ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 79–88 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.79–88
doi:10.15330/cmp.5.1.79-88

Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.

СЛАБКА ВЛАСТИВІСТЬ ДАРБУ І ПЕРЕХІДНІСТЬ ЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРАХ

Показано, що кожне лінійне відображення в топологічних векторних просторах завжди має слабку властивість Дарбу, отже, буде неперервним тоді і лише тоді, коли воно перехідне. Для скінченновимірного відображення f зі значеннями у гаусдорфовому топологічному векторному просторі наступні умови еквівалентні: (i) f неперервне; (ii) графік f замкнений; (iii) ядро f замкнене; (iv) f перехідне.

Ключові слова і фрази: лінійне відображення, властивість Дарбу, перехідне відображення, замкнений графік, замкнене ядро.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine

1 Вступ

Вихідним пунктом досліджень даної праці є класична теорема Банаха про замкнений графік [1, с. 35], яка у спрощеному вигляді формулюється так: для довільних банахових просторів X і Y кожне лінійне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком є неперервним. Пізніше з'явилося багато результатів про неперервність відображень із замкненим графіком, які задовольняють різні додаткові умови. Одним з них є результат з [3], де доведено, що кожна неперервна за Стеллінґом функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. Для цього у згаданій статті введено новий клас функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що дістали назву перехідних, та з'ясовано, що він містить клас функцій із замкненим графіком і що кожна перехідна неперервна за Стеллінґом функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною.

Поняття перехідності було узагальнено в праці [7] на відображення $f : X \to Y$, що діють у довільних топологічних просторах. Там же у вступі було зібрано відомі авторам результати про декомпозицію неперервності, в яких однією з умов виступає замкненість графіка. При цьому виникло природне бажання з'ясувати, в яких із цих результатів замкненість графіка може бути замінена на перехідність, що дає цілу програму для майбутніх досліджень.

Нехай X і Y — топологічні простори. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається перехідним у точці x_0 з X, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y існують окіл U точки x_0 в X і відкритий окіл W точки y_0 в Y такі, що $W \subseteq V$

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 46A30.

і $f(U) \subseteq W \cup (Y \setminus \overline{W})$. Відображення називають перехідним, якщо воно перехідне у кожній точці x з X.

Відомо [7, теор. 6]: *якщо X — топологічний простір, Y — гаусдорфовий локально компактний простір і $f : X \to Y$ — відображення із замкненим графіком, то f — перехідне відображення.* (Теорема A).

Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ має *слабку властивість Дарбу*, якщо образ $f(G)$ кожної області G в X (тобто зв'язної і відкритої в X множини) є зв'язною множиною у просторі Y.

Наступний результат про декомпозицію неперервності ([7, теор. 5 і 16] та [2, с. 518]) був першим кроком у реалізації вказаної вище програми: *якщо X — локально зв'язний простір, Y — топологічний простір, то відображення $f : X \to Y$ є неперервним відображенням тоді і тільки тоді, коли воно перехідне і має слабку властивість Дарбу.* (Теорема B).

Ця теорема покращує як один результат роботи [9], де замість перехідності вимагалося наявність замкненого графіка, а замість слабкої властивості Дарбу — звичайна властивість Дарбу, так і результат праці [8], де замість перехідності розглянуто сильнішу властивість.

У цій роботі ми досліджуємо лінійні відображення $f : X \to Y$, де X і Y — довільні топологічні векторні простори (ТВП). Виявляється, що кожне таке відображення має слабку властивість Дарбу. Тому з теореми про декомпозицію неперервності негайно випливає, що лінійні відображення $f : X \to Y$ будуть перехідними тоді і тільки тоді, коли вони неперервні. Втім, неперервність перехідного лінійного відображення в ТВП легко встановлюється і безпосередньо на основі того, що в довільному ТВП існує база заокруглених околів нуля.

Нескладно перевірити, що для гаусдорфового ТВП Y скінченновимірні лінійні відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком обов'язково перехідні, а значить, неперервні, зокрема, неперервними будуть і лінійні функціонали $f : X \to \mathbb{K}$ із замкненим графіком. Виявляється, що замкненість графіка лінійного функціонала f рівносильна замкненості його ядра $ker f$. Тому отриманий результат еквівалентний відомому критерію неперервності лінійного функціонала в термінах його ядра [4, с. 15]. Ми встановлюємо також, що для скінченновимірних лінійних відображень $f : X \to Y$ наступні умови еквівалентні: (i) f неперервне; (ii) ядро f замкнене; (iii) графік f замкнений.

