ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 14–18 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.14–18
doi:10.15330/cmp.5.1.14-18

Бондаренко Є.В.

РІСТ СПРЯЖЕНОСТІ В ГІЛЛЯСТИХ ГРУПАХ

Доведено, що гіллясті групи автоморфізмів регулярного кореневого дерева не можуть мати поліноміальний ріст спряженості.

Ключові слова і фрази: гілляста група, клас спряженості, функція росту.

Taras Shevchenko National University, 64/13 Volodymyrska str., 01601, Kyiv, Ukraine
E-mail: ibond.univ@gmail.com

Вступ

Нехай G — скінченно породжена група зі скінченною системою твірних S. Одним із центральних об'єктів дослідження в геометричній теорії груп є функція росту групи $\gamma_G(n)$, яка обчислює кількість елементів групи в кулі радіуса n з центром в одиниці в графі Келі групи $\Gamma(G,S)$. *Функція росту спряженості* $\gamma_G^c(n)$ групи G визначається як кількість класів спряженості, які перетинають кулю радіуса n в графі Келі. Функції росту спряженості розглядалися з 60-х років минулого століття для фундаментальних груп деяких класів многовидів. За останні кілька років було отримано ряд важливих загальних результатів про ріст спряженості. Зокрема, відомі результати про функції росту лінійних і розв'язних груп були перенесені на функції росту спряженості. Так в роботах [2, 9, 3] доведено, що скінченно породжені лінійні групи та скінченно породжені розв'язні групи, які не є віртуально нільпотентними, мають (рівномірно) експоненційний ріст спряженості.

В даній роботі ми розглядаємо ріст спряженості в гіллястих групах, які були визначені Р.І. Григорчуком в [6]. Цей клас груп є важливим з точки зору звичайного росту груп, оскільки в ньому були вперше знайдені групи проміжного росту [4], а також завдяки іншим цікавим властивостям (екстремальність, скінченна ширина, періодичність тощо, див. [5, 1, 6]). Зауважимо, що гіллясті групи не можуть мати поліноміальний ріст. Це одразу випливає з того, що кожна гілляста група містить нетривіальний прямий добуток H^n для всіх $n \in \mathbb{N}$, а ріст підгрупи не може бути більшим за ріст групи. Цей аргумент не працює для росту спряженості: підгрупа може мати більший ріст спряженості за групу (наприклад, можна взяти підгрупи в нескінченній скінченно породженій групі з двома класами спряженості, див. [10]). В роботі ми доводимо, що гіллясті групи автоморфізмів регулярних кореневих дерев не можуть мати поліноміальний ріст спряженості, тобто

УДК 512.54
2010 *Mathematics Subject Classification:* 20F69, 20E45, 20E08.

функція $\gamma^c_G(n)$ не обмежена зверху поліномом від n. Звідси, зокрема, випливає, що гіллясті групи проміжного росту, наприклад такі, як група Григорчука або група ітерованих монодромій многочлена $z^2 + i$, мають проміжний ріст спряженості. Зауважимо, що доведення цього факту для групи Григорчука було наведено в [8].

1 Гіллясті групи

Нехай X — скінченний алфавіт порядку $|X| \geq 2$. Множину всіх скінченних слів над X позначимо $X^* = \{x_1x_2 \dots x_n : x_i \in X, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Довжину слова $v \in X^*$ позначаємо $|v|$. Множину X^* будемо ототожнювати з множиною вершин регулярного кореневого дерева, в якому кожна вершина v з'єднана ребром з vx для всіх $x \in X$, а коренем є порожнє слово. Множина вершин X^n утворює n-тий рівень дерева X^*.

