною функцією обмеженого типу в кулі $B_{\rho_0(\xi)}$. Позначимо $\Phi_\xi = \{\varphi \circ F_\xi : \varphi \in \mathcal{F}'_{\alpha,\gamma}\}$. Тоді при заданих ξ, α, γ пара $F_\xi, \mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ задає лінеаризацію функцій з класу Φ_ξ на $B_{\rho_0(\xi)}$. Аналогічно, якщо A — лінійний оператор з $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ в деякий нормований простір Y, то $A \circ F_\xi$ буде аналітичним відображенням з $B_{\rho_0(\xi)}$ в Y. Відображення F_ξ будемо називати *породжуючою функцією* для класу Φ_ξ.

Приклад 2.1. *Нехай $\xi(z) = \frac{az+b}{-cz+d} = \frac{az+b}{d(1-\frac{c}{d}z)} = \frac{az+b}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}z^n$ — дробово-лінійне відображення з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, визначене в кулі з центром в нулі радіуса $\frac{d}{c}$, тоді*

$$F_\xi(x) = \frac{ax+b}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}x^{\otimes n}.$$

Нехай $\varphi \in \mathcal{F}'_{\alpha,\gamma}$, тоді $\varphi \circ F_\xi(x) = p + \frac{a\varphi(x)+b}{d}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}\varphi_n(x)$, де φ_n — n-однорідний поліном, що є звуженням φ на $\bigotimes_{\gamma,s}^n X$.

У випадку, коли $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} g_k^n(x), \varphi_0(1) = p$, де $g \in X'$, $\|g\| \le \frac{d}{c}$, отримаємо, що

$$\varphi \circ F_\xi(x) = \frac{ag(x)+b}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}\sum_{k=1}^{p} g_k^n(x) =$$

$$\Big(1 + \frac{ag_1(x)+b}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}g_1^n(x)\Big) + \Big(1 + \frac{ag_2(x)+b}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}g_2^n(x)\Big) + \cdots +$$

$$\Big(1 + \frac{ag_p(x)+b}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}g_p^n(x)\Big) =$$

$$\frac{ag_1(x)+b}{d(1-\frac{c}{d}g_1(x))} + \frac{ag_2(x)+b}{d(1-\frac{c}{d}g_2(x))} + \cdots + \frac{ag_p(x)+b}{d(1-\frac{c}{d}g_p(x))} = \sum_{k=1}^{p}\frac{ag_k(x)+b}{-cg_k(x)+d}.$$

Цей приклад показує, як можна лінеаризувати дробово-лінійні відображення. Зокрема, для випадку $\xi = \frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $\varphi_n = f^n + g^n$, де $f, g \in X'$, $X = \mathbb{C}^2 = \{x = (x_1, x_2) = x_2e_2 + x_2e_2\}$, отримуємо $x^{\otimes n} = (x_2e_2 + x_2e_2)^{\otimes n} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k x_1^k x_2^{n-k} e_1^{\otimes n} e_2^{\otimes n-k}$, $\|f\| \le 1, \|g\| \le 1$ і $\varphi_0(1) = 2$, тоді

$$\varphi \circ F_\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}f^n(x) + \sum_{n=1}^{\infty}g^n(x) = \frac{1}{1-f(x)} + \frac{1}{1-g(x)}.$$

В загальному випадку, клас функцій $\varphi \circ F_\xi$ може бути дуже широким. Наприклад, $X = \mathbb{C}$, $\xi = \frac{1}{1-z}$, α — ℓ_2-норма, γ — стандартна метрика в $\mathbb{C}$. Тоді кожна аналітична функція в одиничному крузі $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, яка належить класу Харді $H^2(\mathbb{D})$, має вигляд $\varphi \circ F_\xi$. Справді, в цьому випадку простір $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ ізометрично ізоморфний до $H^2(\mathbb{D})$. Кожен лінійний функціонал φ на $H^2(\mathbb{D})$ визначається деякою функцією $f \in H^2(\mathbb{D})$, такою що

$$\varphi(g) = \int\limits_S g(z)\overline{f(z)}dz.$$

Зокрема, $\varphi \circ F_\xi(z) = \int\limits_S \frac{\overline{f(z)}}{1-z}dz = f(z)$ (за формулою Коші).

Якщо у нас визначено дві породжуючі функції F_{ξ_1} та F_{ξ_2}, то за певних умов їх композиція буде породжуючою функцією для деякого класу Φ.

