ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 156–163 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.156–163
doi:10.15330/cmp.5.1.156-163

Шувар Б.А.[1], Обшта А.Ф.[1], Копач М.І.[2]

АГРЕГАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНІ АНАЛОГИ І УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИХ МЕТОДІВ

Для лінійних операторних рівнянь побудовані і досліджені агрегаційно-ітеративні алгоритми, які охоплюють способи ітеративного агрегування та проекційно-ітеративні методи. Умови збіжності не передбачають знакосталості відповідного оператора та не мають обмеження, щоб його спектральний радіус був меншим за одиницю.

Ключові слова і фрази: проекційно-ітеративні методи, декомпозиція, агрегаційно-ітеративні методи.

[1] Lviv Polytechnic National University, 12 Bandera str., 79013, Lviv, Ukraine
[2] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: obshta2002@gmail.com (Обшта А.Ф.), kopachm2009@gmail.com (Копач М.І.)

1 Вступ

Проекційно-ітеративні методи виникли під впливом дослідження методу усереднення функціональних поправок Ю.Д. Соколова [13]. Ці методи, теорія яких створена в [6], [5], поєднують ідеї проекційних і ітеративних методів, що дозволяє використовувати переваги кожного з них для розширення класів задач, до яких можна застосувати отримані синтетичні методи. Для рівняння вигляду

$$x = Ax + b \qquad (b \in E) \tag{1}$$

проекційно-ітеративні методи можна описати формулою

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n+1)} + A_2 x^{(n)} + b. \tag{2}$$

Тут $A_1 + A_2 = A, A_1, A_2, A$ є лінійними неперервними операторами, які діють в банаховому просторі E і $b \in E$. Оператор A_1 означається за однією з формул $A_1 = AP, A_1 = PA, A_1 = PAP$, де P — оператор проектування простору E в його підпростір E_P. Позначимо через I тотожний оператор в E, $Q = I - P$. Очевидно, що $P^2 = P$. Відповідний проекційний метод

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n+1)} + b \tag{3}$$

не використовує наближення $x^{(n)}$ при знаходженні $x^{(n+1)}$. При реалізації алгоритму (2) можна скористатися з банахового принципу стиску як засобу дослідження ітерацій та

УДК 517.988.8
2010 *Mathematics Subject Classification:* 47j25.

оцінки якості отриманих наближень. Такої переваги позбавлений алгоритм (3). В цій замітці пропонуємо спосіб побудови агрегаційно-ітеративних алгоритмів, які поєднують ідею алгоритму (2) з ідеєю ітеративного агрегування як засобу декомпозиції алгоритму (2) з використанням розпаралелення обчислювальних схем. Частковий алгоритм методу ітеративного агрегування досліджений в [3] за вельми жорстких обмежень щодо A та b і щодо параметрів, які фігурують в структурі алгоритму. Цей частковий випадок, відомий як однопараметричний метод ітеративного агрегування для рівняння (1), можна отримати як алгоритм вигляду

$$x^{(n+1)} = \frac{(\varphi, b)}{(\varphi, x^{(n)} - Ax^{(n)})} Ax^{(n)} + b, \tag{4}$$

де (φ, x) — значення лінійного функціоналу $\varphi \in E^*$ на елементах $x \in E$. Встановлені в [3] умови збіжності цього методу передбачають, що банахів простір E напівупорядкований за допомогою конуса K додатніх елементів і ця напівупорядкованість узгоджена з нормою в E (див., наприклад, [3, 4]). З-поміж основних припущень, які фігурують в [3], виокремимо вимоги про додатність A та b і функціоналу φ, а також умову, що спектральний радіус $\rho(A)$ оператора A менший від одиниці. Побудові синтезованих алгоритмів на основі методів ітеративного агрегування присвячені дослідження [11, 12, 2]. Будемо використовувати запропоновану в [8, 9, 10] методику побудови і дослідження агрегаційно-ітеративних методів, які охоплюють однопараметричні і багатопараметричні методи ітеративного агрегування. При цьому в отриманих умовах збіжності не фігурують вимоги про знакосталість A, b, φ та про нерівність $\rho(A) < 1$. Зазначимо, що вимоги про знакосталість A, b, φ фігурують у всіх відомих нам дослідженнях інших авторів щодо теорії і застосування методів ітеративного агрегування (див. наприклад, [1, 7, 14]).

