Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.95

Лопушанський А.О.[1], Лопушанська Г.П.[2], Пасічник О.В.[2]

СЛІДИ РОЗВ'ЯЗКІВ ПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ

Лопушанський А.О., Лопушанська Г.П., Пасічник О.В. *Сліди розв'язків півлінійних рівнянь з дробовою похідною за часом* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 85–93.

Знайдено достатні умови існування узагальнених початкових значень регулярних в області розв'язків півлінійних рівнянь дифузії при збуреннях дробової похідної за часом.

Вступ

Багато властивостей розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними поширюється на випадок рівнянь із псевдодиференціальними операторами, зокрема рівнянь з дробовими похідними (наприклад, [1], [5], [8], [14], [16], [9], [19]).

У працях [4], [6]-[7], [12], [13], [15], [10] та інших досліджувались узагальнені крайові значення регулярних в області розв'язків лінійних, а в [11] — і півлінійних гіпоеліптичних рівнянь з частинними похідними. Доведено, що такі розв'язки належать до вагових просторів Лебега з вагами порядків степенів відстані від точки області до межі (степінь залежить від характеру сингулярностей узагальнених крайових значень таких розв'язків) і розв'язки з певних вагових L_p-просторів набувають на межі узагальнених крайових значень.

У роботі встановлено подібний результат для півлінійних рівнянь з дробовою похідною за часом.

1 Основні позначення та допоміжні твердження

Нехай $Q_T = \{(x,t):\ x \in R,\ t \in (0,T]\}$, $L_{1,loc}(Q_T)$ — простір функцій, інтегровних у кожній обмеженій області, розміщеній строго всередині Q_T, $D(R) = C_0^\infty(R),\ D(Q_T) =$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K55.

Ключові слова і фрази: півлінійне рівняння, узагальнена функція, ваговий функційний простір, згортка, похідна дробового порядку.

$C_0^\infty(Q_T)$, $D(\bar{Q}_T) = C_0^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C_0^\infty(\bar{Q}_T) : D_t^l\varphi\,|_{t=T} = 0,\ l = 0,1,2,\dots\}$ — простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar{Q}_\tau$, $\tau < T$, $D'(R)$, $D'(Q_T)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на просторах $D(R)$, $D(Q_T)$ [3], [17], (f,φ) — значення узагальненої функції $f \in D'(R^n)$ на основній функції $\varphi \in D(R^n)$, $n = 1,2$.

Через $\hat{*}$ позначаємо операцію згортки узагальненої функції g з основною функцією φ ([17, c.111])

$$(g\hat{*}\varphi)(x) = (g(\xi),\varphi(x+\xi)),\ \ g \in D'(R),\ \ \varphi \in D(R).$$

Зауважимо, що $f(x)\hat{*}\varphi(x) = f(-x) * \varphi(x)$ ([3, c.80]).

Функціонал $f * g \in D'(R)$, який діє за правилом $(f * g,\varphi) = (f, g\hat{*}\varphi)$, $\forall\varphi \in D(R)$, називається згорткою узагальнених функцій f та g ([17, c.111]).

Для $f,g \in D'(R)$, $\varphi \in D(R)$ при існуванні $f*g$ правильна рівність $(f*g)\hat{*}\varphi = f\hat{*}(g\hat{*}\varphi)$. Справді,

$$((f*g)\hat{*}\varphi)(x) = ((f*g)(\xi),\varphi(x+\xi)) = (f(y),(g(\xi),\varphi(x+\xi+y)) =$$

$$(f(y),(g\hat{*}\varphi)(x+y)) = (f\hat{*}(g\hat{*}\varphi))(x).$$

Також використовуємо той факт, що при $f,g \in L_{1,loc}(R)\bigcap D'_+(R)$, $\varphi \in D(R)$ правильною є рівність $f\hat{*}(g*\varphi) = g*(f\hat{*}\varphi)$.