2 ЛАМАНО ЗВ'ЯЗНІ МНОЖИНИ У ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРАХ

Символом $\mathbb{K}$ позначимо поле $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел чи поле $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел. Нехай X — векторний простір над полем $\mathbb{K}$ і a, b — вектори з X. Відображення $\omega : \mathbb{R} \to X$, яке задається формулою $\omega(t) = ta + b$ ми називатимемо *лінійною функцією*. Для точок x_1 і x_2 з X, невиродженого відрізка $[\alpha, \beta]$ числової прямої і лінійної функції $\omega(t) = ta + b$ звуження $\omega|_{[\alpha,\beta]}$, для якого $\omega(\alpha) = x_1$ і $\omega(\beta) = x_2$, назвемо *прямолінійним шляхом, що з'єднує точки x_1 і x_2*.

Лема 2.1. *Для будь-яких точок x_1 і x_2 з векторного простору X і невиродженого відрізка $[\alpha, \beta]$ існує єдиний прямолінійний шлях $\omega : [\alpha, \beta] \to X$, який з'єднує точки x_1 і x_2.*

Доведення. Розглянемо стандартний прямолінійний шлях $\omega_0(\lambda) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, $0 \le \lambda \le 1$, що з'єднує точки x_1 і x_2, лінійну функцію γ, що переводить відрізок $[\alpha, \beta]$ у відрізок $[0,1]$, яка задається формулою $\gamma(t) = \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$, і їх композицію $\omega = \omega_0 \circ \gamma$. Зрозуміло, що

$$\omega(t) = \omega_0(\gamma(t)) = ta + b,$$

де $a = \frac{x_2-x_1}{\beta-\alpha}$ і $b = \frac{\beta x_1 - \alpha x_2}{\beta-\alpha}$, причому

$$\omega(\alpha) = \omega_0(0) = x_1 \qquad i \qquad \omega(\beta) = \omega_0(1) = x_2.$$

Таким чином, ω — прямолінійний шлях, заданий на відрізку $[\alpha, \beta]$, що з'єднує x_1 і x_2.

Нехай $\omega^*(t) = ta^* + b^*$ — довільний прямолінійний шлях на відрізку $[\alpha, \beta]$, який з'єднує точки x_1 і x_2. Тоді $\omega^*(\alpha) = \alpha a^* + b^* = x_1$ і $\omega^*(\beta) = \beta a^* + b^* = x_2$, звідки отримуємо, що $(\beta-\alpha)a^* = x_2 - x_1$, тобто $a^* = \frac{x_2-x_1}{\beta-\alpha} = a$, і

$$b^* = x_1 - \alpha a^* = x_1 - \alpha\frac{x_2-x_1}{\beta-\alpha} = \frac{\beta x_1 - \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_1}{\beta-\alpha} = \frac{\beta x_1 - \alpha x_2}{\beta-\alpha} = b.$$

Отже, $\omega^* = \omega$. □

Нехай $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — довільні точки векторного простору X і $[\alpha, \beta]$ — невироджений відрізок числової прямої. *Ламана, що породжена точками* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, — це відображення $l : [\alpha, \beta] \to X$, для якого існує таке розбиття $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, що для кожного $k = 1, \ldots, n$ звуження $l|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — це прямолінійний шлях, що з'єднує точки x_{k-1} і x_k.

Лема 2.2. *Нехай X і Y — векторні простори, $f : X \to Y$ — лінійне відображення, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — точки з X, $y_k = f(x_k)$ при $k = 0, \ldots, n$, $l : [\alpha, \beta] \to X$ — ламана у просторі X, що породжена точками $x_0, \ldots, x_n$ з X. Тоді $f \circ l$ — це ламана у просторі Y, що породжена точками $y_0, \ldots, y_n$ з Y.*

Доведення. За умовою існує таке розбиття $\alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$, що звуження $l|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — це прямолінійний шлях, який з'єднує точки x_{k-1} і x_k при $k = 1, \ldots, n$. Тоді для $k = 1, \ldots, n$ існують такі вектори a_k і b_k з X, що $l(t) = ta_k + b_k$ при $t_{k-1} \le t \le t_k$, причому $l(t_{k-1}) = x_{k-1}$ і $l(t_k) = x_k$. З лінійності відображення f випливає, що при $t_{k-1} \le t \le t_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$

$$(f \circ l)(t) = f(l(t)) = f(ta_k + b_k) = tf(a_k) + f(b_k)$$

при цьому $(f \circ l)(t_j) = f(l(t_j)) = f(x_j) = y_j$ для кожного $j = 0, \ldots, n$. Тому $f \circ l|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — це прямолінійний шлях, що з'єднує точки y_{k-1} і y_k в Y, а значить, $f \circ l$ — ламана, що породжена точками $y_0, \ldots, y_n$ в Y. □