2 Побудова агрегаційно-ітеративних алгоритмів

Задамо лінійні неперервні оператори $S : E \to E'$, $\Lambda : E' \to E'$, $\widetilde{A} : E \to E$ де E' — банахів простір, який, взагалі кажучи, не тотожний з E та E_P. Вимагатимемо, щоб справджувалася рівність

$$SAP = \Lambda S, \tag{5}$$

яку можна розглядати як частковий випадок загальнішого співвідношення

$$S(AP + \widetilde{A}) = \Lambda S. \tag{6}$$

Постулюємо існування оберненого оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$, де I' — одиничний оператор в E'. Рівняння (1) запишемо у вигляді

$$x = APx + AQx + b \tag{7}$$

і розглядатимемо разом з ним додаткове рівняння

$$y = \Lambda y - SAQx - Sb. \tag{8}$$

Лема 2.1. *Якщо пара x^*, y^* є розв'язком системи рівнянь (7), (8), то при $x = x^*$, $y = y^*$ справджується рівність $Sx^* + y^* = \theta'$, де θ' — нульовий елемент в E'.*

Доведення. Рівності (7), (8) дають підставу для співвідношень

$$Sx^* + y^* = SAPx^* + SAQx^* + Sb + \Lambda y^* - SAQx^* - Sb.$$

Звідси, враховуючи умову (5), отримуємо рівність $Sx^* + y^* = \Lambda(Sx^* + y^*)$. Існування оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$ дозволяє вважати лему доведеною. □

Означимо підпростір ε_0 простору $E \times E'$ як множину пар $\{x, y\}$ елементів $x \in E, y \in E'$, для яких маємо

$$\varepsilon_0 = \big\{\{x, y\} : Sx + y = \theta', x \in E, y \in E'\big\}. \tag{9}$$

Будемо розглядати алгоритм, побудований за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = APx + AQx^{(n)} + a^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \tag{10}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n)} - SAQx^{(n)} + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) - Sb. \tag{11}$$

Тут $a^{(n)} : E' \to E$, $\alpha^{(n)} : E' \to E'$ задані лінійні неперервні оператори, для яких при кожному $n = 0, 1, \ldots$ справджується рівність

$$Sa^{(n)} + \alpha_0^{(n)} = \Lambda, \tag{12}$$

де $a^{(n)} = a(x^{(n)})$, $\alpha_0^{(n)} = \alpha_0(x^{(n)})$.

Лема 2.2. *Нехай справджуються рівності (12) і початкове наближення $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$ задовольняє співвідношення $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \varepsilon_0$. Тоді для $n = 0, 1, \ldots$ справджуються співвідношення $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \varepsilon_0$.*

Доведення. Використовуючи співвідношення (10), (11) та (5), знаходимо

$$Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = SAPx^{(n)} + SAQx^{(n)} + Sa^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + Sb + \Lambda y^{(n)}$$

$$-SAQx^{(n)} + (Sa^{(n)} + \alpha_0^{(n)})y^{(n)} + (\Lambda - Sa^{(n)} - \alpha_0^{(n)})y^{(n+1)} - Sb = \Lambda(Sx^{(n)} + y^{(n)}).$$

Тому можна застосувати принцип індукції і на цій підставі вважати лему доведеною. □

Очевидним наслідком лем 2.1 та 2.2 є важливе для подальшого таке твердження.