Виберемо простір X, тензорну норму γ та норму α так, щоб

$$\mathcal{F}_{\alpha,\gamma} \otimes_{\gamma,s} \mathcal{F}_{\alpha,\gamma} \subset \mathcal{F}_{\alpha,\gamma}. \tag{6}$$

Для цього достатньо, щоб простір X був ізоморфним до $\otimes^n_{\gamma,s}X$ для довільного n та ізоморфним до $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. У [9] доведено, що коли X — банахів простір з безумовним базисом, то вказані умови виконуються для деяких α і γ. Зокрема, якщо $X = \ell_1$, то включення (6) виконується, коли γ — проективна тензорна норма і α — ℓ_1-норма на $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$, тобто $\|\sum \omega_n\|_\alpha = \|\sum \omega_n\|_\gamma$, де $\omega_n \in \otimes^n_{\gamma,s}X$. Якщо $X = c_0$, то γ буде ін'єктивною тензорною нормою, а α — c_0-норма на $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. У випадку, коли $X = \ell_2$, замість γ можна вибрати гільбертову тензорну норму, а α — ℓ_2-норма на $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. Припустимо, що ξ_1, ξ_2 — функції комплексного аргументу, аналітичні в кулях B_{r_1} і B_{r_2} відповідно. Нехай $r > 0$ — таке число, що $\forall z \in B_{r_2}$ $|z| < r, \xi_2(z) \in B_{r_2}$, тоді $F_{\xi_1} \circ F_{\xi_2}$ є аналітичним відображенням з $B_r \subset X$ в $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. Оскільки $\xi \mapsto F_\xi$ є лінійним і мультиплікативним, то $F_{\xi_1} \circ F_{\xi_2} = F_{\xi_1 \circ \xi_2}$ буде породжуючою функцією для класу аналітичних функцій $\Phi_{\xi_1 \circ \xi_2}$ на B_{r_1}.

Нехай X — метричний простір з відміченою точкою. Розглянемо простір $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}(B(X))$ для довільних норм α та γ і канонічного вкладення F_ξ. Визначимо клас відображень

$$\Phi_\xi(X,E) = \{A \circ F_\xi \circ \nu | A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}(B(X)), E)\}.$$

Таким чином, пара $F_\xi \circ \nu$ та $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ задає лінеаризацію відображень з класу $\Phi_\xi(X,E)$. Будемо називати відображення f з X в E *ліпшицево-аналітичними*, якщо $f \in \Phi_\xi(X,E)$ для деякої аналітичної функції ξ, норм α і γ. У випадку, коли γ — проективна норма, простір $\mathcal{F}_{\alpha,\pi}(B(X))$ буде поповненням формальної суми просторів $\diamond^n_s X$ відносно деякої норми, яка індукується нормою α.

Література

1. Дубей М.В. *Аналог тензорного добутку метричних просторів* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2010. — Вип.501. — С.33–38.

2. Райков Д.А. *Свободные локально выпуклые подпространства равномерных пространств* // Мат. сб. — 1964. — Т.63, № 4. — С. 582–590.

3. Arens R., Eells J. *On embedding uniform and topological spaces*, Pacic J. Math., **6** (1959), 397–403.

4. Benyamini Y., Lindenstrauss J. Geometric nonlinear functional analysis, Providence, Amer. Math. Society, 2000.

5. Dineen S. Complex Analysis on infinite dimensional space, Monographs in mathematics, Springer, New York, 1999.

6. Dubei M., Tymchatyn E. D., Zagorodnyuk A. *Free Banach Spaces and Extension of Lipschitz Maps*, Topology, Elsevier, **48**, 2 (2009), 203–213.

7. Flood J. Free topological vector spaces, Canberra, Australian National university, Ph. D. thesis, 1975.

8. Godefroy G., Kalton N. *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math., **159**, 1 (2003), 121–141.

9. Lopuhanky O.V., Zagorodnyuk A.V. *Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables*, Annales pol. mathem., **81**, 2 (2003), 111–122.

10. Pestov V. *Free Banach spaces and representation of topological groups*, Func. Anal. Appl., **20** (1986), 70–72.

11. Weaver N. Lipschitz algebras, Singapore, New Jersey, London, New York, World Scientific, 1999.

Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна

Надійшло 04.04.2011

Dubei M.V., Zagorodnyuk A.V. *Linearization of Lipschitz-polynomial and Lipschitz-analytic mappings*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 40–48.

We introduce and study Lipschitz-analytic and Lipcshitz-polynomial functions, analogues of tensor and symmetric tensor products of metric spaces. Using the analogues of tensor products of metric spaces and linearizations of analytic functions we construct a global linearization of Lipschitz-polynomial and Lipschitz-analytic maps.

Дубей М.В., Загороднюк А.В. *Линеаризация липшицово-полиномиальных и липшицово-аналитических функций* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 40–48.

В статье вводится понятие липшицово-полиномиальных и липшицово-аналитических функций, аналоги тензорного и симметрического тензорного произведения метрических пространств. Используя аналоги тензорного произведения метрических пространств и процесс линеаризации аналитических функций, осуществляется глобальная линеаризация липшицево-полиномиальных и липшицево-аналитических отображений.