Точки x_0 і x з підмножини E векторного простору X називатимемо *ламано зв'язними в E* (і позначатимемо $x_0 \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x$), якщо існує така ламана $l : [\alpha, \beta] \to E$ зі значеннями у множині E, що $l(\alpha) = x_0$ і $l(\beta) = x$. Про таку ламану кажуть, що вона з'єднує точки x_0 і x у множині E. Підмножину E векторного простору X назвемо *ламано зв'язною*, якщо будь-які її дві точки є ламано зв'язними в E.

Лема 2.3. *Для будь-якої підмножини E векторного простору X відношення $\overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}}$ ламаної зв'язності в E — це відношення еквівалентності на множині E.*

Доведення. Перевіримо лише транзитивність відношення $\overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}}$, залишивши перевірку рефлексивності і симетричності цього відношення читачеві.

Нехай $x' \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x''$ і $x'' \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x'''$. Покажемо, що $x' \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x'''$. За умовою існують ламана $l' : [\alpha', \beta'] \to E$, що породжується точками $x'_0, \ldots, x'_{n'}$, де $x'_0 = x'$ і $x'_{n'} = x''$, і ламана $l'' : [\alpha'', \beta''] \to E$, що породжується точками $x''_0, \ldots, x''_{n''}$, де $x''_0 = x''$ і $x''_{n''} = x'''$. Розглянемо довільний невироджений відрізок $[\alpha, \beta]$ і лінійні функції γ' і γ'', що переводять відрізок $I' = [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ у відрізок $[\alpha', \beta']$, а відрізок $I'' = [\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ у відрізок $[\alpha'', \beta'']$. Визначимо функцію $l : [\alpha, \beta] \to E$, покладаючи $l(t) = l'(\gamma'(t))$ при $t \in I'$ і $l(t) = l''(\gamma''(t))$ при $t \in I''$. Нескладно перевірити, що l — це ламана, що породжується точками $x' = x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n'} = x'' = x''_0, x''_1, \ldots, x''_{n''} = x'''$, причому $l([\alpha, \beta]) \subseteq E$. Таким чином, $x' \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x'''$. □

Лема 2.4. *Кожна зрівноважена множина у векторному просторі є ламано зв'язною.*

Доведення. Нагадаємо, що множина E — зрівноважена, якщо для кожної точки $x \in E$ і для довільного скаляра λ такого, що $|\lambda| \leq 1$, обов'язково виконується $\lambda x \in E$. Оскільки порожня множина автоматично ламано зв'язна, то припустимо, що $E \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_0 \in E$, а з нею і $0 = 0 \cdot x_0 \in E$, адже $|0| = 0 \leq 1$.

Розглянемо довільні точки x_1 і x_2 з множини E і функцію

$$l(t) = \begin{cases} (1-2t)x_1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (2t-1)x_2, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Оскільки $0 \leq 1 - 2t \leq 1$ при $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ і $0 \leq 2t - 1 \leq 1$ при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, то $l(t) \in E$ для всіх $0 \leq t \leq 1$ на основі зрівноваженості множини E. Звуження l на відрізки $[0, \frac{1}{2}]$ і $[\frac{1}{2}, 1]$ — це лінійні функції, причому $l(0) = x_1$, $l(\frac{1}{2}) = 0$ і $l(1) = x_2$. Таким чином, $l : [0, 1] \to E$ — це ламана, що породжена точками x_1, 0 і x_2, яка з'єднує точки x_1 і x_2 у множині E, і тому E — ламано зв'язна множина. □

3 ЛАМАНО ЗВ'ЯЗНІ МНОЖИНИ У ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРАХ

Нехай тепер X — це топологічний векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Тоді довільна лінійна функція $\omega : \mathbb{R} \to X$, $\omega(t) = ta + b$, буде неперервною, адже додавання і множення на скаляр у ТВП — це неперервні операції. Тому і довільний прямолінійний шлях $\omega : [\alpha, \beta] \to X$ і кожна ламана $l : [\alpha, \beta] \to X$ — це неперервні функції. Звідси негайно випливає, що кожна ламано зв'язна множина в ТВП є лінійно зв'язною, а значить, і зв'язною.

