Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.927

Махней О.В.[1], Тацій Р.М.[2]

РОЗВИНЕННЯ ЗА ВЛАСНИМИ ВЕКТОР-ФУНКЦІЯМИ У ВИПАДКУ ПРОСТИХ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ СИНГУЛЯРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Махней О.В., Тацій Р.М. *Розвинення за власними вектор-функціями у випадку простих власних значень сингулярного диференціального оператора* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 94–105.

Асимптотичні формули при великих значеннях параметра для розв'язків сингулярного диференціального рівняння дозволяють оцінити функцію Ґріна крайової задачі. За допомогою цієї оцінки побудовано розвинення за власними вектор-функціями сингулярного диференціального оператора у випадку простих власних значень.

Вступ

Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами, вивчено досить добре (див., наприклад, [9]). Однак, в задачах прикладного характеру часто зустрічаються розривні чи навіть узагальнені функції в коефіцієнтах. Такі задачі є значно гірше дослідженими.

Ще в середині 50-х років минулого століття вивчались крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого й четвертого порядків, що описують вільні коливання струни і балки, які крім неперервно розподіленої маси несуть на собі ще й зосереджені точкові маси — бусинки (див. [3]). В монографії [1] досліджується оператор Шредінгера на необмеженому проміжку у випадку, коли сингулярний потенціал є, наприклад, скінченною чи нескінченною сумою δ-функцій Дірака. У випадку скалярного сингулярного диференціального оператора побудовано функцію Ґріна та досліджено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій, а також здійснено розвинення за останніми у роботах [4, 7, 5].

Слід зазначити, що спряжені диференціальні вирази містять доданки вигляду $(P(x)Y)^{(j)}$, які при недостатній гладкості не можна звести за допомогою j-кратного диференціювання до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цю обставину, їх у літературі називають квазідиференціальними.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34B05, 34L10.
Ключові слова і фрази: власні функції, розподіли, міри.

Квазіпохідні — це компоненти вектора, за допомогою якого здійснюється зведення квазідиференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Мабуть, першим, хто ввів поняття квазіпохідних, яке дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів у квазідиференціальних виразах, був Д. Шин [13].

Ця стаття присвячена побудові розвинення вектора за власними вектор-функціями диференціального оператора, породженого диференціальним виразом з розривними чи навіть узагальненими матрицями-коефіцієнтами і регулярними крайовими умовами, що узагальнює результати § 9 монографії [9].

1 Постановка задачі

Розглянемо диференціальний вираз

$$L_n(\bar{Y}) \equiv \bar{Y}^{(n)} + A_2(x)\bar{Y}^{(n-2)} + A_3(x)\bar{Y}^{(n-3)} + \ldots + A_n(x)\bar{Y},$$

де $A_i = B_i'$, $B_i(x)$ $(i = \overline{2,n})$ — матриці-функції l-го порядку, елементами яких є неперервні справа функції обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації, $\bar{Y}(x)$ — вектор-стовпець. Тут штрихом позначено узагальнене диференціювання, і тому елементи матриць $A_i(x)$ є мірами (див. [12]). Розглянемо також відповідне диференціальному виразу $L_n(\bar{Y})$ рівняння

$$L_n(\bar{Y}) = \lambda\bar{Y}, \tag{1}$$

де λ — комплексний параметр, і крайові умови

$$U_\nu(\bar{Y}) \equiv \Gamma_\nu \bar{Y}^{(k_\nu)}(a) + \Delta_\nu \bar{Y}^{(k_\nu)}(b) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \tilde{\Gamma}_{\nu j}\bar{Y}^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \tilde{\Delta}_{\nu j}\bar{Y}^{(j)}(b), \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{2}$$

які задаються за допомогою n лінійно незалежних форм $U_\nu(\bar{Y})$; Γ_ν, Δ_ν, $\tilde{\Gamma}_{\nu j}$, $\tilde{\Delta}_{\nu j}$ — сталі матриці l-го порядку; $n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n \geq 0$, $k_{s+2} < k_s$, причому для кожного значення індексу ν хоча б одна з матриць Γ_ν, Δ_ν відрізняється від нульової.