Лема 2.3. *Нехай справджуються умови леми 2.2. Тоді для всіх $n = 0, 1, \ldots$ матимемо рівності*

$$S(x^{(n)} - x^*) + (y^{(n)} - y^*) = \theta'. \tag{13}$$

Доведення. Рівності (13) очевидним чином випливають з лем 2.1 та 2.2. □

В тому (взагалі кажучи, формально загальнішому) випадку, коли замість рівності (5) маємо рівність (6), допоміжне рівняння (8) замінимо рівнянням

$$y = \Lambda y - SAQx + S\widetilde{A}x - Sb. \tag{14}$$

Для системи (7), (14) зберігається твердження леми 2.1, а також зберігається означення підпростору ε_0 за допомогою співвідношення (9). В парі ітераційних формул (10), (11) формулу (11) замінимо формулою

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SAQx^{(n)} + S\widetilde{A}x^{(n)} + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) - Sb. \tag{15}$$

Для алгоритму (10), (15) зберігається твердження леми 2.2. Тому для цього випадку матимемо рівність (13), тобто справедливість твердження леми 2.3. Зазначимо при цьому, що в умовах лем 2.2 і 2.3 умову (12) постулюємо і для алгоритму (10), (15).

3 Збіжність ітерацій

За припущення, що при $n = 0, 1, \ldots$ існують оператори $(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}$, з рівностей (7), (8) та (10), (11) знаходимо

$$y^{(n+1)} - y^* = -(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} SAQ(x^{(n)} - x^*) + (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} \alpha_0^{(n)} (y^{(n)} - y^*),$$

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* =& (A + a^{(n)} (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} SAQ(x^{(n)} - x^*)) \\ &+ a^{(n)} (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} (I' - \Lambda)(y^{(n)} - y^*). \end{aligned} \tag{16}$$

Задамо, взагалі кажучи, довільним способом лінійні неперервні оператори $\psi^{(n)} : E \to E'$, $\psi_0^{(n)} : E' \to E'$ $(n = 0, 1, \ldots)$ і використаємо рівності (13), (14), (15). Отримаємо

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* =& -(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} (SAQ + \psi_0^{(n)} S)(x^{(n)} - x^*) \\ &+ (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} (\alpha_0^{(n)} - \psi_0^{(n)})(y^{(n)} - y^*), \\ x^{(n+1)} - x^* =& (A + a^{(n)} (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} (SAQ - \psi^{(n)} S)(x^{(n)} - x^*)) \\ &+ a^{(n)} (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} (I' - \Lambda - \psi^{(n)})(y^{(n)} - y^*). \end{aligned}$$

Позначимо

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(n)} & h_{11}^{(n)} \\ h_{21}^{(n)} & h_{22}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} h_{11}^{(n)} =& A + a^{(n)} (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} (SAQ - \psi^{(n)} S), \\ h_{12}^{(n)} =& a^{(n)} (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} (I' - \Lambda - \psi^{(n)}), \\ h_{21}^{(n)} =& -(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} (SAQ + \psi_0^{(n)} S), \\ h_{22}^{(n)} =& -(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} (\alpha_0^{(n)} - \psi_0^{(n)}). \end{aligned}$$

Приймемо для якої-небудь норми оператора $H^{(n)} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(n)} & h_{11}^{(n)} \\ h_{21}^{(n)} & h_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$ в просторі $\widetilde{E} = E \times E'$ позначення $\|H^{(n)}\|_0$. Підсумовуючи наведені міркування, матимемо такий результат.

Теорема 1. *Якщо справджуються умови леми 2.3 і виконуються нерівності*

$$\|H^{(n)}\|_0 \le q < 1,$$

тоді послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ збігається до розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи (7), (8) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q. При цьому $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \varepsilon_0$ і $\{x^*, y^*\} \in \varepsilon_0$.

Нехай, зокрема,

$$\psi^{(n)} = I' - \Lambda. \tag{17}$$

У цьому випадку з теореми 1 випливає такий факт.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови леми 2.3 і оператори $\psi^{(n)}$ вибрані згідно з рівностями (17). Тоді для збіжності послідовності пар $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ до розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи (7), (8) достатньо, щоб виконувалось співвідношення*

$$\|A - a^{(n)} (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} S(I - A)\| \le q < 1, \tag{18}$$

де $\|\cdot\|$ — норма в E.