Лема 3.1. *Довільний ТВП X є локально ламано зв'язним простором, тобто в кожному околі довільної точки з X міститься деякий ламано зв'язний окіл цієї ж точки.*

Доведення. Добре відомо [6, с. 14], що зрівноважені околи нуля утворюють базу околів нуля в довільному ТВП, тому в кожному околі нуля в X міститься деякий зрівноважений, а значить, і ламано зв'язний окіл нуля.

Нехай тепер x — довільна точка з X і U_x — її окіл в X. Тоді існує такий окіл нуля U, що $U_x = x + U$. Нехай V — зрівноважений окіл нуля, який міститься в U. За лемою 2.4 він є ламано зв'язним. Таким же буде і його зсув $V_x = x + V$ на вектор x, бо операція зсуву, очевидно, переводить ламані в ламані, адже для лінійної функції $\omega(t) = ta + b$ і функція $\omega(t) + x = ta + b + x$ буде лінійною. Оскільки V_x — це окіл точки x і $V_x \subseteq U_x$, то все доведено. $\square$

Лема 3.2. *Кожна область у довільному ТВП є ламано зв'язною множиною.*

Доведення. Розглянемо довільні точки x_0 і x області G і доведемо, що $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x$. Для цього розглянемо множину

$$G^* = \{x^* \in G : x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x^*\}.$$

Ця множина непорожня, бо $x_0 \in G^*$. Покажемо, що вона відкрита і замкнена в G.

Нехай $x^* \in G^*$. Тоді $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x^*$ за означенням множини G^*. Оскільки $x^* \in G$ і множина G відкрита, то G — це окіл точки x^* в X. За лемою 3.1 існує такий ламано зв'язний окіл U точки x^* в X, що $U \subseteq G$. Нехай u — довільна точка з U. Оскільки U ламано зв'язний, то $x^* \overset{\Lambda}{\underset{U}{\sim}} u$, а значить, і $x^* \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} u$, адже $U \subseteq G$. За лемою 2.3 звідси отримуємо, що $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} u$, отже, $u \in G^*$. Таким чином, $U \subseteq G^*$, отже, множина G^* відкрита в X і в G.

Нехай $x^* \in G$ і $x^* \in \overline{G^*}$. За лемою 3.1 існує такий ламано зв'язний окіл U точки x^* в X, що $U \subseteq G$. Оскільки x^* — це точка дотику множини G^*, то $U \cap G^* \neq \varnothing$, тому існує точка $u \in U \cap G^*$. З того, що $u \in G^*$ випливає, що $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} u$. Але u і x^* належать до U. З ламаної зв'язності U випливає, що $u \overset{\Lambda}{\underset{U}{\sim}} x^*$, а з включення $U \subseteq G$ і те, що $u \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x^*$. Знову застосувавши лему 2.3, отримаємо, що $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x^*$, отже, $x^* \in G^*$. Це дає нам замкненість множини G^* у множині G.

Таким чином, G^* — це непорожня відкрита і замкнена підмножина у зв'язній множині G, тому $G^* = G$. Звідки $x \in G^*$, а значить $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x$. $\square$

4 Лінійні відображення і слабка властивість Дарбу

З означення лінійного відображення легко вивести наступний результат.

Лема 4.1. *Нехай X і Y — векторні простори над полем $\mathbb{K}$, E — ламано зв'язна множина в X і $f : X \to Y$ — лінійне відображення. Тоді $f(E)$ — ламано зв'язна в Y.*

Доведення. Нехай y_0 і y — довільні точки з $f(E)$. Існують такі точки x_0 і x з E, що $f(x_0) = y_0$ і $f(x) = y$. Оскільки множина E ламано зв'язна, то існує така ламана $l : [\alpha, \beta] \to E$, що $l(\alpha) = x_0$ і $l(\beta) = x$. За лемою 2.2 композиція $f \circ l$ буде ламаною в множині $f(E)$, адже $(f \circ l)([\alpha, \beta]) = f(l([\alpha, \beta])) \subseteq f(E)$, причому $(f \circ l)(\alpha) = f(l(\alpha)) = f(x_0) = y_0$ і $(f \circ l)(\beta) = f(l(\beta)) = f(x) = y$. Це доводить, що $f \circ l$ — це ламана, яка з'єднує точки y_0 і y у множині $f(E)$, отже, множина $f(E)$ ламано зв'язна. $\square$