Через $D'_+(R)$ позначають простір узагальнених функцій із $D'(R)$, які дорівнюють нулю при $t < 0$ ([3, ст.87]). Простір $D'_+(R)$ є асоціативною та комутативною алгеброю, якщо за операцію множення взяти операцію згортки, одиницею в $D'_+(R)$ є δ-функція: $(\delta,\varphi) = \varphi(0)$ для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Використовуємо функцію $f_\lambda \in D'_+(R)$, яка залежить від числового параметра λ і є такою, що $f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ при $\lambda > 0$ та $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \le 0$, де $\theta(t)$ — функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функція ([3, c.87]). Справедливими будуть співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}\ ([3, c.87]),\quad f_\lambda\hat{*}f_\mu = f_{\lambda+\mu}\ ([2, c.145]).$$

При $\lambda > 0$ оператор згортки $(f_{-\lambda}*)$ в алгебрі $D'_+(R)$ називають оператором дробового диференціювання (Рімана-Ліувілля), а оператор $(f_{-\lambda}\hat{*})$ — оператором дробового диференціювання Вейля ([2, c.133]).

Нехай $\alpha \in (0;1)$. Для $v \in D(\bar{Q}_T)$ визначено

$$f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) = f'_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) = -f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v_t(x,t) =$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_t^T \frac{v_\eta(x,\eta)}{(\eta-t)^\alpha}d\eta = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_t^T \frac{v(x,\eta)}{(\eta-t)^\alpha}d\eta,\quad (x,t) \in Q_T.$$

У [18] введено регуляризовану похідну $D_t^\alpha v$ функції v порядку $\alpha \in (0;1)$

$$D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t)v(x,0),\quad (x,t) \in Q_T.$$

Зауважимо, що за умови існування неперервної функції $v_t(x,t)$, $(x,t)\in Q_T$,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{v_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau-f_{1-\alpha}(t)v(x,0),\ (x,t)\in Q_T([2,c.135]).$$

Нехай $\varepsilon_0\in(0,T]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, $Q_{T,\varepsilon}=\{(x,t)\in Q_T:\varepsilon<t\le T\}$.

Позначаємо через $C^{2,\alpha}(Q_T)$ клас функцій $v(x,t)$, $(x,t)\in Q_T$, неперервних, обмежених, двічі неперервно диференційовних за змінною x в Q_T, рівних нулю при $t>T$, для яких при кожному $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ існують неперервні в $Q_{T,\varepsilon}$ функції

$$(f_{-\alpha}(t)*v(x,t))^\varepsilon=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\varepsilon^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau-f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)v(x,\varepsilon).$$

Зауважимо, що за умови існування неперервної $v_t(x,t)$, $(x,t)\in Q_T$ маємо

$$(f_{-\alpha}(t)*v(x,t))^\varepsilon=\int\limits_\varepsilon^t f_{1-\alpha}(t-\tau)v_\tau(x,\tau)d\tau.$$

Введемо оператори:

$\hat{L}_\alpha:\quad (\hat{L}_\alpha v)(x,t)\equiv f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t)-v_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in\bar{Q}_T,\quad v\in D(\bar{Q}_T)$,

$L^\varepsilon_\alpha:\quad (L^\varepsilon_\alpha v)(x,t)\equiv(f_{-\alpha}(t)*v(x,t))^\varepsilon-v_{xx}(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\quad t\in(\varepsilon,T],\ \ v\in C^{2,\alpha}(Q_T)$,

$L^{reg}_\alpha:\quad (L^{reg}_\alpha v)(x,t)\equiv D^\alpha_t v(x,t)-v_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in\bar{Q}_T,\quad v\in C^{2,\alpha}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$.

Зауважимо, що для $v\in C^{2,\alpha}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$ визначено $(f_{-\alpha}(t)*v(x,t))^0=D^\alpha_t v(x,t)$, а, отже, $L^0_\alpha v=L^{reg}_\alpha v$ для $v\in C^{2,\alpha}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$.