Доведення. Умова (5) і припущення (17) дають підставу записати

$$\begin{aligned} SAQ-(I'-\Lambda)S =& SAQ-S+\Lambda S = SA(I-P)-S+\Lambda S \\ =& SA-SAP-S+\Lambda S = SA-\Lambda S-S+\Lambda S=-S(I-A). \end{aligned}$$

Тому замість рівності (16) матимемо

$$x^{(n+1)}-x^* = A-a^{(n)}(I'-\Lambda+\alpha_0^{(n)})^{-1}S(I-A)(x^{(n)}-x^*).$$

Звідси випливає, що збіжність за нормою до розв'язку рівняння (7) забезпечує умова (18). При цьому послідовності $x^{(n)}$ та $y^{(n)}$ збігаються до x^* та до y^* відповідно не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q. При всіх $n=0,1,\ldots$ матимемо, що для пари $\{x^{(n)},y^{(n)}\}$ справджуються співвідношення $\{x^{(n)},y^{(n)}\}\in\varepsilon_0$. □

Дослідження збіжності алгоритму (10), (15) можна звести до дослідження збіжності алгоритму (10), (11), маючи на увазі, що в (14) вираз $SAQx-A\widetilde{A}x$ можна формально замінити виразом $SAQx$. Це можна потрактувати як заміну оператора P іншим оператором проектування таким способом, що рівність (14) матиме вигляд (8), оправдуючи в такий спосіб заміну формули (15) формулою (11).

4 Приклад

Якщо E' є евклідовим простором E^N розмірності N, то алгоритми (10), (11) та (10), (15) є багатопараметричними агрегаційно-ітеративними методами. Зокрема, для алгоритму (10), (11) при $N=1$ матимемо його однопараметричний варіант. Нехай $\lambda\neq 1$ є дійсним числом, φ є лінійним функціоналом у спряженому з E банаховому просторі E^*, (φ,x) є значеннями функціоналу φ на елементах $x\in E$. Будемо вважати, що оператори S та Λ означені за допомогою формул

$$Sx=(\varphi,x),\Lambda=\lambda.$$

Нехай $(AP)^*\varphi=\lambda I\varphi$ і, отже, $((AP)^*\varphi,x)=\lambda(\varphi,x)$, де $(AP)^*$ — спряжений оператор до AP. Алгоритм (10), (11) опишеться за допомогою формул

$$x^{(n+1)}=APx^{(n)}+AQx^{(n)}+a^{(n)}(y^{(n)}-y^{(n+1)})+b, \tag{19}$$

$$y^{(n+1)}=\lambda y^{(n+1)}-(\varphi,AQx^{(n)})+\alpha_0^{(n)}(y^{(n)}-y^{(n+1)})+(\varphi,b). \tag{20}$$

Припускаємо, що $a^{(n)},\alpha_0^{(n)}$, задовольняють рівність (12), яка в цьому випадку має вигляд

$$(\varphi,a^{(n)})+\alpha_0^{(n)}=\lambda,\qquad n=0,1,\ldots. \tag{21}$$

Означення множини ε_0 за формулою (9) можна записати у вигляді

$$\varepsilon_0=\ \big\{\{x,y\}:(\varphi,x)+y=0,x\in E,y\in E'\big\}.$$

Для алгоритму (19), (20) можна отримати

$$y^{(n+1)}-y^*=-\frac{(\varphi,AQ(x^{(n)}-x^*))}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}+\frac{\alpha_0^{(n)}}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}(y^{(n)}-y^*),$$

$$
\begin{aligned}
x^{(n+1)} - x^* =& AP(x^{(n)} - x^*) + AQ(x^{(n)} - x^*) \\
&+ a^{(n)} \frac{(\varphi, AQ(x^{(n)} - x^*))}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} + \frac{(1-\lambda) a^{(n)}}{1 + \lambda + \alpha_0^{(n)}} (y^{(n)} - y^*).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Оскільки рівність (13) у цьому випадку має вигляд

$$
\varphi(x^{(n)} - x^*) + (y^{(n)} - y^*) = 0,
$$

то за довільного вибору $\psi^{(n)} \in E'$ цю рівність використаємо для того, щоб замість (22) отримати рівність

$$
\begin{aligned}
x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) &+ \frac{a^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} \big(\varphi, AQ(x^{(n)} - x^*)\big) - \psi^{(n)} (\varphi, x^{(n)} - x^*) \\
&+ \left(\frac{(1-\lambda) a^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} - a^{(n)} \psi^{(n)} \right) (y^{(n)} - y^*).
\end{aligned} \tag{23}
$$