Нехай $G < \operatorname{Aut} X^*$ і v — вершина дерева X^*. *Стабілізатором вершини* v називається підгрупа $\mathrm{St}_G(v) = \{g \in G : g(v) = v\}$. *Стабілізатором n-го рівня* дерева називається підгрупа $\mathrm{St}_G(n) = \{g \in G : g(v) = v \text{ для всіх } v \in X^n\}$. Стабілізатор $\mathrm{St}_G(n)$ має скінченний індекс в групі G, який обмежений зверху індексом

$$[\operatorname{Aut} X^* : \mathrm{St}_{\operatorname{Aut} X^*}(n)] = |X|!^{1+|X|+\ldots+|X|^{n-1}} \leq C^{|X|^n}, \tag{1}$$

де C — деяка константа, яка залежить тільки від $|X|$. *Жорстким стабілізатором вершини* v називається підгрупа $\mathrm{RiSt}_G(v) = \{g \in G : g(u) = u \text{ для всіх } u \in X^* \setminus vX^*\}$. *Жорстким стабілізатором n-го рівня* дерева називається підгрупа $\mathrm{RiSt}_G(n)$, породжена жорсткими стабілізаторами вершин n-го рівня. Оскільки жорсткі стабілізатори різних вершин одного рівня комутують між собою, то жорсткі стабілізатори рівнів розкладаються у прямий добуток

$$\mathrm{RiSt}_G(n) = \prod_{v \in X^n} \mathrm{RiSt}_G(v).$$

Група G називається *гіллястою*, якщо вона діє транзитивно на всіх рівнях дерева і кожен жорсткий стабілізатор рівня $\mathrm{RiSt}_G(n)$ має скінченний індекс в G.

Визначимо вкладення $\psi : \prod_{x \in X} \operatorname{Aut} X^* \to \operatorname{Aut} X^*$, яке переводить набір автоморфізмів $(g_x)_{x \in X}$ у автоморфізм, який стабілізує вершини з X і діє на піддереві xX^* так само, як g_x діє на X^*. Група G називається *регулярно гіллястою* над своєю підгрупою H, якщо G діє транзитивно на всіх рівнях дерева, підгрупа H має скінченний індекс в G і $\psi(\prod_{x \in X} H)$ є підгрупою скінченного індексу в H.

Кожен автоморфізм $g \in \operatorname{Aut} X^*$ індукує відображення $vX \to g(v)X$ для довільної вершини $v \in X^*$. Скорочуючи префікси v і $g(v)$, ми отримуємо підстановку на множині X, яка називається *вершинною підстановкою* автоморфізма g в вершині v. Кожен автоморфізм однозначно визначається набором вершинних підстановок у всіх вершинах дерева.

2 Результати

Функція росту спряженості групи залежить від вибору системи твірних. Для того, щоб позбутися цієї залежності вводять відношення еквівалентності на таких функціях. Для функцій $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кажуть, що $f \preccurlyeq g$, якщо існує така константа C, що $f(n) \leq Cg(Cn) + C$ для всіх n. Функції f і g називаються еквівалентними (мають однаковий ріст), якщо $f \preccurlyeq g$ і $g \preccurlyeq f$. Функції росту спряженості для різних скінченних систем твірних групи є еквівалентними. Кажуть, що група має поліноміальний ріст спряженості, якщо існує такий поліном $P(n)$, що $\gamma_G^c(n) \preccurlyeq P(n)$. Зауважимо, що якщо звичайна функція росту $\gamma_G(n)$ має поліноміальний ріст, то $\gamma_G(n) \sim n^m$ для деякого цілого $m \in \mathbb{N}$. Для функцій росту спряженості ця властивість не виконується, більш того, скінченно породжена група може мати довільну функцію спряженості з природніми обмеженнями (див. [10]).

Теорема 1. *Скінченно породжена гілляста група не може мати поліноміальний ріст спряженості.*

Доведення. Нехай G — скінченно породжена гілляста група автоморфізмів дерева X^*. Спочатку ми доведемо, що функція росту спряженості $\gamma_G^c(n)$ не обмежена зверху функцією n^α для деякого $\alpha > 0$. При побудові елементів з різних класів спряженості ми будемо використовувати наступне спостереження. Якщо автоморфізм g стабілізує n-тий рівень дерева і має l нетривіальних вершинних підстановок у вершинах n-го рівня, то і будь-який автоморфізм спряжений з g в усій групі автоморфізмів належить стабілізатору n-го рівня і має l нетривіальних вершинних підстановок у вершинах n-го рівня. Зокрема, автоморфізми зі стабілізатора $\mathrm{St}_G(n)$, які мають різну кількість нетривіальних вершинних підставок у вершинах з X^n, не є спряженими. Більш того, образи таких елементів в факторгрупі $G/\,\mathrm{St}_G(n+1)$ належать різним класам спряженості. Це дає можливість вибрати елементи так, що їх довжина буде обмежена індексом підгрупи $\mathrm{St}_G(n+1)$.