Нехай $\rho(t)$ — нескінченно диференційовна невід'ємна на $[0;T]$, додатна на $(0;T]$ функція, яка має порядок $t^{\frac{\alpha}{2}}$ при $t\to 0$ ($\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\rho(t)}{t^{\frac{\alpha}{2}}}=const$) та $\rho_1(t)\le 1$ при $t\in[0;T]$. Прикладом є така функція: $\rho\in C^\infty[0,T]$, що $\rho(t)=t^{\frac{\alpha}{2}}$ при $t\in[0,\frac{\varepsilon_0}{2}]$, $\rho(t)=1$ при $t\in(\varepsilon_0,T]$, $\varepsilon_0\in(0,T)$, $0\le\rho_1(t)\le 1$ при $t\in[0;T]$. Її існування випливає з леми в [3, c.18].

Вводимо ваговий функційний простір

$$M_k(Q_T)=\{u\in L_{1,loc}(Q_T):\ \|u\|_k=\int\limits_{Q_T}\rho^k(t)|u(x,t)|dxdt<+\infty\},\quad k\in N\bigcup\{0\}.$$

Зауважимо, що $M_0(Q_T)=L_1(Q_T)$.

Використовуємо функційні простори $D_k(\bar{Q}_T)=\{\varphi\in D(\bar{Q}_T):\ \ \rho^{-k}\varphi\in C(\bar{Q}_T)\}$, $X_k(\bar{Q}_T)=\{\varphi\in D(\bar{Q}_T):\ \hat{L}_\alpha\varphi\in D_k(\bar{Q}_T)\}$.

Вважаємо, що $\varphi_l\to 0$, при $l\to\infty$ у $D_k(\bar{Q}_T)$, якщо $\varrho^{-k}\varphi_l\to 0$, при $l\to\infty$ рівномірно в $\bar{Q}_T$. Відповідно визначено збіжність $\varphi_l\to 0$, при $l\to\infty$ у $X_k(\bar{Q}_T)$: $\varphi_l\to 0$ та $\varrho^{-k}\hat{L}_\alpha\varphi_l\to 0$, $l\to\infty$ рівномірно в $\bar{Q}_T$.

Лема 1.1. *Для довільних числа $m\in N\cup\{0\}$, функції $\varphi\in D(R)$ існують такі функції $\psi_i\in X_m(\bar{Q}_T)$, $i=1,2$, що $\psi_1(x,0)=\varphi(x)$, $(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_2(x,t))_{t=0}=\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}$.*

Доведення. Розглянемо функцію $\psi(x,t) = f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum\limits_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t)\Big)$, де $\gamma \in (-1,0]$, $\varphi_i \in D(\bar{Q}_T)$, $i=\overline{0,m}$, $\varphi_0(x,0)=\varphi(x)$, а φ_i при $i=\overline{1,m}$ будуть нижче визначатись через φ_0. Застосовуючи вищезазначені властивості згорток, матимемо

$$(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t) = f_{\gamma-\alpha}(t)\hat{*}\Big(\sum_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t)\Big) - f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_{ixx}(x,t)\Big) =$$

$$\sum_{i=0}^{m} f'_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t)) - f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_{ixx}(x,t)\Big) =$$

$$f'_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}\varphi_0(x,t) - \sum_{i=1}^{m} f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{(i-1)\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_i(x,t)) -$$

$$f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_{ixx}(x,t)\Big) = -f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}\varphi_{0t}(x,t) -$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}\Big(f_{\frac{j\alpha}{2}}(t) * f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_{j+1}(x,t)\Big) - f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum_{j=0}^{m} f_{\frac{j\alpha}{2}}(t) * \varphi_{jxx}(x,t)\Big) =$$

$$-f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}\varphi_{0t}(x,t) - f_{\frac{m\alpha}{2}}(t) * \Big(f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{mxx}(x,t)\Big) -$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} f_{\frac{j\alpha}{2}}(t) * \Big(f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_{j+1}(x,t)) + f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{jxx}(x,t)\Big) =$$

$$-f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}[\varphi_{0t}(x,t) + f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_1(x,t)] - f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{0xx}(x,t) -$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} f_{\frac{j\alpha}{2}}(t) * \Big(f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{\alpha}{2}-1} * \varphi_{j+1}(x,t)) + f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{jxx}(x,t)\Big) - f_{\frac{m\alpha}{2}}(t) * \Big(f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{mxx}(x,t)\Big).$$