Якщо конкретизувати вибір $\psi^{(n)}$ за формулою

$$
\psi^{(n)} = \frac{(1-\lambda)}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}},
$$

то з формули (23) випливає, що

$$
x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) - \frac{a^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} \big(\varphi, (I - A)(x^{(n)} - x^*)\big).
$$

Застосування теореми 1 засвідчує, що для збіжності послідовності $\{x^{(n)}\}$ до x^*, а також послідовності $\{y^{(n)}\}$ до y^* достатньо, щоб при $n = 0, 1, \ldots$ оператор

$$
H_1^{(n)} w = Aw - \frac{a^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} (\varphi, (I - A) w) \tag{24}
$$

був оператором стиску. В тому окремому випадку, коли $\alpha_0^{(n)} = 0$, тобто, коли $(\varphi, a^{(n)}) = \lambda$, із (24) отримується

$$
H_1^{(n)} w = H_2^{(n)} w = Aw - a^{(n)} (\varphi, w).
$$

Отже, в цьому окремому випадку для збіжності послідовності $\{x^{(n)}\}$ до розв'язку рівняння (1) достатньо, як можна переконатися, щоб був стиском оператор $H_2^{(n)}$ і щоб початкове наближення $x = x^{(0)}$ задовольняло рівність

$$
(\varphi, x) = \frac{(\varphi, b)}{1 - \lambda}.
$$

Зазначимо, що у цьому випадку при виборі $a^{(n)}$ за формулою

$$
a^{(n)} = \frac{APx^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}
$$

алгоритм (19), (20) зводиться до проекційно-ітеративного алгоритму

$$
x^{(n+1)} = APx^{(n)} + Qx^{(n)} + b.
$$

Якщо $a^{(n)}$ означено за формулою (21) і при цьому $\alpha_0^{(n)} = 0$ при $n = 0, 1, \ldots$, то формули (19), (20) можна записати у вигляді однієї формули вигляду

$$x^{(n+1)} = AQx^{(n)} + \frac{(\varphi, b) + (\varphi, AQx^{(n)})}{(1-\lambda)(\varphi, x^{(n)})} APx^{(n)} + b. \tag{25}$$

Алгоритм (25) можна розглядати як узагальнення однопараметричного методу ітеративного агрегування із [3]. Алгоритм (25) тотожний із зазначеним алгоритмом з [3], що описується формулою (4) у випадку, коли P є тотожним оператором. Маємо на увазі при цьому, що

$$a^{(n)} = \frac{Ax^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}.$$

За цієї ситуації матимемо нестаціонарний аналог алгоритму (2) вигляду

$$x^{(n+1)} = AP_n x^{(n+1)} + AQ_n x^{(n)} + b. \tag{26}$$

В ньому проекційний оператор P_n залежить від номера ітерації n. Істотною відмінністю алгоритму (4) від алгоритму (26) є те, що проекційно-ітеративні методи вигляду (2) та (26), а також інші проекційно-ітеративні методи ґрунтуються на ідеї емпіричного вибору проекційного оператора P_0. Алгоритм (4) як і багатопараметричні методи ітеративного агрегування ґрунтуються на властивості алгоритмічного вибору підпростору E' і операторів проектування простору E в E' на кожному кроці ітераційного процесу.