Теорема 1. *Нехай X і Y — ТВП і $f : X \to Y$ — лінійне відображення. Тоді f має слабку властивість Дарбу.*

Доведення. За лемою 3.2 довільна область G в X буде ламано зв'язною множиною. Тоді за лемою 4.1 і образ $f(G)$ буде ламано зв'язною множиною, а значить, лінійно зв'язною, а тому і зв'язною множиною. Таким чином, лінійне відображення переводить кожну область у зв'язну множину, отже, воно має слабку властивість Дарбу. $\square$

5 Еквівалентність неперервності і перехідності для лінійних відображень

З теореми 1 і згаданої у вступі теореми B про декомпозицію неперервності випливає

Теорема 2. *Лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє в довільних ТВП, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне.*

Доведення. За теоремою 1 відображення f має слабку властивість Дарбу, а тоді з теореми B отримуємо потрібну декомпозицію неперервності. Теорему B можна застосовувати, оскільки за лемою 3.1 кожний ТВП є локально зв'язним. □

Наведемо також і безпосереднє доведення теореми 2 в бік достатності. Нехай f — лінійне перехідне відображення. Доведемо, що f неперервне. Для цього досить встановити, що f неперервне в нулі. Нехай V — довільний окіл нуля в Y. Оскільки f перехідне в точці 0, то існує такий окіл нуля U в X і відкритий окіл нуля V_0 в Y, що $f(U) \subseteq V_0 \sqcup (Y \setminus \overline{V_0})$. Існує такий зрівноважений окіл нуля U_0 в X, що $U_0 \subseteq U$. Покажемо, що $f(U_0) \subseteq V_0$. З леми 2.4 випливає, що U_0 — це ламано зв'язна множина. Тоді образ $f(U_0)$ теж ламано зв'язний за лемою 4.1. Він же, очевидно, буде і зв'язним. Крім того, $f(0) \in f(U_0) \cap V_0 \neq \varnothing$ і $f(U_0) \subseteq f(U) \subseteq V_0 \sqcup (Y \setminus \overline{V_0})$. Оскільки множина $f(U_0)$ зв'язна, то $f(U_0) \subseteq V_0$.

6 Теорема про замкнений графік для скінченновимірних відображень

Нагадаємо, що лінійне відображення $f : X \to Y$ називається *скінченновимірним*, якщо його образ $imf = f(X)$ — це скінченновимірний підпростір простору Y.

Теорема 3. *Нехай X і Y — ТВП, причому простір Y гаусдорфовий, $f : X \to Y$ — лінійне скінченновимірне відображення із замкненим графіком. Тоді f — неперервне відображення.*

Доведення. За умовою образ $Y_0 = f(X)$ — це скінченновимірний лінійний підпростір простору Y, який буде гаусдорфовим, бо таким є простір Y. Нехай $n = dimY_0$ — вимірність простору Y_0. Як відомо [5, с. 18], існує ізоморфізм $\varphi : Y_0 \to \mathbb{K}^n$ простору Y_0 на арифметичний простір $\mathbb{K}^n$ з топологією добутку n екземплярів поля $\mathbb{K}$. Оскільки простір $\mathbb{K}^n$ локально компактний, то таким буде і ізоморфний до нього простір Y_0.

За умовою графік Grf відображення f — це замкнений підпростір добутку $X \times Y$, причому $Grf \subseteq X \times Y_0$. Тоді Grf буде замкненим і в підпросторі $X \times Y_0$ добутку $X \times Y$, отже, f має замкнений графік як відображення з X в Y_0.

За теоремою A відображення f перехідне, а за теоремою 2 воно неперервне, що й треба було довести. □

Теорема 4. *Нехай X — ТВП над полем $\mathbb{K}$ і $f : X \to \mathbb{K}$ — лінійний функціонал із замкненим графіком. Тоді f — неперервний функціонал.*

Доведення. Справді, лінійний функціонал є скінченновимірним лінійним оператором, бо $\dim \mathbb{K} = 1$. Тому це твердження випливає з теореми 3. □

Теорему 4 легко довести і безпосередньо. Справді, якщо Grf замкнений, то буде замкненим і ядро $\ker f$, адже $\ker f = \varphi^{-1}(Grf \cap (X \times \{0\}))$, де $\varphi : X \to X \times \{0\}$, $\varphi(x) = (x, 0)$, — гомеоморфізм простору X на підпростір $X \times \{0\}$ добутку $X \times Y$. Тоді за відомим критерієм неперервності лінійного функціонала [4, с. 15] f буде неперервним.

