ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 102–109 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.102–109
doi:10.15330/cmp.5.1.102-109

Новіков О.О., Ровенська О.Г.

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ ПРЯМОКУТНИМИ СУМАМИ ФУР'Є

Отримано асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень прямокутних сум Фур'є на класах періодичних функцій двох змінних високої гладкості. Знайдені співвідношення за певних умов надають розв'язок відомої задачі Колмогорова–Нікольського для прямокутних сум Фур'є і вказаних класів функцій.

Ключові слова і фрази: задача Колмогорова-Нікольського, (ψ, β)-похідна, прямокутні суми Фур'є.

Slavyansk State Pedagogical University, 19 Batiuka str., 84116, Slavyansk, Ukraine
E-mail: o.rovenskaya@mail.ru (Ровенська О.Г.)

Вступ

Класи періодичних $\overline{\psi}$-диференційовних функцій запроваджено в роботі [6] у такий спосіб. Нехай

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$ і пара систем чисел $(\psi_1(k), \psi_2(k))$ задовольняє умову $\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots$. Якщо вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)} \stackrel{\sim}{A_k} (f; x) \right),$$

де $\stackrel{\sim}{A_k} (f; x) = a_k(f) \sin kx - b_k(f) \cos kx$, є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то ця функція називається $\overline{\psi}$-похідною функції f і позначається $f^{\overline{\psi}}$. Підмножину неперервних функцій $f \in L$, які мають майже скрізь обмежені $\overline{\psi}$-похідні позначають символом $C_\infty^{\overline{\psi}}$.

Якщо існують послідовність $\psi(k)$ і дійсне число β такі, що $\psi_1(k) = \psi(k) \cos \frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(k) = \psi(k) \sin \frac{\beta\pi}{2}$, то класи $C_\infty^{\overline{\psi}}$ переходять у класи (ψ, β)-диференційовних функцій, що позначаються $C_{\beta,\infty}^{\psi}$. У випадку, коли $\psi(k) = q^k$, $q \in (0; 1)$, $k \in \mathbb{N}$, класи $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ позначаються $C_{\beta,\infty}^{q}$, складаються з 2π-періодичних функцій, які дозволяють продовження до функцій $f(z) = f(x + iy)$, регулярних у смузі $|y| < \ln \frac{1}{q}$ (див., напр., [7, с. 31]), і називаються аналітичними функціями дійсної змінної чи інтегралами Пуассона.

УДК 517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 42A10.

© Новіков О.О., Ровенська О.Г., 2013

Класи (ψ, β)–диференційовних періодичних функцій двох змінних, які дозволяють окремо враховувати властивості звичайних і мішаних частинних похідних, визначимо в такий спосіб (див., напр., [10, 8]). Нехай R^2 — евклідів простір з елементами $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $T^2 = [-\pi; \pi] \times [-\pi; \pi]$ — квадрат зі стороною 2π,

$$N^2 = \{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in \mathbb{N},\ i = 1,2\}, \qquad N_*^2 = \{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in \mathbb{N}_* = \mathbb{N} \cup \{0\},\ i = 1,2\},$$

$$N_i^2 = \{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in \mathbb{N},\ x_j \in \mathbb{N}_*,\ i \neq j\}, \qquad E^2 = \{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in \{0;1\},\ i = 1,2,\}.$$

Через $L(T^2)$ позначимо множину 2π-періодичних за кожною зі змінних та сумовних на квадраті T^2 функцій $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$.

Нехай $f \in L(T^2)$. Кожній парі точок $\vec{s} \in E^2, \vec{k} \in N_*^2$ поставимо у відповідність величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} f(x_1, x_2) \cos\left(k_1 x_1 - \frac{s_1 \pi}{2}\right) \cos\left(k_2 x_2 - \frac{s_2 \pi}{2}\right) dx_1 dx_2.$$

Величини $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s} \in E^2, \vec{k} \in N_*^2$ є коефіцієнтами Фур'є функції $f(\vec{x})$ [8].