Поряд з крайовою задачею (1), (2) для векторного диференціального рівняння розглянемо також асоційовану їй крайову задачу для матричного диференціального рівняння

$$L_n(Y) = \lambda Y, \tag{3}$$

$$U_\nu(Y) \equiv \Gamma_\nu Y^{(k_\nu)}(a) + \Delta_\nu Y^{(k_\nu)}(b) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \tilde{\Gamma}_{\nu j}Y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \tilde{\Delta}_{\nu j}Y^{(j)}(b), \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{4}$$

де $Y(x)$ — квадратна матриця l-го порядку.

За допомогою прямокутної матриці $\mathcal{Y} = (Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)})^T$ матричне рівняння (3) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}'(x)\mathcal{Y} \tag{5}$$

або в розгорнутому (блочному) вигляді

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \cdots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E \\ \lambda - A_n & -A_{n-1} & \cdots & -A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \cdots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Крайові умови (4) теж можна переписати у матричному вигляді

$$W_a\mathcal{Y}(a) + W_b\mathcal{Y}(b) = 0,$$

де блочні матриці $W_a = (\Gamma_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^n$, $W_b = (\Delta_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^n$. Оскільки для стрибка матриці-функції $\mathcal{B}(x)$ має місце тотожність $[\Delta\mathcal{B}(x)]^2 \equiv 0$, то система (5) є коректною (див. [10]).

Під розв'язком матричного диференціального рівняння будемо розуміти першу блочну компоненту $Y(x)$ прямокутної матриці $\mathcal{Y}(x)$ системи (5), що задовольняє його в сенсі теорії узагальнених функцій. В роботі [11] встановлено, що розв'язок початкової задачі для рівняння (3) існує і єдиний, причому він разом зі своїми похідними до порядку $n-2$ включно є абсолютно неперервним, а його $(n-1)$-ша похідна складається з функцій, які мають обмежену варіацію на проміжку $[a, b]$ і є там неперервними справа.

Диференціальний вираз $L_n(\bar{Y})$ і крайові умови (2) породжують диференціальний оператор L, який діє з простору абсолютно неперервних вектор-функцій у простір векторів-мір.

Система, спряжена до системи (5), визначається матричною рівністю

$$\mathcal{Z}' = -(\mathcal{B}^*(x))'\mathcal{Z}, \tag{6}$$

де $\mathcal{Z} = \left(Z^{\{n-1\}}, \ldots, Z^{\{1\}}, Z\right)^T$, "$*$" — ермітове спряження, а фігурні дужки означають квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння (див. [11]). В роботі [11] встановлено, що вони визначаються формулами

$$Z^{\{0\}} \overset{df}{=} Z, \quad Z^{\{i\}} = A_i^* Z - \left(Z^{\{i-1\}}\right)', \quad i = \overline{1, n-1}.$$

З (6) видно (див. [11]), що спряжене до (3) диференціальне рівняння має вигляд

$$L_n^*(Z) \equiv (-1)^n Z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}(A_i^* Z)^{(n-i)} = \bar{\lambda} Z,$$

де риска над λ означає комплексне спряження.

Диференціальний вираз $L_n^*(\bar{Y})$ і крайові умови, спряжені до (2) (вони побудовані в роботі [6]), породжують диференціальний оператор L^*, який діє з простору абсолютно неперервних вектор-функцій у простір векторів-мір.