Цікаво, що наступне твердження можна довести, не використовуючи щойно згаданий критерій.

Теорема 5. *Для лінійного функціонала $f : X \to \mathbb{K}$, заданого на довільному ТВП, наступні умови рівносильні:*

(i) f неперервний;

(ii) графік Grf замкнений в $X \times \mathbb{K}$;

(iii) ядро $\ker f$ замкнене в X.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (iii)$ очевидна, адже $\ker f = f^{-1}(0)$, імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ — це теорема 4. Доведемо, що $(iii) \Rightarrow (ii)$. Нехай ядро $\ker f$ замкнене в X. Доведемо, що і графік Grf теж замкнений в $X \times \mathbb{K}$. Якщо $f = 0$, то це очевидно. Тому вважаємо, що $f \neq 0$. Нехай $(p_j)_{j \in J}$ — це сітка точок $p_j = (x_j, y_j)$ з графіка Grf, яка збігається до деякої точки $p = (x, y) \in X \times \mathbb{K}$. Покажемо, що $p \in Grf$. Ясно, що $x_j \to x$ в X і $y_j \to y$ в $\mathbb{K}$, причому $y_j = f(x_j)$ для кожного j. Оскільки $f \neq 0$, то існує така точка $a \in X$, що $f(a) = 1$. Тоді $f(x_j - y_j a) = f(x_j) - y_j f(a) = f(x_j) - f(x_j) = 0$, отже, $x_j - y_j a \in \ker f$ для кожного j. Але $x_j - y_j a \to x - ya$ в X, тому і $x - ya \in \ker f$, адже ядро $\ker f$ замкнене. Звідси випливає, що $0 = f(x - ya) = f(x) - yf(a) = f(x) - y$, отже, $f(x) = y$, а значить, $p \in Grf$, що і дає нам замкненість графіка Grf в добутку $X \times \mathbb{K}$. □

Таким чином, згаданий критерій неперервності лінійного функціонала є наслідком теореми 4 і сама теорема 4 випливає з нього. Тому цей критерій є теоремою про замкнений графік для лінійного функціонала.

Теорему 5 можна узагальнити на скінченновимірні відображення.

Теорема 6. *Нехай X і Y — ТВП, причому простір Y гаусдорфовий, $f : X \to Y$ — лінійне скінченновимірне відображення. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) f — неперервне відображення;

(ii) графік Grf замкнений в $X \times Y$;

(iii) ядро $\ker f$ замкнене в X.

Доведення. Імплікації $(i) \Rightarrow (ii)$ і $(i) \Rightarrow (iii)$ очевидні.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай Grf — замкнена множина в $X \times Y$. Розглянемо гомеоморфізм $\psi : X \times \{0\} \to X$, де $\psi(x, 0) = x$. Тоді $\psi(Grf \cap (X \times \{0\})) = \ker f$. Множина Grf є замкненою $X \times Y$ за умовою. Оскільки простір Y гаусдорфовий, то одноточкова множина $\{0\}$ буде у ньому замкненою, а тому і множина $X \times \{0\}$ буде замкненою в добутку $X \times Y$. Оскільки при гомеоморфізмі образ замкненої множини є замкненою множиною, то множина $\ker f$ замкнена в X.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай $Y_0 = f(X)$. За умовою Y_0 — скінченновимірний лінійний підпростір простору Y. Припустимо, що $n = \dim Y_0$ і $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — базис підпростору Y_0.

Тоді для довільної точки $y \in Y_0$ існує такий єдиний набір скалярів $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, що $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$. Покладемо $\varphi(y) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Оскільки простір Y, а отже і Y_0, є гаусдорфовим, то відображення $\varphi : Y_0 \to \mathbb{K}^n$ є ізоморфізмом ТВП [5, с.18]. Нехай $\varphi(f(x)) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. Відображення $f_k : X \to \mathbb{K}$ — це лінійні функціонали.

Нехай ядро $\ker f$ замкнене в X. Зрозуміло, що $\ker f = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker f_k$. Покажемо, що ядра $\ker f_k$ замкнені в X для кожного $k = 1, 2, \ldots, n$. Міркування проведемо індукцією відносно n. При $n = 1$ маємо, що $\ker f = \ker f_1$ і тому $\ker f_1$ — замкнена множина.