Кожному вектору $\vec{k} \in N_*^2$ поставимо у відповідність гармоніку

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \cos\left(k_1 x_1 - \frac{s_1 \pi}{2}\right) \cos\left(k_2 x_2 - \frac{s_2 \pi}{2}\right)$$

а також величини

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_1}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \cos\left(k_1 x_1 - (s_1 + 1)\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(k_2 x_2 - \frac{s_2 \pi}{2}\right),$$

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_2}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \cos\left(k_1 x_1 - \frac{s_1 \pi}{2}\right) \cos\left(k_2 x_2 - (s_2 + 1)\frac{\pi}{2}\right),$$

що є гармоніками, спряженими до $A_{\vec{k}}(f; \vec{x})$ за змінними x_1 і x_2 відповідно.

Наслідуючи [8], ряд Фур'є функції $f(\vec{x})$ визначимо співвідношенням

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^2} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}),$$

де $q(\vec{k})$ — кількість нульових координат вектора $\vec{k}$.

Нехай $f \in L(T^2)$ і $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1,2$, $j = 1,2$ — фіксовані набори систем чисел, $k \in \mathbb{N}_*$. Покладемо

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k)}, \qquad \overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k)}$$

і будемо вважати, що виконано умови: $\overline{\psi}_i(k) \neq 0$, $\overline{\Psi}_i(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_*$, $\psi_{i1}(0) = 1$, $\Psi_{i1}(0) = 1$, $\psi_{i2}(0) = 0$, $\Psi_{i2}(0) = 0$, $i = 1,2$. Відтак припустимо, що вираз

$$\sum_{\vec{k} \in N_i^2} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \overline{\psi}_i^2(k_i)} [\psi_{i1}(k_i) A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) - \psi_{i2}(k_i) A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f; \vec{x})]$$

є рядом Фур'є деякої функції з $L(T^2)$. Позначимо її $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ та назвемо $\overline{\psi}_i$-похідною функції $f(\vec{x})$ за змінною x_i, $i = 1,2$.

Мішаною $\overline{\Psi}$-похідною за змінними x_i, $i = 1,2$, за аналогією до означення звичайної мішаної похідної, будемо називати функцію $f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})$, яка задається співвідношенням

$$f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_2}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^{\overline{\Psi}_1} f(\vec{x})}{\partial x_1}\right).$$

Для заданого набору функцій $\psi_{ij}, \Psi_{ij}, i = 1,2\ j = 1,2$, символом $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ позначимо множину неперервних функцій $f \in L(T^2)$, що мають майже скрізь обмежені в розумінні плоскої міри $\overline{\Psi}$- і $\overline{\psi}_i$-похідні $\operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})| \le 1$, $\operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})| \le 1$, $i = 1,2$, $\vec{x} \in T^2$.

Вивченню апроксимаційних властивостей цих класів присвячено роботи [10, 3, 5, 8].

Якщо для наборів функцій $\psi_{ij}(k)$ і $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1,2$, $j = 1,2$, що визначають класи $C_\infty^{2\overline{\psi}}$, існують функції $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ і числа β_i, $\beta_i^* \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, такі, що

$$\psi_{i1}(k) = \psi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2},\ \ \psi_{i2}(k) = \psi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2},$$

$$\Psi_{i1}(k) = \Psi_i(k)\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2},\ \ \Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k)\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2},$$

то $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ є класами (ψ,β)-диференційовних функцій, які було введено в роботі [10]. Будемо позначати такі класи $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$. Якщо, крім того, для чисел $r > 0$, $s > 0$, $r_1 \ge r$, $s_1 \ge s$ виконано умови $\Psi_1(k) = k^{-r}$, $\Psi_2(k) = k^{-s}$, $\psi_1(k) = k^{-r_1}$, $\psi_2(k) = k^{-s_1}$, $\beta_1 = r$, $\beta_1^* = s$, $\beta_2 = r_1$, $\beta_2^* = s_1$, то класи $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ співпадають з класами $W_{r_1,s_1}^{r,s}$. У роботі [5] вивчено питання наближення класів $W_{r_1,s_1}^{r,s}$ прямокутними сумами Фур'є

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = S_{n_1,n_2}(f;\vec{x}) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$$

та знайдено асимптотичну при $n_i \to \infty$, $i = 1,2$ рівність для точних верхніх меж відхилень прямокутних сум Фур'є $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ узятих по класам $W_{r_1,s_1}^{r,s}$

$$\mathcal{E}(W_{r_1,s_1}^{r,s}; S_{\vec{n}}) = \frac{4\ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4\ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1)\left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}}\right).$$

Нехай послідовності, які визначають клас, задаються співвідношеннями $\psi_i(k) = q_i^k$, $q_i \in (0;1)$, $i = 1,2,\ldots$. Послідовності $\Psi_i(k)$ задаються подібним чином: $\Psi_i(k) = Q_i^k$, $Q_i \in (0;1)$, $i = 1,2,\ldots$. У цьому випадку класи $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ за аналогією до класів функцій однієї змінної позначаються $C_{\beta,\infty}^{2q}$.