Означення 1.1. *При непарному n ($n = 2\mu - 1$) крайові умови (2) назвемо регулярними для розглядуваної задачі (1), (2), якщо числа θ_0 і θ_l, що визначаються співвідношенням*

$$\theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_l s^l = \begin{vmatrix} \Gamma_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \Gamma_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\Gamma_1 + s\Delta_1)\omega_\mu^{k_1} & \Delta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \Delta_1\omega_n^{k_1} \\ \Gamma_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \Gamma_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\Gamma_2 + s\Delta_2)\omega_\mu^{k_2} & \Delta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \Delta_2\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \Gamma_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\Gamma_n + s\Delta_n)\omega_\mu^{k_n} & \Delta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \Delta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

відрізняються від нуля. При парному n ($n = 2\mu$) крайові умови (2) називатимемо регулярними для цієї задачі, якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-l} і θ_l, що визначаються рівністю

$$\frac{\theta_{-l}}{s^l} + \ldots + \frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_l s^l =$$
$$\begin{vmatrix} \Gamma_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \Gamma_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\Gamma_1 + s\Delta_1)\omega_\mu^{k_1} & \left(\Gamma_1 + \frac{1}{s}\Delta_1\right)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \Delta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & \Delta_1\omega_n^{k_1} \\ \Gamma_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \Gamma_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\Gamma_2 + s\Delta_2)\omega_\mu^{k_2} & \left(\Gamma_2 + \frac{1}{s}\Delta_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \Delta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \Delta_2\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \Gamma_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\Gamma_n + s\Delta_n)\omega_\mu^{k_n} & \left(\Gamma_n + \frac{1}{s}\Delta_n\right)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \Delta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \Delta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}.$$

2 Оцінка функції Ґріна

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $LY = 0$ лише при $Y = 0$. Справді, в протилежному випадку досить замінити $L_n(Y)$ виразом $L_n(Y) - cY$, де c — довільне число, відмінне від усіх власних значень оператора L. Таке число існує, оскільки асимптотичні формули свідчать, що цей оператор має лише зліченну множину власних значень (див. [8]). Нехай усі власні значення оператора L є простими, $G(x,t,\lambda)$ — функція Ґріна задачі (3), (4), оператор L має матрицю-функцію Ґріна $G(x,t) = G(x,t,0)$.

Покладемо тепер $\lambda = -\rho^n$ і розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2n$ секторів S_q, $q = \overline{0, 2n-1}$, де $S_q = \{\rho : q\pi/n \le \arg\rho \le (q+1)\pi/n\}$. Через T_q позначимо сектор (з вершиною у точці $\rho = -c$), що утворюється з S_q шляхом зсуву $\rho \to \rho + c$.

Розглянемо в комплексній λ-площині послідовність кіл Γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, зі спільним центром у початку координат, які мають такі властивості:

1) радіус R_k кола Γ_k необмежено зростає при $k \to \infty$;

2) існує додатне число δ, таке, що прообрази ρ_k в $S_0 \cup S_1$ власних значень оператора L при відображенні $\lambda = -\rho^n$ знаходяться для досить великих k на відстані, не меншій ніж δ, від прообразів кожного з кіл Γ_k. На підставі асимптотичних властивостей власних значень такі кола Γ_k існують.

Розглянемо також інтеграл $I_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{G(x,t,\lambda)}{\lambda}\, d\lambda$. Застосувавши до нього теорему про лишки, отримаємо

$$I_k = G(x,t) + \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{Q_\nu(x,t)}{\lambda_\nu}, \tag{7}$$

де $Q_\nu(x,t)$ — лишок функції $G(x,t,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν (який припускаємо простим), а m_k — число цих полюсів у крузі Γ_k.

Теорема 1. *У випадку регулярних крайових умов на колах Γ_k кожен елемент матриці-функції $G(x,t,\lambda)$ задовольняє нерівність*

$$|G_{ij}(x,t,\lambda)| \le M|\lambda|^{\frac{1-n}{n}}, \quad i,j = \overline{1,l}, \tag{8}$$

де M — деяка стала.