Вибираємо $f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}[\varphi_{0t}(x,t) + f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_1(x,t)] + f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{0xx}(x,t) = 0,$

$$f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{\alpha}{2}-1} * \varphi_{j+1}(x,t)) + f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{jxx}(x,t), \quad j=\overline{1,m-1},$$

тобто

$$\varphi_{0t}(x,t) + f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_1(x,t) + f_{\alpha-1}(t)\hat{*}\varphi_{0xx}(x,t) = 0,$$

$$f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_{j+1}(x,t) + f_{\alpha-1}(t)\hat{*}\varphi_{jxx}(x,t) = 0, \quad j=\overline{1,m-1},$$

звідки визначаємо $\varphi_j \in D(\bar{Q}_T)$, $j=\overline{1,m}$:

$$\varphi_1(x,t) = f_{1-\frac{\alpha}{2}}(t) * [f_\alpha(t)\hat{*}\varphi_{0xxt}(x,t) - \varphi_{0t}(x,t)],$$

$$\varphi_{j+1}(x,t) = f_{1-\frac{\alpha}{2}}(t) * [f_\alpha(t)\hat{*}\varphi_{jxxt}(x,t)], \quad j=\overline{1,m-1}.$$

Тоді $(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t) = -f_{\frac{m\alpha}{2}}(t) * \Big(f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{mxx}(x,t)\Big)$.

Оскільки функція $\hat{\varphi}_m(x,t) = -f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{mxx}(x,t) = f_{\gamma+1}(t)\hat{*}\varphi_{mxxt}(x,t)$ належить $D(\bar{Q}_T)$ (а, отже, обмежена в $\bar{Q}_T$), то стає зрозуміло, що

$$\rho^{-m}(t)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)=\rho^{-m}(t)(f_{\frac{m\alpha}{2}}(t)*\hat{\varphi}_m(x,t))=\frac{\rho^{-m}(t)}{m!}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\frac{m\alpha}{2}-1}\hat{\varphi}_m(x,\tau)d\tau$$

є неперервною функцією в $\bar{Q}_T$.

При $\gamma=0$ матимемо шукану функцію $\psi_1(x,t)$, а при $\gamma=\alpha-1$ — функцію $\psi_2(x,t)$. Справді, за побудовою

$$\psi_1(x,0)=\sum_{i=0}^m(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t)*\varphi_i(x,t))_{t=0}=(f_0(t)*\varphi_0(x,t))_{t=0}+\sum_{i=1}^m(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t)*\varphi_i(x,t))_{t=0}=$$

$$(\delta(t)*\varphi_0(x,t))_{t=0}=\varphi_0(x,0)=\varphi(x),$$

$$(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_2(x,t))|_{t=0}=\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\Big(f_{\alpha-1}(t)\hat{*}\sum_{i=0}^m(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t)*\varphi_i(x,t))\Big)\Big]\Big|_{t=0}=$$

$$\sum_{i=0}^m(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t)*\varphi_i(x,t))|_{t=0}=\varphi_0(x,0)=\varphi(x).$$

□

2 Узагальнені початкові значення регулярних розв'язків

Означення 2.1. *Кажуть ([17, с.46]), що узагальнена функція $f\in D'(\mathbb{R})$ має порядок сингулярності $s(f)\le p$, якщо*

$$(f,\varphi)=\sum_{i=0}^p\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{(i)}(x)f_i(x)dx\quad\forall\varphi\in D(\mathbb{R}),\quad f_i\in L_{1,loc}(\mathbb{R}),\quad i=\overline{0,p}.$$

Нехай $C^p[a,b]$ — банахів простір p раз неперервно диференційовних функцій на відрізку $[a,b]$ з нормою $||\varphi||_{C^p[a,b]}=||\varphi||'_p=\max\limits_{0\le i\le p}\sup\limits_{x\in[a,b]}|(\frac{\partial}{\partial x})^i\varphi(x)|$, $C_0^p(\mathbb{R})$ — простір функцій із $C^p(R)$ з компактними носіями на R, $C_0^p[a,b]=\{\varphi\in C_0^p(\mathbb{R}):supp\varphi\subset[a,b]\}$.

