Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 512.538

Довбняк Т.С., Заторський Р.А.

ПАРАФУНКЦІЇ МАТРИЦЬ ВЕРТИКАЛЬНОЇ ТА ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ

Довбняк Т.С., Заторський Р.А. *Парафункції матриць вертикальної та горизонтальної структури* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 36–42.

Досліджуються властивості парафункцій матриць вертикальної та горизонтальної структури та будуються деякі загальні формули обернення поліноміальних послідовностей.

1 Вступ

Парафункції трикутних матриць [4] спеціальної структури відіграють важливу роль у комбінаторному аналізі та теорії чисел. Одним із таких важливих класів трикутних матриць є трикутні матриці похилої структури досліджені у [3].

У статті досліджуються деякі властивості парафункцій трикутних матриць вертикальної $V = (v_{0\cdot i+j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ та горизонтальної $H = (h_{i+0\cdot j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ структури, зокрема, для них будуються загальні формули обернення [1].

2 Допоміжні поняття та твердження

Матриця виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n , \tag{1}$$

з елементами із деякого числового поля, називається трикутною матрицею.

Роль одиничної матриці відіграє матриця виду

$$I = (\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ,$$

де δ_{ij} — символ Кронекера.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Ключові слова і фрази: трикутна матриця, парафункції, матриця горизонтальної структури, матриця вертикальної структури.

Означення 1. [4]. *Нехай A — трикутна матриця (1). Парадетермінантом та параперманентом трикутної матриці A називають відповідно числа:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\operatorname{pper}(\mathrm{A}) = \left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right] = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

де підсумовування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = n$, а символом $\{a_{i,j}\}$ позначено факторіальний добуток елемента $a_{i,j}$, що задається рівністю

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Теорема 1. [2]. *Оберненою трикутною матрицею A^{-1} до трикутної матриці (1) є матриця*

$$(b_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \left(\frac{(-1)^{i+j}}{a_{jj}} \left\langle \frac{a_{r+j+1,s+j}}{a_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{1\leqslant s\leqslant r\leqslant i-j-1} \right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Нехай $\mathcal{P}_n$ — лінійний простір векторів многочленів і $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — деякий його елемент, причому $\deg(f_i) = i - 1, i = 1, 2, \ldots, n$. Якщо

$$Af = g, \tag{2}$$

то трикутну матрицю (1) можна інтерпретувати як лінійний оператор A, який переводить вектор многочленів f у вектор многочленів g. Із останньої рівності отримаємо рівність

$$f = A^{-1}g, \tag{3}$$

де $A^{-1} = (b_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$.

Із рівностей (2), (3) випливають відповідно формули обернення поліноміальних послідовностей g і f:

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} f_i, \qquad f_n = \sum_{i=1}^{n} b_{ni} g_i.$$

3 Формули обернення поліноміальних послідовностей

Побудуємо дві пари загальних формул обернення поліноміальних послідовностей, породжених трикутними матрицями вертикальної та горизонтальної структури. Справедлива наступна

Теорема 2. *Нехай* $V = (v_{0 \cdot i+j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ *і* $H = (h_{i+0 \cdot j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ *деякі трикутні матриці вертикальної та горизонтальної структури з елементами із деякого числового поля і* f *та* g *— деякі вектори многочленів, тоді справедливі формули обернення для відповідних поліноміальних послідовностей:*

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} v_i f_i, \qquad f_n = \frac{1}{v_n}(g_n - g_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

та

$$g_n = h_n \sum_{i=1}^{n} f_i, \qquad f_n = \frac{1}{h_n} g_n - \frac{1}{h_{n-1}} g_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Доведення. Оберненими матрицями до матриць V та H є відповідно матриці:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_1} & & & & & \\ -\frac{1}{v_2} & \frac{1}{v_2} & & & & \\ 0 & -\frac{1}{v_3} & \frac{1}{v_3} & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{v_{n-1}} & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{v_n} & \frac{1}{v_n} \end{pmatrix}, H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & & & & & \\ -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & & & & \\ 0 & -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{h_{n-1}} & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}.$$

Перемножуючи останні рядки цих матриць на вектор многочленів g отримаємо відповідно рівності (4) та (5). □

4 Парафункції матриць вертикальної та горизонтальної структури

Теорема 3. *Нехай* V *— матриця вертикальної структури із теореми 2, тоді справедливі рівності:*

$$ddet(V) = 0, \; pper(V) = 2^{n-1} \prod_{i=1}^{n} v_i.$$

Доведення. Виносимо за знак парафункції спільний множник v_i із i-го стовпця та використовуємо той факт, що парадетермінант трикутної матриці з одиничними елементами дорівнює нулю, а параперманент цієї матриці дорівнює 2^{n-1}. □