Доведення. При відповідному виборі $\arg\rho$ при відображенні $\lambda = -\rho^n$ коло Γ_k переходить у дугу γ_k кола з центром у початку координат і центральним кутом $\frac{2\pi}{n}$, що проходить у двох сусідніх областях S_0, S_1 комплексної ρ-площини. Розглянемо окремо випадки парного і непарного n.

а) Нехай n — непарне, $n = 2\mu - 1$. Нехай числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ — різні корені n-го степеня з числа -1, занумеровані так, що для $\rho \in S_0$ виконується ланцюг нерівностей (див. [9, с. 53])

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1) \le \mathrm{Re}(\rho\omega_2) \le \ldots \le \mathrm{Re}(\rho\omega_n).$$

Крім того, можна показати [9, с. 75], що при $\rho \in S_0$ маємо

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1) \le 0, \ \ldots, \ \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu-1}) \le 0, \quad \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \ge 0, \ \ldots, \ \mathrm{Re}(\rho\omega_n) \ge 0. \tag{9}$$

Нехай γ_k' — та частина дуги γ_k, що знаходиться в області S_0 і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \le 0$, а γ_k'' — та її частина, що теж міститься у цій області і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \ge 0$. Оцінимо функцію Ґріна $G_{ij}(x,t,\lambda)$ на дузі γ_k', скориставшись формулами з [6]:

$$G(x,t,\lambda) = (-1)^{nl}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{l1} & \cdots & Q_{ll} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

де

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_\nu(K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\right)_{\nu,k=1}^{n},$$

$$Q_{ij}(x,t,\lambda) = \begin{vmatrix} K_{i1}(x,a,\lambda) & \cdots & K_{il}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda) & P_{ij}(x,t,\lambda) \\ U_1(K_{11}(x,a,\lambda)) & \cdots & U_1(K_{1l}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)) & U_1(P_{1j}(x,t,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(K_{l1}(x,a,\lambda)) & \cdots & U_n(K_{ll}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)) & U_n(P_{lj}(x,t,\lambda)) \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$P_{ij}(x,t,\lambda) = \begin{cases} K_{ij}(x,t,\lambda), & x > t, \\ 0, & x < t, \end{cases} \qquad i,j = \overline{1,l},$$

$K(x,t,\lambda)$ — матриця-функція Коші рівняння (3) (за першою змінною вона задовольняє це рівняння, крім того, $K^{(i)}(s,s) = 0$, $i = \overline{0,n-2}$, $K^{(n-1)}(s,s) = E$, E — одинична матриця l-го порядку).

Матриці-функції $K(x,a,\lambda)$, $K^{*\{1\}*}(x,a,\lambda)$, $\ldots$, $K^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків матричного рівняння (3). У той же час їх можна подати як лінійну комбінацію деякої іншої лінійно незалежної системи розв'язків цього рівняння. Нехай $Y_k = (y_{kij})_{i,j=1}^{l}$ — будь-яка фундаментальна система розв'язків матричного рівняння (3). Тоді $K^{*\{p-1\}*}(x,t,\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k(x,\lambda)C_{kp}(t,\lambda)$, $p = \overline{1,n}$, і, як наслідок,

$$U_\nu(K^{*\{p-1\}*}(x,t,\lambda)) = \sum_{k=1}^{n} U_\nu(Y_k(x,\lambda))C_{kp}(t,\lambda), \quad p = \overline{1,n}.$$

Отже, використовуючи блочне множення матриць, запишемо:

$$\begin{pmatrix} U_1(Y_1) & \cdots & U_1(Y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(Y_1) & \cdots & U_n(Y_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} U_1(K(x,t,\lambda)) & \cdots & U_1(K^{*\{p-1\}*}(x,t,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(K(x,t,\lambda)) & \cdots & U_n(K^{*\{p-1\}*}(x,t,\lambda)) \end{pmatrix}.$$