Згідно з означенням порядку узагальненої функції в [3], теоремою 3 з [3], с. 22 та зауваженням на с. 23, узагальнена функція $f\in D'(\mathbb{R})$ має порядок $\le p$, якщо існує додатна стала K, така що для довільного відрізка $[a,b]$, довільної $\varphi\in C_0^\infty[a,b]$

$$|(f,\varphi)|\le K||\varphi||_{C^p[a,b]}. \tag{1}$$

Зрозуміло, що для узагальненої функції f із $s(f)\le p$ в сенсі [17, с.46], виконується (1) і навпаки, із (1) випливає, що $s(f)\le p$ в сенсі означення з [17]. Така $f\in(C_0^p(\mathbb{R}))'$.

Теорема 1. *Нехай функція $g(x,t,z)$ $((x,t)\in Q_T,\ z\in R)$ — неперервна, функції $u^\varepsilon\in C^{2,\alpha}(Q_{T,\varepsilon})$ є розв'язками рівнянь*

$$(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t)=g(x,t,u(x,t)),\quad(x,t)\in Q_{T,\varepsilon}, \tag{2}$$

існує така $u\in M_k(Q_T)$, що:

1) $u^\varepsilon \to u$ *в* $M_k(Q_T)$ *при* $\varepsilon \to 0$,

2) $\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))dxdt \to \int\limits_{Q_T} g(x,t,u(x,t))dxdt, \quad \varepsilon \to 0.$

Тоді $u^\varepsilon(x,\varepsilon)$ *набувають при* $\varepsilon = 0$ *деяких узагальнених початкових значень* $u_0 \in D'(R)$ *порядку сингулярності* $\le 2k+2$, *а саме, існує така* $u_0 \in D'(R)$, $s(u_0) \le 2k+2$, *що*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx = (u_0,\varphi) \quad \forall\varphi \in D(R). \tag{3}$$

Доведення. Для довільної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$ визначимо $\psi_\varepsilon(x,t) = \psi(x,t-\varepsilon)$, $t \in [\varepsilon, T+\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0/2]$. Тоді $\psi_\varepsilon(x,t) \to \psi(x,t)$ та $\varrho^{-k}(t-\varepsilon)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t) \to \varrho^{-k}(t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)$, $\varepsilon \to 0$ рівномірно в $\bar{Q}_T$ ($\psi_\varepsilon \to \psi$ в $X_k(\bar{Q}_T)$).

В області $Q_{T,\varepsilon}$ для $v \in C^{2,\alpha}(Q_T)$ та вибраної ψ_ε правильною буде формула Гріна

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}}(L_\alpha^\varepsilon v)(x,t)\psi_\varepsilon(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} v(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)dxdt - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon}dx. \tag{4}$$

Справді,

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} v(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} v(x,t)\Big(f_{-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t) - \psi_{\varepsilon xx}(x,t)\Big)dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} v(x,t)\Big(f_{-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big)dxdt = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{\varepsilon}^{T} v(x,\tau)\Big(f_{1-\alpha}(\tau)\hat{*}\frac{\partial\psi_\varepsilon(x,\tau)}{\partial\tau}\Big)d\tau =$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{\varepsilon}^{T+\varepsilon}\Big(\int\limits_{\varepsilon}^{t} f_{1-\alpha}(t-\tau)v(x,\tau)d\tau\Big)\frac{\partial\psi_\varepsilon(x,t)}{\partial t}dt =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{\varepsilon}^{T}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\varepsilon}^{t} f_{1-\alpha}(t-\tau)v(x,\tau)d\tau\Big)\psi_\varepsilon(x,t)dt =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{\varepsilon}^{T}\psi_\varepsilon(x,t)(f_{-\alpha}(t)*v(x,t))^\varepsilon dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}v(x,\varepsilon)dx\int\limits_{\varepsilon}^{T+\varepsilon} f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)\psi_\varepsilon(x,t)dt.$$

Також

$$\int\limits_{Q_T} v(x,t)\psi_{\varepsilon xx}(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} v_{xx}(x,t)\psi_\varepsilon(x,t)dxdt,$$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T+\varepsilon} f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)\psi_\varepsilon(x,t)dt = \Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon} = \int\limits_{0}^{T} f_{1-\alpha}(t)\psi(x,t)dt = \Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t)\Big]\Big|_{t=0}.$$

Враховуючи ці перетворення, будемо мати формулу (4).