Із результатів роботи С.М. Нікольського [1] випливає асимптотична рівність для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах аналітичних функцій однієї змінної $C_{\beta,\infty}^q$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q; S_n) = \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^q} ||f(x) - S_n(f;x)|| = \frac{8q^n}{\pi^2}K(q) + O(1)q^n n^{-1},$$

де

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n. С.Б. Стєчкін [4] цей результат довів іншим методом, який дозволив уточнити залишковий член останньої рівності.

У роботі [3] розглянуто питання наближення класів функцій двох змінних $C^{2q}_{\beta,\infty}$ прямокутними сумами Фур'є $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ і отримано асимптотичну формулу

$$\mathcal{E}(C^{2q}_{\beta,\infty};S_{\vec{n}})=\frac{8q_1^{n_1}}{\pi^2}K(q_1)+\frac{8q_2^{n_2}}{\pi^2}K(q_2)+O(1)\left(\frac{q_1^{n_1}}{n_1}+\frac{q_2^{n_2}}{n_2}+Q_1^{n_1}Q_2^{n_2}\right),\ \ n_i\to\infty,\ \ i=1,2.$$

Позначимо символом D_q множину послідовностей $\psi(k)$, $k\in\mathbb{N}$, для яких має місце співвідношення

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q,\ \ q\in(0;1).$$

Для точних верхніх меж відхилень прямокутних сум Фур'є на класах функцій однієї змінної $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k)\in D_q$ у роботі [9] отримано при $n\to\infty$ асимптотичну формулу

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty};S_n)=\psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})\right),$$

де

$$\varepsilon_n=\sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|.$$

У роботі отримано асимптотичну при $n_i\to\infty$, $i=1,2$ формулу, що є двовимірним аналогом останньої рівності для класів функцій $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi_i(k)\in D_{q_i}$, $q_i\in(0;1)$, $\Psi_i(k)\in D_{Q_i}$, $Q_i\in(0;1)$, $i=1,2$. Аналогічний результат для відхилень прямокутних сумм Валле Пуссена було отримано в роботі [2].

1 Основні результати

Теорема 1. *Нехай $\psi_i(k)\in D_{q_i}$, $q_i\in(0;1)$, $\Psi_i(k)\in D_{Q_i}$, $Q_i\in(0;1)$, β_i, $\beta_i^*\in\mathbb{R}$, $i=1,2$. Тоді при $n_i\to\infty$, $i=1,2$ має місце асимптотична формула*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(C^{2\psi}_{\beta,\infty};S_{\vec{n}})=\sup_{f\in C^{2\psi}_{\beta,\infty}}||f(\vec{x})-S_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C=\frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1,2}\psi_i(n_i)K(q_i)\\ +O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i}+\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi^{Q_1,Q_2}_{n_1,n_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right],\end{aligned} \tag{1}$$

де

$$K(q)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}},$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду,

$$\varepsilon_m(\psi)=\sup_{k\geq m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|,\ \ q=\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}, \tag{2}$$

$$\Pi^{Q_1,Q_2}_{n_1,n_2}(\Psi_1,\Psi_2)=\prod_{i=1,2}\frac{\Psi_i(n_i)}{1-Q_i}\left(1+\frac{\varepsilon_{n_1}(\Psi_1)}{1-Q_1}+\frac{\varepsilon_{n_2}(\Psi_2)}{1-Q_2}+\frac{\varepsilon_{n_1}(\Psi_1)\varepsilon_{n_2}(\Psi_2)}{(1-Q_1)(1-Q_2)}\right), \tag{3}$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n_i, q_i, Q_i, β_i, β_i^*, $i=1,2$.

Доведення. Використовуючи міркування роботи [3], можна показати, що

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{i=1,2} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i) \sum_{k=n_i}^{\infty} \psi_i(k_i)\cos(k_i t_i + \frac{\beta_i\pi}{2})dt_i$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}+\sum_{j=1,2} t_j\vec{e}_j) \prod_{j=1,2} \sum_{\nu_j=n_j}^{\infty} \Psi_{\nu_j}(\nu_j)\cos(\nu_j t_j + \frac{\beta_j^*\pi}{2})dt_j.$$

Надалі знадобиться допоміжне твердження (див., напр., [9]).