Враховуючи властивість визначників, отримаємо, що $\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)C(\lambda)$, де $\tilde{\Delta}(\lambda) = \det\left(U_\nu(Y_k)\right)_{\nu,k=1}^n$, $C(\lambda) = \det\left(C_{\nu k}\right)_{\nu,k=1}^n$. Аналогічними міркуваннями, з урахуванням того, що (11) можна записати за елементами останнього стовпця і першого рядка, встановлюємо, що $Q_{ij}(x,t,\lambda) = \tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)C(\lambda)$, де

$$\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda) = \begin{vmatrix} y_{1i1} & \cdots & y_{1il} & \cdots & y_{ni1} & \cdots & y_{nil} & P_{ij} \\ U_1(y_{111}) & \cdots & U_1(y_{11l}) & \cdots & U_1(y_{n11}) & \cdots & U_1(y_{n1l}) & U_1(P_{1j}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_1(y_{1l1}) & \cdots & U_1(y_{1ll}) & \cdots & U_1(y_{nl1}) & \cdots & U_1(y_{nll}) & U_1(P_{lj}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(y_{111}) & \cdots & U_n(y_{11l}) & \cdots & U_n(y_{n11}) & \cdots & U_n(y_{n1l}) & U_n(P_{1j}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(y_{1l1}) & \cdots & U_n(y_{1l}) & \cdots & U_n(y_{nl1}) & \cdots & U_n(y_{nll}) & U_n(P_{lj}) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Тоді формулу (10) перепишемо у вигляді

$$G_{ij}(x,t,\lambda) = (-1)^{nl}\frac{\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i,j = \overline{1,l}. \quad (13)$$

Функції Y_j можна вибрати так, щоб вони разом зі своїми похідними при досить великих $|\rho|$ задовольняли співвідношення

$$Y_k^{(\nu)}(x,\rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)}\left[\omega_k^\nu E + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \quad \nu = \overline{0,n-1}, \quad k = \overline{1,n}, \quad (14)$$

де E — одинична матриця l-го порядку, $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ позначає матрицю $\frac{A(x,\rho)}{\rho}$, а $A(x,\rho)$ — матрична функція, всі елементи якої є обмеженими при досить великому $|\rho|$ (див. [8]).

Згідно з [14], маємо, що $K^{[j]}(x,t,\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k^{[j]}(x,\lambda)\, Z_k(t,\lambda)$, де кожен елемент матриці $Z_k(t,\lambda) = \left(z_{kpq}(t,\lambda)\right)_{p,q=1}^l$ є відношенням алгебричного доповнення елемента $((n-1)l+q)$-го рядка і $((k-1)l+p)$-го стовпця у визначнику W. Підставивши формули (14) замість $Y_k^{[\nu]}(t)$ у вираз для $Z_k(t,\lambda)$ і скоротивши у кожному елементі цієї матриці чисельник і знаменник на ρ^l, ρ^{2l}, $\ldots$, $\rho^{(n-2)l}$, $\rho^{(n-1)(l-1)}$, $e^{l\rho\omega_s(t-a)}$, $s = \overline{1,n}$, $s \neq k$, $e^{(l-1)\rho\omega_k(t-a)}$, будемо мати

$$Z_k(t,\lambda) = e^{-\rho\omega_k(t-a)}\frac{1}{\rho^{n-1}}\langle\frac{\gamma_k}{\gamma}\rangle, \quad (15)$$

де $\langle A\rangle = A + O(1/\rho)$ — матриця,

$$\gamma = \begin{vmatrix} E & E & \cdots & E \\ \omega_1 E & \omega_2 E & \cdots & \omega_n E \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{n-1}E & \omega_2^{n-1}E & \cdots & \omega_n^{n-1}E \end{vmatrix},$$

E — одинична матриця l-го порядку, $\gamma_k = (\gamma_{kpq})_{p,q=1}^{l}$, а γ_{kpq} — алгебричне доповнення елемента, що лежить на перетині $((n-1)l+q)$-го рядка і $((k+1)l+p)$-го стовпця у визначнику γ.