Нехай функція $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(Q_{T,\varepsilon})$ і є розв'язком рівняння (2) в $Q_{T,\varepsilon}$. Із формули (4) для $v = u^\varepsilon$ та побудованої вище ψ_ε маємо

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)dxdt - \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi_\varepsilon(x,t)dxdt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon}dx. \tag{5}$$

Виберемо тепер $\psi_\varepsilon(x,t)$ за функцією $\psi_2(x,t)$, визначеною лемою 1.1 для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R})$ при $m = k$. Тоді за лемою 1.1

$$(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t))\,|_{t=\varepsilon} = (f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_2(x,t))\,|_{t=0} = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi_2(x,t)dt = \varphi(x), \tag{6}$$

$$(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t) = \varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\varrho^{-k}(t-\varepsilon)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t) = \varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,t),$$

де функція $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,t)$ — нескінченно диференційовна й обмежена в $Q_{T,\varepsilon}$, а за побудовою $\tilde{\varphi}_\varepsilon \to \tilde{\varphi}$, $\varepsilon \to 0$ у $D(\bar{Q}_T)$.

За умовою 1 теореми послідовність функціоналів $\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt$ обмежена та існує $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} u(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt$. Тоді за властивістю збіжної послідовності узагальнених функцій $u^\varepsilon(x,t)$ (лема з [17, с.70]) існує

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,t)dxdt = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\lim_{\varepsilon\to0}\Big(\varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,t)\Big)dxdt =$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} u(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt.$$

З умови 2 теореми так само одержуємо існування границі

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi_\varepsilon(x,t)dxdt = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))(\lim_{\varepsilon\to0}\psi_\varepsilon(x,t))dxdt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_{T,0}} g(x,t,u(x,t)\psi(x,t)dxdt.$$

В (5) при вибраній $\psi_\varepsilon(x,t)$ за функцією $\psi_2(x,t)$ спрямуємо ε до нуля. Зі встановленого вище існування границі при $\varepsilon \to 0$ лівої частини рівності (5), а отже, й правої, та із (6) випливає існування $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Введемо функціонал u_0 на $D(R)$ наступним чином $(u_0,\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx$, $\forall\varphi \in D(\mathbb{R})$. Очевидно, він — лінійний. З формули (5) випливає, що

$$(u_0,\varphi) = \int\limits_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi_2)(x,t)dxdt - \int\limits_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi_2(x,t)dxdt. \tag{7}$$

З доведення леми 1.1 видно, що вибрана функція ψ_2 є лінійною функцією похідних допоміжної функції φ_0 за змінною x до порядку $2k$ та за змінною t до порядку k, а $\rho^{-k}(t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t) = \tilde{\varphi}(x,t)$, де $\tilde{\varphi}$ лінійно виражається через функцію φ_0 та її похідні за x до порядку $2k+2$ та за t до порядку $k+1$. Функція φ_0 є довільним продовженням функції φ з $D(R)$ до функції із $D(\bar{Q}_T)$, таким що $\varphi_0(x,0) = \varphi(x)$. Можна вибрати $\varphi_0(x,t) = \eta(t)\cdot\varphi(x)$, де $\eta \in C^\infty[0,T]$, $\eta(t) = 1$ для $t \in [0,\varepsilon_0/2]$, $\eta(t) = 0$ для $t \in [\varepsilon_0, T]$.

Нехай $[a,b] = supp\varphi$, $B = [a,b]\times[0,T]$. Тоді $\sup\limits_B |\psi| \le C\|\varphi\|'_{2k}$, $\hat{L}_\alpha\psi(x,t) = \rho^k(t)\tilde{\varphi}(x,t)$ та $\sup\limits_B |\tilde{\varphi}| \le \tilde{C}\|\varphi\|'_{2k+2}$, де $C, \tilde{C}$ — додатні сталі.