Лема 1.1. *Нехай $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$. Тоді для довільної послідовності чисел γ_k, $k = 1,2,\ldots$, має місце рівність*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt-\gamma_k) = \psi(n)\left[q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos(kt-\gamma_k) + r_n(t;\psi)\right],$$

у якій

$$r_n(t,\psi) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{l=0}^{i-1}\frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)} - q^i\right)\cos((n+i)t-\gamma_{n+i}),$$

крім того, починаючи з деякого n_0,

$$|r_n(t;\psi)| \le \frac{\varepsilon_n(\psi)}{(1-q-\varepsilon_n(\psi))(1-q)}, \tag{4}$$

де $\varepsilon_n(\psi)$ визначено (2).

Використовуючи твердження леми, маємо

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{i=1,2}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)\left[\psi_i(n_i)q_i^{-n_i}\sum_{k=n_i}^{\infty} q_i^{k_i}\cos(k_i t_i+\frac{\beta_i\pi}{2}) + \psi_i(n_i)r_{n_i}(t_i;\psi_i)\right]dt_i$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}+\sum_{j=1,2}t_j\vec{e}_j)\prod_{j=1,2}\left[\Psi_j(n_j)Q_j^{-n_j}\sum_{\nu_j=n_j}^{\infty} Q_j^{\nu_j}\cos(\nu_j t_j+\frac{\beta_j^*\pi}{2}) + \Psi_j(n_j)r_{n_j}(t_j;\Psi_j)\right]dt_j$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1,2}\psi_i(n_i)q_i^{-n_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)\sum_{k=n_i}^{\infty} q_i^{k_i}\cos(k_i t_i+\frac{\beta_i\pi}{2})dt_i$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1,2}\psi_i(n_i)\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)r_{n_i}(t_i;\psi_i)dt_i - \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}+\sum_{j=1,2}t_j\vec{e}_j)\sum_{\xi\subset\{1,2\}}\prod_{s\in\{1,2\}\setminus\xi}\Psi_s(n_s)Q_s^{-n_s}$$

$$\times\sum_{\nu_s=n_s}^{\infty} Q_s^{\nu_s}\cos(\nu_s t_s+\frac{\beta_s^*\pi}{2})dt_s\prod_{j\in\xi}\Psi_j(n_j)r_{n_j}(t_j;\Psi_j)dt_j.$$

Виконуючи елементарні перетворення, можна показати, що

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right) = q^n\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\cos kt\cos(nt+\frac{\beta\pi}{2}) - \sum_{k=0}^{\infty} q^k\sin kt\sin(nt+\frac{\beta\pi}{2})\right)$$

$$= \frac{q^n}{1-2q\cos t+q^2}\left((1-q\cos t)\cos(nt+\frac{\beta\pi}{2}) - q\sin t\sin(nt+\frac{\beta\pi}{2})\right)$$

$$= \frac{q^n}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}\right).$$

На підставі останньої рівності та оцінки (4), маємо

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i + O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right], \tag{5}$$

де

$$b_{n_i}^{\beta_i}(t_i) = \frac{q_i^{n_i}}{(1-2q_i\cos t_i+q_i^2)^{1/2}}\cos\left(n_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{q_i\sin t_i}{1-q_i\cos t_i}\right),$$

а величину $\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)$ визначено співвідношенням (3).

Оскільки $f(\vec{x}) \in C_{\beta,\infty}^{2\psi}$, то

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{2\psi};S_{\vec{n}}) \le \frac{1}{\pi}\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i + O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right]. \tag{6}$$

Знайдемо функцію $f_0(\vec{x}) \in C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ для якої має місце співвідношення

$$\begin{aligned}\rho_{\vec{n}}(f_0;\vec{0}) =& \frac{1}{\pi}\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i \\ &+O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i}+\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right].\end{aligned} \tag{7}$$

На підставі співвідношення (5), для довільної $f \in C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ можна записати

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{0}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{0}+t_i\vec{e}_i)b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i + O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right]. \tag{8}$$