За формулою Фробеніуса [2, с. 56], якщо

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

де A і D — квадратні матриці, причому $|A| \neq 0$, то

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \quad H = D - CA^{-1}B.$$

Застосуємо $n-1$ разів формулу Фробеніуса до матриці, що відповідає визначнику γ. За матрицю A кожного разу будемо брати помножену на скаляр одиничну матрицю l-го порядку. Матриця H складатиметься з деякої кількості таких самих блоків, що й вихідна матриця, внаслідок властивостей блочного множення матриць і того, що обернена до одиничної матриці теж є одиничною. На підставі цього матриця M^{-1} теж складатиметься з n^2 подібних блоків. Тому $\gamma_{kpq} = 0$ для всіх k і $p \neq q$ (внаслідок зв'язку алгебричних доповнень елементів матриці з оберненою до неї).

У той же час повинні виконуватись співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^j \frac{\gamma_{kpp}}{\gamma} = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, n-2}, \\ 1, & j = n-1, \end{cases} \qquad p = \overline{1, l}.$$

Ця система має єдиний розв'язок. З іншого боку, вона справджується при $\frac{\gamma_{kpp}}{\gamma} = -\frac{\omega_k}{n}$, оскільки $\omega_k^n = -1$. Отже, формула (15) набуває вигляду

$$Z_k(t,\lambda) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} e^{-\rho\omega_k(t-a)} \langle -\omega_k E\rangle, \quad k = \overline{1, n}. \tag{16}$$

Підставивши вирази (14) у форми $U_\nu(Y)$, матимемо

$$U_\nu(Y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu} \langle \Gamma_\nu\rangle + (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j(b-a)} \langle \Delta_\nu\rangle. \tag{17}$$

Отже, на підставі нерівностей (9) справджуються формули

$$U_\nu(Y_s) = \begin{cases} (\rho\omega_s)^{k_\nu} \langle \Gamma_\nu\rangle, & s = \overline{1, \mu-1}, \\ (\rho\omega_s)^{k_\nu} \{\langle \Gamma_\nu\rangle + e^{\rho\omega_\mu(b-a)} \langle \Delta_\nu\rangle\}, & s = \mu, \\ (\rho\omega_s)^{k_\nu} e^{\rho\omega_s(b-a)} \langle \Delta_\nu\rangle, & s = \overline{\mu+1, n}. \end{cases} \tag{18}$$

Підставивши їх у $\tilde{\Delta}(\lambda)$, отримаємо

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n} \rho^{lk_\nu} \prod_{s=\mu+1}^{n} e^{l\rho\omega_s(b-a)} \sum_{2=0}^{l} \langle\theta_s\rangle e^{s\rho\omega_\mu(b-a)} = \prod_{\nu=1}^{n} \rho^{lk_\nu} \prod_{s=\mu+1}^{n} e^{l\rho\omega_s(b-a)} \theta_l \prod_{s=1}^{l} \langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_s\rangle, \tag{19}$$

причому θ_s тут ті самі, що й в означенні регулярних крайових умов, а ξ_s — корені рівняння $\theta_0 + \theta_1\xi + \ldots + \theta_l\xi^l = 0$.

Розглянемо матрицю-функцію $G(x,t,\lambda)$ при $x > t$ (у випадку $x < t$ міркування будуть аналогічними). Тоді останній елемент 1-го рядка у визначнику буде $K_{ij}(x,t,\lambda)$. Помножимо по l стовпців визначника $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$, починаючи з $(\mu l+1)$-го, $((\mu+1)l+1)$-го, …, $((n-1)l+1)$-го, на j-й стовпець матриць $-Z_{\mu+1}(t)$, $-Z_{\mu+2}(t)$, …, $-Z_n(t)$ відповідно і додамо до останнього стовпця. Визначник внаслідок цього не зміниться. Тоді враховуючи (14), (16) і (17), елементами останнього стовпчика в $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$ будуть:

$$\frac{1}{n\rho^{n-1}} P_0 = \begin{cases} \langle 0\rangle, & i \neq j, \\ -\frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum\limits_{k=1}^{\mu} e^{\rho\omega_k(x-t)} \langle\omega_k\rangle, & i = j, \end{cases}$$

$$\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}} P_{0p} = -\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}} \left\{ \sum_{s=1}^{\mu} e^{\rho\omega_s(b-t)} \langle\omega_s^{k_\nu+1}\Delta_{\nu pj}\rangle - \sum_{s=\mu+1}^{n} e^{-\rho\omega_s(t-a)} \langle\omega_s^{k_\nu+1}\Gamma_{\nu pj}\rangle \right\},$$

де $\nu = \overline{1,n}, p = \overline{1,l}$. Підставимо тепер (12), (14), (16), (18), (19), а також вирази для останнього стовпця $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$ в (13) і розподілимо множники знаменника $\tilde{\Delta}(\lambda)$ таким чином: на ρ^{k_ν} розділимо $((\nu-1)l+2)$-й, $((\nu-1)l+3)$-й, …, $(\nu l+1)$-й рядки, на $e^{\rho\omega_s(b-a)}$ — $((s-1)l+p)$-ті стовпці, $s = \overline{\mu+1,r}$, $p = \overline{1,l}$, і на $\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_p\rangle$ поділимо $((\mu-1)l+p)$-ті стовпці відповідно. Тоді формула (13) набуде вигляду

$$G_{ij}(x,t,\lambda) = \frac{(-1)^l}{n\rho^{n-1}\theta_l} D,$$

де перший рядок визначника D порядку nl має вигляд

$$\Big(\langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, e^{\rho\omega_1(x-a)}\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, e^{\rho\omega_{\mu-1}(x-a)}\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, \frac{e^{\rho\omega_\mu(x-a)}\langle 1\rangle}{\langle e^{\rho\omega_1(b-a)} - \xi_i\rangle},$$
$$\langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, e^{\rho\omega_{\mu+1}(x-b)}\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, e^{\rho\omega_n(x-b)}\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, P_0 \Big),$$

причому відмінні від $\langle 0\rangle$ елементи знаходяться на останньому і $((s-1)l+i)$-х місцях, а $((\nu-1)l+p+1)$-й рядок побудовано так:

$$\Big(\langle\omega_1^{k_\nu}\Gamma_{\nu p1}\rangle, \ldots, \langle\omega_1^{k_\nu}\Gamma_{\nu pl}\rangle, \ldots, \langle\omega_{\mu-1}^{k_\nu}\Gamma_{\nu pl}\rangle, \frac{\omega_\mu^{k_\nu}\langle\Gamma_{\nu p1} + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_{\nu p1}\rangle}{\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_1\rangle}, \ldots,$$
$$\frac{\omega_\mu^{k_\nu}\langle\Gamma_{\nu pl} + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_{\nu pl}\rangle}{\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_l\rangle}, \langle\omega_{\mu+1}^{k_\nu}\Delta_{\nu p1}\rangle, \ldots, \langle\omega_r^{k_\nu}\Delta_{\nu pl}\rangle, P_{\nu p} \Big).$$

Аналогічно, як у [9, с. 78] можна показати, що внаслідок регулярності крайових умов знаменник $\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_p\rangle$, $p=\overline{1,l}$, обмежується знизу одним і тим самим числом. Тоді, з огляду на умови (9), всі елементи визначника D на дузі γ_k' обмежені зверху, оскільки експоненти там мають недодатну дійсну частину. Отже, на дугах γ_k' справджується нерівність

$$|G_{ij}(x,t,\lambda)|\le\frac{M}{|\rho|^{n-1}},\quad M=\mathrm{const}. \tag{20}$$

Якщо тепер у визначнику $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$ помножити групи по l стовпчиків, починаючи з $((\mu-1)l+1)$-го, $(\mu l+1)$-го, ..., $((n-1)l+1)$-го, на j-й стовпець матриць $-Z_\mu(t)$, $-Z_{\mu+1}(t)$, ..., $-Z_n(t)$ відповідно та додати до останнього стовпця, то, повторивши попередні міркування, легко переконатись у правильності нерівності (20) і на дугах γ_k''.