Теорема 4. *Нехай*

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & & & & \\ h_2 & h_2 & & & \\ h_3 & h_3 & h_3 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ h_n & h_n & h_n & \ldots & h_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

деяка трикутна матриця із елементами числового поля K*, тоді виконуються рівності*

$$\mathrm{ddet} H = H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_n)_n$$

$$= h_n \cdot (H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1})_{n-1} - H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_n)_{n-1}), \tag{7}$$

$$\operatorname{pper} H = H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_n)_n$$
$$= h_n \cdot (H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1})_{n-1} + H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_n)_{n-1}), \tag{8}$$

Доведення. Розкладемо парадетермінант матриці (6) за елементами останнього рядка

$$H(h_1, h_2, \ldots, h_n) = h_n \cdot H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1})$$
$$-h_n \cdot (h_n H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}) - h_n^2 H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-3}) + h_n^3 H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-4})$$
$$- \ldots + (-1)^{n-3} h_n^{n-2} H(h_1) + (-1)^{n-2} h_n^{n-1}).$$

Але вираз у дужках правої частини останньої рівності є розкладом парадетермінанта

$$H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_n) = \left\langle \begin{matrix} h_1 & & & & \\ h_2 & h_2 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ h_{n-2} & h_{n-2} & \ldots & h_{n-2} & \\ h_n & h_n & \ldots & h_n & h_n \end{matrix} \right\rangle$$

за елементами останнього рядка. Рівність (8) доводиться аналогічно. □

Наслідок 1. *Якщо* $h_{n-1} = h_n$, *то*

$$H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_{n-1})_n = 0,$$
$$H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_{n-1})_n = 2 \cdot h_{n-1} \cdot H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1})_{n-1}. \tag{9}$$

Доведення. Справедливість рівностей цього наслідку безпосередньо випливає із рекурентних рівностей (7), (8). □

Застосовуючи послідовно (9) до параперманента матриці (6), отримаємо

Наслідок 2. *Якщо* $h_1 = \ldots = h_n = h$, *то* $H^{+}(h_1, h_1, \ldots, h_1)_n = 2^{n-1} \cdot h^n$.

Теорема 5. *Якщо у матриці (6) елементи утворюють геометричну прогресію і виконуються рівності* $h_2 = h_1 q, h_3 = h_1 q^2, \ldots, h_n = h_1 q^{n-1}$, *де* $h_1, q \in \mathbb{R}$, *то парафункції матриць горизонтальної структури виражаються через відповідні парафункції матриць похилої структури*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ q & 1 & & & \\ q^2 & q & 1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

причому справедливі рівності

$$H(h_1, h_1 q, \ldots, h_1 q^{n-1})_n = h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} ddetQ$$
$$= h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} q^{\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_n},$$

$$H^{+}(h_1, h_1q, \ldots, h_1^n q^{n-1})_n = h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} pperQ$$
$$= h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} q^{\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n}, \tag{11}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Доведення. Винесемо з i-того стовпця парадетермінанта

$$\left\langle \begin{array}{lllll} h_1 & & & & \\ h_1q & h_1q & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ h_1q^{n-2} & h_1q^{n-2} & \ldots & h_1q^{n-2} & \\ h_1q^{n-1} & h_1q^{n-1} & \ldots & h_1q^{n-1} & h_1q^{n-1} \end{array} \right\rangle$$

множник h_1q^{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$, за його знак, тоді отримаємо парадетермінант (10) матриці похилої структури, який при допомозі твердження 2.5.2. (див. [4, с. 141]) можна подати у вигляді

$$h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} q^{\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n}.$$

Рівність (11) доводиться аналогічно. □

Теорема 6. *Нехай* $h_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$ *належать деякому числовому полю* K *і*

$$P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x) = \begin{pmatrix} x & & & & & \\ h_1 & x & & & & \\ h_2 & h_2 & x & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ h_{n-2} & h_{n-2} & \ldots & h_{n-2} & x & \\ h_{n-1} & h_{n-1} & \ldots & h_{n-1} & h_{n-1} & x \end{pmatrix}, \tag{12}$$

причому справедливі рівності:

$$\mathrm{ddet}(P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x))$$
$$= p_{n,0}x^n - p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^i p_{n,i}x^{n-i} + \ldots + (-1)^{n-1}p_{n,n-1}x,$$
$$\mathrm{pper}(P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x))$$
$$= p_{n,0}x^n + p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} + \ldots + p_{n,i}x^{n-i} + \ldots + p_{n,n-1}x,$$

тоді коефіцієнти многочленів задовольняють рекурентні рівності

$$p_{n,i} = p_{n-1,i} + h_{n-1}p_{n-2,i-1} + h_{n-1}^2 p_{n-3,i-2} + \ldots + h_{n-1}^{n-2}p_{1,i-n+2} + h_{n-1}^{n-1}p_{0,i-n+1}, \tag{13}$$

де $n = 0, 1, \ldots; i = 0, 1, \ldots, n-1$, $p_{n,0} = 1, p_{n,<0} = 0$.