Покажемо, що кожну функцію $\operatorname{sign} b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$, $i=1,2$, можна змінити на множині точок, міра якої не перевищує $Kq_in_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$ так, щоб для отриманих функцій $y_i(t_i)$ виконувалась умова $\int\limits_{-\pi}^{\pi} y_i(t_i)dt_i = 0$. Вивчимо функцію $b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$. Позначимо

$$\Phi(t_i) = \operatorname{arctg}\frac{q_i\sin t_i}{1-q_i\cos t_i}.$$

Розглянемо інтервал $(0;\pi)$ на якому функція $\Phi(t_i)$ неперервна й виконується умова

$$0 \le \Phi(t_i) \le \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Крім того, для $\forall t_i \in (0;\pi)$

$$|\Phi'(t_i)| = \left|\frac{q_i\cos t_i-q_i^2}{1-2q_i\cos t_i+q_i^2}\right| \le \frac{q_i}{1-q_i}. \tag{10}$$

Функція $b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на проміжку $(0;\pi)$ дорівнює нулю й змінює знак тільки в точках вигляду $t_{ik} = \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi-\frac{\beta_i\pi}{2}-\Phi(t_{ik})}{n_i}$, $k=3,4,\ldots,n_i-1$. Знайдемо довжини проміжків $[t_{ik};t_{i(k+1)}]$ і

$[t_{i(k+1)}; t_{i(k+2)}]$

$$t_{i(k+1)} - t_{ik} = \frac{\pi}{n_i} - \frac{\Phi(t_{ik+1}) - \Phi(t_{ik})}{n_i}, \qquad t_{i(k+2)} - t_{i(k+1)} = \frac{\pi}{n_i} - \frac{\Phi(t_{i(k+2)}) - \Phi(t_{i(k+1)})}{n_i}.$$

Ураховуючи (10), бачимо, що різниця довжин цих проміжків $|(t_{i(k+2)} - t_{i(k+1)}) - (t_{i(k+1)} - t_{ik})|$ не перевищує

$$\frac{|\Phi(t_{i(k+2)}) - \Phi(t_{i(k+1)})| + |\Phi(t_{i(k+1)}) - \Phi(t_{ik})|}{n_i} \leq \frac{2q_i(t_{i(k+1)} - t_{ik})}{n_i(1-q_i)}.$$

Унаслідок (9), маємо

$$\frac{2k\pi - \beta_i\pi}{2n_i} \leq t_{ik} \leq \frac{\pi + 2k\pi - \beta_i\pi}{2n_i}, \qquad \frac{2k\pi + 2\pi - \beta_i\pi}{2n_i} \leq t_{i(k+1)} \leq \frac{3\pi + 2k\pi - \beta_i\pi}{2n_i},$$

$$\frac{\pi}{2n_i} \leq t_{i(k+1)} - t_{ik} \leq \frac{3\pi}{2n_i}. \tag{11}$$

Отже, різниця довжин проміжків $[t_{ik}; t_{i(k+1)}]$ і $[t_{i(k+1)}; t_{i(k+2)}]$ не більша ніж $\frac{3q_i\pi}{2n_i^2(1-q_i)}$. Функція $b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ зберігає знак на цих проміжках, причому праворуч і ліворуч від $t_{i(k+1)}$ знаки різні. Таким чином, функцію $\operatorname{sign} b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на проміжку $[t_{ik}; t_{i(k+2)}]$ можна змінити на множині, міра якої $\leq \frac{3q_i\pi}{2n_i^2(1-q_i)}$ так, щоб для отриманої функції $y_i(t_i)$ середнє значення на цьому відрізку дорівнювало нулю. Завдяки (11) кількість проміжків, на яких функція $b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ змінює знак, не перевищує $4n_i$. Аналогічні міркування можна провести для проміжку $(-\pi; 0)$. Отже, функції, побудовані на $(-\pi; \pi)$, мають властивості $\int\limits_{-\pi}^{\pi} y_i(t_i)dt_i = 0$ і відрізняються від $\operatorname{sign} b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на множинах, міри яких не перевищують $Kq_in_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$, $i = 1, 2$.