Тепер із (7) одержуємо, що для довільної $\varphi \in D(R)$

$$|(u_0,\varphi)| \le \tilde{C}\|u\|_k \cdot \|\varphi\|'_{2k+2} + \tilde{C}\int\limits_{Q_T} |g(x,t,u(x,t))|dxdt \cdot \|\varphi\|'_{2k} \le \hat{C}\|\varphi\|'_{2k+2},$$

де $\hat{C} = \hat{C}(u,k)$ — додатна стала. Отже, функціонал u_0 — неперервний на $C_0^{2k+2}(\mathbb{R})$. Згідно з означенням порядку сингулярності узагальненої функції, $s(u_0) \le 2k+2$. □

Одержаний результат поширюється на випадок рівняння

$$f_{-\alpha}(t) * u = A(x,D)u + g(x,t,u), \quad (x,t) \in R^n \times (0;T],$$

де $A(x,D)$ — лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку з нескінченно диференційовними коефіцієнтами в R^n.

Література

1. Агранович М.С. *Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы* // Успехи матем. наук. — 1965. — Т.20, №5. — С. 3–120.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций (Серия: СМБ). — М.: Наука, 1970. — 328 с.
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике — М.: Наука, 1979. — 320 с.
4. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *О начальных данных гладких решений некоторых классов параболических уравнений* // Успехи мат. наук. — 1979. — Т.34, №4. — С. 164.
5. Городецкий В.В., Дринь Я.М. Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций // Препр. АН Украины. Ин-т прикл. пр. мех. и мат. №4–91. — Львов, 1991. — 57 с.
6. Грушин В.В. *О поведении решений дифференциальных уравнений вблизи границы* // Докл. АН СССР. — 1964. — Т.158. — С. 264–267.
7. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. *Об обобщенных граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка* // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. —К.: Наук. думка, — 1989.— С.54–59.
8. Кочубей А.Н. *Диффузия дробного порядка* // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т.26, №4. — С. 660–670.
9. Лопушанська Г.П. *Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних* // Укр. мат. журн. — 1999. — Т.51, №1. — С. 48–59.

10. Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D': Монографія. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002. — 287с.

11. Лопушанська Г., Чмир О. *Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь* // Нелінійні граничні задачі. — 2007. — Т.17. — С. 50–73.

12. Лопушанский А.О. *Абстрактная параболическая задача Коши в комплекмных интерполяционных шкалах* // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т.46, №12. — С. 1799–1803.

13. Михайлов В.П. *О граничных свойствах решений эллиптических уравнений* // Мат. заметки. — 1980. — Т.27, №1. – С. 137–145.

14. Мурач А.А. *Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств* // Укр. матем. журн. — 2007. — Т.59, №6. — С. 798–814.

15. Петрушко И.М. *О граничных и начальных значениях решений параболического уравнения второго порядка* // Докл. АН СССР. — 1962. — Т.266, №3. — С. 557–560.

16. Эйдельман С.Д., Дринь Я.М. *Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений* // Матем. исследования (Кишинев). — 1981. — Вып. 63. — С. 18–83.

17. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальний курс. —М.: Наука, 1965. — 328 с.

18. Caputo M. *Liner model of dissipation whose Q is almost frequency independent*, II. Geophys. J. R. Astr. Soc. **13** (1967), 520–539.

19. S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei, Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004. — 390 p.

[1]Інститут математики Жешувського університету,
Жешув, Польща

[2]Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна

Надійшло 05.01.2011

Lopushansky A., Lopushanska H., Pasichnyk O. *The traces of the solutions of the semi-linear equations with fractional derivative with respect to time*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 85–93.

The sufficient conditions of the existence of the generalized initial values of the regular in domain solutions for semi-linear diffusion equations under perturbations of the fractional derivative with respect to time are obtained.

Лопушанский А.О., Лопушанская Г.П., Пасичник Е.В. *Следы решений полулинейных уравнений с дробной производной по времени* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 85–93.

Найдены достаточные условия существования обобщенных начальных значений регулярных в области решений полулинейных уравнений диффузии при возмущениях дробной производной по времени.