Доведення. Розкладаючи парадетермінант із теореми за елементами останнього рядка, дістанемо рівності

$$p_{n,0}x^n - p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}p_{n,n-1}x$$

$$= x(p_{n-1,0}x^{n-1} - p_{n-1,1}x^{n-2} + p_{n-1,2}x^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2}p_{n-1,n-2}x)$$
$$-h_{n-1}x(p_{n-2,0}x^{n-2} - p_{n-2,1}x^{n-3} + p_{n-2,2}x^{n-4} - \ldots + (-1)^{n-3}p_{n-2,n-3}x)$$
$$+h_{n-1}^2x(p_{n-3,0}x^{n-3} - p_{n-3,1}x^{n-4} + p_{n-3,2}x^{n-5} - \ldots + (-1)^{n-4}p_{n-3,n-4}x) - \ldots$$
$$+(-1)^{n-2}h_{n-1}^{n-2}xp_{1,0}x + (-1)^{n-1}h_{n-1}^{n-1}xp_{0,0}x^0,$$

з яких після зрівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x дістанемо рекурентні рівності (13). Для параперманентів співвідношення (13) доводяться аналогічно. □

Запишемо кілька перших многочленів $\mathrm{ddet}(P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x))$:

$$\mathrm{ddet}(P(;x)) = x,$$

$$\mathrm{ddet}(P(h_1;x)) = x^2 - h_1x,$$
$$\mathrm{ddet}(P(h_1,h_2;x)) = x^3 - (h_1+h_2)x^2 + h_2^2x,$$
$$\mathrm{ddet}(P(h_1,h_2,h_3;x)) = x^4 - (h_1+h_2+h_3)x^3 + (h_2^2+h_1h_3+h_3^2)x^2 - h_3^3x,$$
$$\mathrm{ddet}(P(h_1,h_2,h_3,h_4;x)) =$$
$$= x^5 - (h_1+h_2+h_3+h_4)x^4 + (h_2^2+h_1h_3+h_3^2+h_1h_4+h_2h_4+h_4^2)x^3 - (h_3^3+h_4h_2^2+h_4^2h_1+h_4^3)x^2 + h_4^4x,$$

Наслідок 3. *Якщо у матриці (12) $h_i = 1$, то многочлен $P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x)$ запишеться у вигляді бінома, а співвідношення (13) у вигляді співвідношень*

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-2}{i-1} + \ldots + \binom{n-i-1}{0}, i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Якщо, наприклад, $h_i = i$, то коефіцієнти многочлена $P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x)$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ утворюють числовий трикутник

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ 1 & -1 &&&&& \\ 1 & -3 & 4 &&&& \\ 1 & -6 & 16 & -27 &&& \\ 1 & -10 & 44 & -123 & 256 && \\ 1 & -15 & 99 & -403 & 1241 & 3125 & \\ 1 & -21 & 195 & -1099 & 4499 & -15569 & 46656 \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

відсутній у відомій "On-Line Encyclopedia of Integer Sequences".

Якщо у матриці (14) зробити підстановку $a_i = -i$, то отримаємо многочлени, коефіцієнти яких утворюють числовий трикутник (14) із додатними елементами, що узгоджується із теоремою [4] про зв'язок парадетермінанта трикутної матриці із параперманентом відповідної трикутної матриці.

Література

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. — 558 с.
2. Заторский Р.А., Малярчук А.Р. *Треугольные матрицы и комбинаторные формулы обращения* // Матем. заметки. — 2009. — Т.85, Вып. 1. — С. 12–21.
3. Заторський Р.А. *Парафункції матриць похилої структури та многочлени розбиттів* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. — 2011. — Т.1, №4. — С. 59–66.
4. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування. — Івано-Франківськ: Сімик, 2010. — 508 с.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 10.04.2012

Dovbniak T.S., Zatorsky R.A. *Parafunctions of matrices of vertical and horizontal structure*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 36–42.

The properties of parafunctions of matrices of vertical and horizontal structure are investigated. Some general formulas of inversion of polynomial sequences are built.

Довбняк Т.С., Заторский Р.А. *Парафункции матриц вертикальной и горизонтальной структуры* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 36–42.

Исследуются свойства парафункций матриц вертикальной и горизонтальной структуры и строятся некоторые общие формулы обращения полиномиальных последовательностей.