Нехай $n = 2$. Покладемо $L = \ker f$ і $L_k = \ker f_k$, $k = 1, 2$. У випадку, коли, наприклад, $L_1 \subseteq L_2$, то $L_1 = L$ — замкнена множина. Тому і множина L_2 теж замкнена, адже $L_2 = L_1$ або $L_2 = X$. Так само буде, коли $L_2 \subseteq L_1$. Тому припустимо, що $L_1 \not\subseteq L_2$ і $L_2 \not\subseteq L_1$.

Оскільки $L_1 \not\subseteq L_2$, то існує точка $x_1 \in L_1 \setminus L_2$. Оскільки $x_1 \notin L_2$, то $f_2(x_1) \neq 0$ і ми можемо розглянути точку $a_1 = \frac{x_1}{f_2(x_1)}$, що входить в L_1 і для неї $f_2(a_1) = 1$. Покажемо, що $L_1 = L + \langle a_1 \rangle$. Нехай $x \in L_1$. Тоді $y = x - f_2(x)a_1 \in L_1$. Крім того, $f_2(y) = f_2(x) - f_2(x)f_2(a_1) = f_2(x) - f_2(x) = 0$ і тому $y \in L_2$. Таким чином, $y \in L = L_1 \cap L_2$ і $x = y + f_2(x)a_1 \in L + \langle a_1 \rangle$. Нехай тепер $x \in L + \langle a_1 \rangle$. Тоді $x = y + \lambda a_1$, де $y \in L$ і $\lambda \in \mathbb{K}$. Оскільки $f_1(x) = f_1(y) + \lambda f_1(a_1) = 0$, то $x \in L_1$. Аналогічно встановлюється, що існує така точка $a_2 \in L_2 \setminus L_1$, що $L_2 = L + \langle a_2 \rangle$. Оскільки множина L замкнена, а $\langle a_k \rangle$ — одновимірний підпростір, то множини L_k для $k = 1, 2$ теж будуть замкненими, адже сума замкненого лінійного підпростору і скінченновимірного підпростору у довільному ТВП буде замкненою.

Здійснимо індуктивний крок. Нехай $n > 2$ і $L = \bigcap\limits_{k=1}^{n} L_k$ — замкнена множина. Покажемо, що множини $\ker f_k = L_k$ замкнені для $k = 1, 2, \ldots, n$. Розглянемо звуження $g_k = f_k|_{L_n}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Оскільки $\ker g_k = L_n \cap \ker f_k$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} \ker g_k = L$ — замкнена множина. За індуктивним припущенням множини $\ker g_k$ замкнені для $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Оскільки $\ker f_n \cap \ker f_k = \ker g_k$ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то за доведеним множини $\ker f_n$ і $\ker f_k$ замкнені для $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Таким чином, ми встановили, що ядра $\ker f_k$ замкнені в X для $k = 1, 2, \ldots, n$. Тому функціонали $f_k : X \to \mathbb{K}$ неперервні для $k = 1, 2, \ldots, n$. Отже, і відображення $\varphi \circ f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{K}^n$ неперервне, а значить і $f : X \to Y$ — неперервне, адже φ — ізоморфізм ТВП Y_0 та $\mathbb{K}^n$ і тотожне вкладення $Y_0 \hookrightarrow Y$ неперервне. $\square$

Зауважимо, що можна навести безпосереднє доведення імплікації $(iii) \Rightarrow (ii)$ теореми 6, використавши цю ж імплікацію з теореми 5. Тому теорему 6 можна вивести і з теореми 3.

У доведенні теореми 6 ми використали таке твердження: якщо L — замкнений лінійний підпростір ТВП X і M — скінченновимірний лінійний підпростір X, то їх сума $N = L + M$ буде замкненою в X. Воно доводиться таким чином. Фактор-простір $\hat{X} = X/L$ буде гаусдорфовим [5, с. 22], адже підпростір L замкнений. Образ $\pi(N) = \pi(M) = \hat{M}$ простору N при фактор-відображенні $\pi : X \to \hat{X}$, $\pi(x) = \hat{x} = x + L$, буде скінченновимірним підпростором гаусдорфового ТВП $\hat{X}$, отже, він буде замкненим в $\hat{X}$ [5, с. 20]. Але $N = \pi^{-1}(\hat{M})$, отже, N буде замкненим в X, бо фактор-відображення $\pi : X \to \hat{X}$ неперервне.