Відтак побудуємо функції $\varphi_i(t_1; t_2) = y_i(t_i)$, $\vec{t} \in T^2$, і функції $f_i(\vec{x})$ такі, що $(f_i)^{\overline{\psi}_i} = \varphi_i(\vec{x})$. Можна показати (див., напр., [3]), що функція $f_0(\vec{x}) = f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x})$ задовольняє умову $(f_0)^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$, $i = 1, 2$. Через це $f_0(\vec{x}) \in C^{2\psi}_{\beta,\infty}$ і справедливим є таке співвідношення

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_0(\vec{0} + t_i\vec{e}_i))^{\overline{\psi}_i} b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i + O(1)\frac{q_i^{n_i+1}}{n_i(1-q_i)}.$$

На підставі (8) можна зробити висновок, що для знайденої функції $f_0(\vec{x})$ має місце співвідношення (7). Поєднуючи (6) і (7), отримаємо

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(C^{2\psi}_{\beta,\infty}; S_{\vec{n}}) =& \frac{1}{\pi}\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i \\ &+ O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i} + \sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \Pi^{Q_1,Q_2}_{n_1,n_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right].\end{aligned}$$

Із результатів роботи [1] випливає рівність

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |b_n^{\beta}(t)|dt = \frac{8q^n}{\pi}K(q) + O(1)\frac{q^n}{n}.$$

Поєднуючи дві останні рівності, отримаємо асимптотичну формулу (1). □

Зазначимо, що рівності $q_i = Q_i$, $i = 1, 2$, є одними з умов, за яких співвідношення (1) забезпечує розв'язок відповідної задачі Колмогорова–Нікольського (див., напр., [7, с. 57]).

References

[1] Nikol'skii S.M. *Approximation of the functions by trigonometric polynomials in the mean*. News of Acad. of Sc. USSR 1946, **10** (3), 207–256. (in Russian)

[2] Novikov O.A., Rovenska O.G. *Approximation of the periodical functions of high smoothness by the right-angled linear methods*. Computer Research and Modeling 2011, **3** (3), 255–264. (in Russian)

[3] Rukasov V.I., Novikov O.A., Bodraya V.I. *Approximation of the classes of functions of two variables with a high smoothness by the right-angled linear means of Fourier series*. Problems of Aproximation of Functions. Theory and Closely Related Concepts. Works of the Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences 2007, **4** (1), 270–283 (in Russian).

[4] Stechkin S.B. *Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions*. Works of Math. Inst. Acad. of Sc. USSR 1980, **45**, 126–151 (in Russian).

[5] Stepanec A.I. *Approximation of some classes of periodic functions two variables by Fourier sums*. Ukrainian Math. J. 1973, **25** (5), 599–609. (in Russian)

[6] Stepanec A. I. Approximation of $\overline{\psi}$-integrals of periodic functions by Fourier sums. Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, 1996. (in Russian)

[7] Stepanec A.I. Classifcation and approximation of periodic functions. Nauk. Dumka, Kyiv, 1987. (in Russian)

[8] Stepanec A.I., Pachulia N.L. *Multiple Fourier sums on the sets of (ψ, β)-differentiable functions*. Ukrainian Math. J. 1991, **43** (4), 545–555. (in Russian)

[9] Stepanets A.I., Serdyuk A.S. *Approximations by Fourier sums and best approximations on classes of analytic functions*. Ukrainian Math. J. 2000, **52** (3), 375–395. (in Russian) doi: 10.1007/BF02513138

[10] Zaderey P.V. *Integral presentations of deviations of linear means of Fourier series on the classes of differentiable periodic functions of two variables*. Some problems of the theory of functions. Coll. of Sci. works. Institute of Mathematics, Kyiv, 1985, 16–28. (in Russian)

Надійшло 16.06.2012

Novikov O.O., Rovenska O.G. *Approximation of the periodical functions of high smoothness by the right-angled Fourier sums*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 102–109.

We obtain asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the right-angled Fourier sums taken over classes of periodical functions of two variables of high smoothness. These equalities in corresponding cases guarantee the solvability of the Kolmogorov–Hikol'skii problem for the right-angled Fourier sums on the specified classes of functions.

Key words and phrases: Kolmogorov–Hikol'skii problem, (ψ, β)-derivative, right-angled Fourier sums.

Новиков О.А., Ровенская О.Г. *Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными суммами Фурье* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 102–109.

Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье на классах периодических функций двух переменных высокой гладкости. Эти соотношения в некоторых важных случаях обеспечивают решение известной задачи Колмогорова–Никольского для прямоугольных сумм Фурье и указанных классов функций.

Ключевые слова и фразы: задача Колмогорова–Никольского, (ψ, β)-производная, прямоугольные суммы Фурье.