Нехай $C = C(X)$ — константа з нерівності (1). Виберемо $m \in \mathbb{N}$ таке, що $|X|^m > C$. Зауважимо, що оскільки група G діє транзитивно на рівнях дерева X^*, то якщо жорсткий стабілізатор $\mathrm{RiSt}_G(v)$ вершини v діє нетривіально на множині вершин vX, то і для кожної вершини $u \in X^{|v|}$ жорсткий стабілізатор $\mathrm{RiSt}_G(u)$ діє нетривіально на множині вершин uX. Оскільки всі жорсткі стабілізатори нетривіальні, то існує така зростаюча послідовність $\{n_k\}_{k\geq 1}$, що жорсткий стабілізатор кожної вершини $u \in X^{n_k+m}$ діє нетривіально на uX для всіх $k \geq 1$. Зафіксуємо довільну вершину $v \in X^{n_k}$. Тоді для кожного $i = 1, \ldots, |X|^m$ існує елемент $g_i \in \mathrm{RiSt}_G(v)$ такий, що g_i стабілізує всі вершини vX^m і серед вершин vX^m існує точно i вершин, в яких вершинні підстановки елемента g_i є нетривіальними. Тоді елементи g_i належать різним класам спряженості групи G. Більш того, образи g_i в факторгрупі $G/\,\mathrm{St}_G(n_k + m + 1)$ представляють різні класи спряженості. Аналогічно будуємо $|X|^m$ елементів з жорстких стабілізаторів для кожної вершини з X^{n_k}. Утворимо $(|X|^m)^{|X|^{n_k}}$ елементів групи як добутки побудованих елементів, де в кожному добутку береться по одному з $|X|^m$ елементів для всіх вершин з $|X|^{n_k}$. Не всі ці елементи представляють різні класи спряженості групи G. Кожен з побудованих елементів може бути спряжений не більше ніж з $[G : \mathrm{St}_G(n_k)]$ інших елементів. Це випливає з того, що всі побудовані елементи належать стабілізатору n_k-го рівня, а елементи g_i є попарно неспряженими для кожної вершини n_k-го рівня. Враховуючи оцінку (1) ми отримаємо $d^{|X|^{n_k}}$ елементів групи для $d = \frac{|X|^m}{C} > 1$, які не є спряженими в групі. Крім того, їх образи представляють неспряжені елементи в факторгрупі $G/\,\mathrm{St}_G(n_k + m + 1)$. Враховуючи оцінку на індекс підгрупи $\mathrm{St}_G(n_k + m + 1)$, можна вибрати представники цих образів довжини $\leq C^{|X|^{n_k+m+1}}$. Таким чином, ми побудували $d^{|X|^{n_k}}$ попарно неспряжених елементів групи G довжини $\leq C^{|X|^{n_k+m+1}}$, де $n_k \to \infty$. Звідси випливає, що функція росту спряженості групи G не обмежується зверху функцією n^α з параметром $\alpha = \frac{\log d}{|X|^{m+1}\log C} > 0$. Наше твердження доведено.

Зауважимо, що аналогічні міркування працюють для жорсткого стабілізатора $\mathrm{RiSt}_G(v)$ кожної вершини дерева v, причому з тим самим параметром α, оскільки він залежав лише від потужності алфавіту.

Жорсткий стабілізатор k-го рівня $\mathrm{RiSt}_G(k)$ має скінченний індекс в групі. Можна використати лему 1 з [9], яка стверджує, що для скінченно породженої групи G та її підгрупи H скінченного індексу виконується оцінка $\gamma^c_H(n) \preccurlyeq \gamma^c_G(n)$. Отже, справедлива оцінка $\gamma^c_{\mathrm{RiSt}_G(k)}(n) \preccurlyeq \gamma^c_G(n)$. Крім того, $\mathrm{RiSt}_G(k)$ є прямим добутком $|X|^k$ жорстких стабілізаторів вершин k-го рівня. Класи спряженості прямого добутку груп є добутком класів спряженості. Звідси випливає, що функція $\gamma^c_G(n)$ не обмежується зверху функцією $n^{\alpha|X|^k}$. Оскільки k може бути як завгодно великим, то функція росту спряженості групи G не обмежена зверху поліномом. $\square$

Одразу з означення випливає, що функція росту спряженості обмежена зверху функцією росту групи. Оскільки багато відомих груп проміжного росту, такі як група Григорчука, або група ітерованих монодромій многочлена $z^2 + i$, є гіллястими, то з теореми випливає, що всі такі групи мають проміжний ріст спряженості. Для регулярно гіллястих груп можна дати оцінку знизу на функцію росту спряженості (див. [8, теорема 2.2]).