7 Приклад неперехідного лінійного вдображення із замкненим графіком

Розгляглянемо банахів простір $C[a,b]$ всіх неперервних функцій $y:[a,b]\to\mathbb{R}$, наділений рівномірною нормою $\|y\| = \max\limits_{a\le t\le b}|y(t)|$.

Теорема 7. *Нехай $X = C^1[a,b]$ — нормований простір всіх неперервно диференційовних функцій $x:[a,b]\to\mathbb{R}$, заданих на невиродженому відрізку $[a,b]$ числової прямої, наділений рівномірною нормою $\|\cdot\|$, $Y = C[a,b]$ — банахів простір всіх неперервних функцій $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ з тією ж рівномірною нормою $\|\cdot\|$ і $D : X\to Y$, $Dx = x'$, — оператор диференціювання. Тоді D — лінійний скрізь розривний оператор із замкненим графіком, який не є перехідним.*

Доведення. Нехай $x_n\to x$ у просторі X і $y_n = Dx_n = x_n'\to y$ у просторі Y. Тоді $x_n(t)\rightrightarrows x(t)$ на $[a,b]$ і $x_n'(t)\rightrightarrows y(t)$ на $[a,b]$. За класичною теоремою аналізу $x'(t) = y(t)$ на $[a,b]$, тобто $Dx = y$. Це дає нам замкненість графіка оператора D.

Лінійність D очевидна. Розривність у нулі оператора D випливає з того, що послідовність неперервно диференційовних функцій $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$ рівномірно прямує до нуля на $[a,b]$, але послідовність їх похідних $x_n'(t) = \cos nt$ навіть поточково на невиродженому відрізку $[a,b]$ до нуля не прямує. Тому оператор D розривний в нулі, а отже, і в кожній точці як лінійний оператор.

Нарешті, D не може бути перехідним згідно з теоремою 2, адже перехідні лінійні оператори завжди неперервні. ☐

Автори висловлюють вдячність Т.Банаху, Р.Коті, О.Маслюченку та В.Михайлюку за участь в обговореннях і корисні поради.

References

[1] Banach S. Course of functional analysis. Rad. Shkola, Kyiv, 1948. (in Ukrainian)

[2] Engelking R. General topology. Mir, Moscow, 1986. (in Russian)

[3] Kretsu V.I., Maslyuchenko V.K. *Stellings continuity, separate continuity and functions with closed graph.* Sci. Bull. Chernivtsi Univ. Mathematics 2007, **349**, 50–54. (in Ukrainian)

[4] Maslyuchenko V.K. Elements of duality theory. Ruta, Chernivtsi, 2005. (in Ukrainian)

[5] Maslyuchenko V.K. Linear continuous operators. Ruta, Chernivtsi, 2002. (in Ukrainian)

[6] Maslyuchenko V.K. Topological vector spaces of first type. Ruta, Chernivtsi, 2002. (in Ukrainian)

[7] Maslyuchenko V.K., Nesterenko V.V. *Decomposition of continuity and transition maps.* Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2011, **8**, 132–150. (in Ukrainian)

[8] Mimna R.A. *A note on separate continuity and connectivity properties*. Math. Bohem. 1997, **122** (1), 57–61.

[9] Wojcik M.R. Closed and connected graphs of functions; examples of connected punctiform spaces. Rozprawa doktorska, Katowice, 2008.

Надійшло 30.11.2012

Maslyuchenko V.K., Nesterenko V.V. *Weak Darboux property and transitivity of linear mappings on topological vector spaces*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 79–88.

It is shown that every linear mapping on topological vector spaces always has weak Darboux property, therefore, it is continuous if and only if it is transitive. For finite-dimensional mapping f with values in Hausdorff topological vector space the following conditions are equivalent: (i) f is continuous; (ii) graph of f is closed; (iii) kernel of f is closed; (iv) f is transition map.

Key words and phrases: linear mapping, Darboux property, transitive mapping, closed graph, closed kernel.

Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. *Слабое свойство Дарбу и переходность линейных отображений в топологических векторных пространствах* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 79–88.

Показано, что каждое линейное отображение в топологических векторных пространствах имеет слабое свойство Дарбу, а значит, будет непрерывным тогда и только тогда, когда оно переходное. Для конечномерного отображения f со значениями в хаусдорфовом топологическом векторном пространстве следующие условия равносильны: (i) f непрерывное; (ii) график f замкнут; (iii) ядро f замкнуто; (iv) f переходное.

Ключевые слова и фразы: линейное отображение, свойство Дарбу, переходное отображение, замкнутый график, замкнутое ядро.