References

[1] He G., Feng H., Li C., Chen H. *Parallel SimRank Computation on Large Graphs with Iterative Aggregation.* In: Proc. of the 16th ACM SIGKDD Intern. Conf. KDD, Washington DC, USA, July 25–28, 2010, ACM, New York, USA, 543-552. doi: 10.1145/1835804.1835874

[2] Hrobova T.A., Stetsenko V.Ya. Iterative aggregation methods for the approximate solution of linear and nonlinear algebraic systems and integral equation. Publ. House of the Stavropol State Univ., Stavropol, 2003. (in Russian)

[3] Krasnoselsky M.A., Lifshits E.A., Sobolev A.V. Positive linear system. Nauka, Moscow, 1985. (in Russian)

[4] Krasnoselsky M.A., Vaynikko G.M., Zabreyko P.P., Rutitsky Ya.B., Stetsenko V.Ya. The approximate solution of operator equation. Nauka, Moscow, 1969. (in Russian)

[5] Kurpel N.S. Projection-iterative methods for the solution of operator equations. Naukova Dumka, Kyiv, 1968. (in Russian)

[6] Luchka A.Yu. The theory and application of the mrthod averaging functional correction. Publ. House of USSR Acad. of Sci., Kyiv, 1963. (in Russian)

[7] Marek I., Mayer P., Pultarava I. *Convergence issues in the theory and practice of iterative aggregation/disaggregation methods.* Electronic Trans. on Numerical Analysis, 2009, **35**, 185–200.

[8] Shuvar B.A. *The convergence of multi-parametric variants of the iterative aggregation*. Bull. Lviv Politechnic Inst. Appl. Math. 1989, **232**, 140–142. (in Russian)

[9] Shuvar B.A., Kopach M.I., Mentynskyy S.M., Obshta A.F. Bilateral approximate methods. Publ. House of Precarpathian Univ., Ivano-Frankivsk, 2007. (in Ukrainian)

[10] Shuvar B.A., Obshta A.F., Kopach M.I. *Decomposition of linear operator equations by iterative aggregation methods.* Mathematical Bull. of Shevchenko Sci. Soc. 2012, **9**, 384–398. (in Ukrainian)

[11] Shuvar B.A., Petrovych R.Y. *Aggregation-iterative algorithm for linear equation in Banach spaces.* Dep. DNTB in Ukraine 1995, **2345** (95), 1–6. (in Ukrainian)

[12] Shuvar B.A., Petrovych R.Y. *Parametrization of a projection-iterative algorithm.* Dep. DNTB in Ukraine 1995, **2342** (95), 1–8. (in Ukrainian)

[13] Sokolov Yu.D The method of averaging functional corrections. Naukova Dumka, Kyiv, 1967. (in Russian)

[14] Zhu Y., Ye S., Li X. *Distributed PageRank computation based on iterative aggregation-disaggregation methods.* In: Proc. of the 14th ACM Intern. Conf. on Information and knowledge management, Bremen, Germany, October 31 – November 5, 2005, ACM, New York, USA, 578–585. doi: 10.1145/1099554.1099705

Надійшло 01.12.2012

Shuvar B.F., Obshta A.F., Kopach M.I. *Aggregation-iterative analogues and generalizations of projection-iterative methods*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 156–163.

Aggregation-iterative algorithms for linear operator equations are constructed and investigated. These algorithms cover methods of iterative aggregation and projection-iterative methods. In convergence conditions there is neither requirement for the corresponding operator of fixed sign no restriction to the spectral radius to be less than one.

Key words and phrases: projection-iterative methods, decomposition, aggregation-iterative methods.

Шувар Б.А., Общта А.Ф., Копач М.И. *Агрегационно-итеративные аналоги и обобщения проекционно-итеративных методов* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 156–163.

Для линейных операторных уравнений построены и исследованы агрегационно-итеративные алогоритмы, которые охватывают способы итеративного агрегирования и проекционно-итеративные методы. В условиях сходимости отсутствует требование о знакопостоянности соответствующего оператора и ограничение, чтобы его спектральный радиус был меньше единицы.

Ключевые слова и фразы: проекционно-итеративные методы, декомпозиция, агрегационно-итеративные методы.