Твердження 2.1. *Нехай G — скінченно породжена регулярно гілляста група. Існує така константа $0 < \alpha < 1$, що $e^{n^\alpha} \preccurlyeq \gamma^c_G(n)$.*

Доведення. Регулярно гілляста група G містить підгрупу H скінченного індексу, яка в свою чергу містить підгрупу скінченно індексу ізоморфну H^m для $m = |X| \geq 2$. Класи спряженості прямого добутку груп є добутком класів спряженості. Звідси маємо

$$(\gamma^c_H(n))^m \preccurlyeq \gamma^c_{H^m}(n) \preccurlyeq \gamma^c_H(n).$$

Крім того, H містить $\psi(\prod_{x\in X} H)$ як підгрупу скінченного індексу. Використовуючи цю властивість, можна показати, як і в доведенні теореми 1, що підгрупа H має нескінченно багато класів спряженості, тобто $\gamma^c_H(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Якщо монотонно зростаюча функція задовольняє умову $\gamma^m \preccurlyeq \gamma$ і $\gamma(n) \to \infty$, то можна застосувати лему 2.1 з [7]: існує така константа $\alpha > 0$, що

$$e^{n^\alpha} \preccurlyeq \gamma^c_H(n) \preccurlyeq \gamma^c_G(n).$$

$\square$

REFERENCES

[1] Bartholdi L., Grigorchuk R.I., Šunić Z. Branch groups. In: Hazewinkel M. (Eds.) Handbook of algebra, Vol. 3. Elsevier, Amsterdam, 2003, 989–1112.

[2] Breuillard E., de Cornulier Y. *On conjugacy growth for solvable groups*. Illinois J. Math. 2010, **54** (1), 389–395.

[3] Breuillard E., de Cornulier Y., Lubotzky A., Meiri C. *On conjugacy growth of linear groups*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 2013, **154** (2), 261–277. doi:10.1017/S030500411200059X

[4] Grigorchuk R.I. *Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1984, **48** (5), 939–985. (in Russian)

[5] Grigorchuk R.I. *Branch groups*. Mat. Zametki 2000, **67** (6), 852–858. doi:10.4213/mzm903 (in Russian)

[6] Grigorchuk R.I. Just infinite branch groups. In: du Sautoy M., Segal D., Shalev A. (Eds.) New horizons in pro-p groups, Prog. Math., 184. Birkhaüser, Boston, 2000, 121–179.

[7] Grigorchuk R.I., Pak I. *Groups of intermediate growth: an introduction*. Enseign. Math. (2), 2008, **54** (3-4), 251–272.

[8] Guba V., Sapir M. *On the conjugacy growth functions of groups*. Illinois J. Math. 2010, **54** (1), 301–313.

[9] Hull M. *Conjugacy growth in polycyclic groups*. Arch. Math. 2011, **96** (2), 131–134. doi:10.1007/s00013-011-0222-9

[10] Hull M., Osin D. *Conjugacy growth of finitely generated groups*. Adv. Math. 2013, **235**, 361–389. doi:10.1016/j.aim.2012.12.007

Надійшло 16.01.2013

Bondarenko I.V. *Conjugacy growth in branch groups*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 14–18.

We prove that branch groups of automorphisms of regular rooted trees can not have polynomial conjugacy growth.

Key words and phrases: branch group, conjugacy class, growth function.

Бондаренко Е.В. *Рост сопряженности в ветвистых группах* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 14–18.

Доказано, что ветвистые группы автоморфизмов регулярных корневых деревьев не могут иметь полиномиальный рост сопряженности.

Ключевые слова и фразы: ветвистая группа, класс сопряженности, функция роста.