Таким чином, нерівність (20) доведено для тієї частини дуги γ_k, що розміщена в секторі S_0. Оскільки ці самі міркування застосовні до будь-якої області S_ν, вони дають той самий результат на дузі γ_k і в секторі S_1. Переходячи від ρ до λ, отримуємо твердження леми для випадку непарного n.

б) Нехай n — парне, $n=2\mu$. Оскільки

$$U_\nu(Y_\mu)=(\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{\langle\Gamma_\nu\rangle+e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\langle\Delta_\nu\rangle,\quad U_\nu(Y_{\mu+1})=(\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\{\langle\Gamma_\nu\rangle+e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\langle\Delta_\nu\rangle\},$$

то цей випадок відрізняється від попереднього лише тим, що $\tilde{\Delta}(\lambda)$ містить вираз $\theta_l\prod\limits_{s=1}^{2l}\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_s\rangle$ у тих же позначеннях. Тут $((\mu-1)l+s)$-ті стовпці потрібно поділити на $\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_s\rangle$, $s=\overline{1,2l}$, відповідно. Решта міркувань у доведенні теореми будуть аналогічними до випадку дуги γ_k'. Теорему доведено.

□

Зауваження 2.1. *З доведення випливає, що нерівність (8) справджується для великих $|\lambda|$ і в області O_δ, отриманій з λ-площини відкиданням образів кіл $|\rho-\rho_k|<\delta$ при відображенні $\lambda=-\rho^n$.*

3 Основні результати

Теорема 2. *Функція Ґріна $G(x,t)$ диференціального оператора L, породженого регулярними крайовими умовами (2), розвивається в рівномірно збіжний відносно x і t з $[a,b]$ ряд*

$$G(x,t)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{Q_\nu(x,t)}{\lambda_\nu}. \tag{21}$$

Доведення. Користуючись теоремою 1 і зауваженням до неї, отримаємо оцінки (тут R_k — радіус кола Γ_k):

$$|I_{kij}(x,t)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}}R_k}2\pi R_k=\frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$\left|\frac{Q_{kij}(x,t)}{\lambda_k}\right|=\left|\frac{1}{2\pi\lambda_k}\int\limits_{|\rho-\rho_k|=\delta}n\rho^{n-1}G_{ij}(x,t,-\rho^n)d\rho\right|\leqslant\frac{nM\delta}{|\lambda_k|},\quad i,j=\overline{1,l},$$

з яких безпосередньо випливають співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} I_k(x,t) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{Q_k(x,t)}{\lambda_k} = 0, \tag{22}$$

причому збіжність є рівномірною відносно x і t з $[a,b]$. Внаслідок (7) і (22) буде мати місце формула (21), що й доводить теорему. □

Теорема 3. *Якщо всі власні значення оператора L, породженого регулярними крайовими умовами, є простими нулями функції $\Delta(\lambda)$, то для його функції Ґріна при виконанні умови нормованості*

$$\int\limits_a^b \bar{Z}^*_\nu(x)\bar{Y}_\nu(x)\,dx = 1 \tag{23}$$

існує розвинення у рівномірно збіжний ряд

$$G(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\bar{Y}_\nu(x)\bar{Z}^*_\nu(t)}{\lambda_\nu}. \tag{24}$$

Доведення. Оскільки $Q_\nu(x,t)$ — лишок функції $G(x,t,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν, а всі власні значення оператора L — прості нулі функції $\Delta(\lambda)$, то згідно з формулою, яка доводиться аналогічно, як у [9, с. 48–50], $Q_\nu(x,t) = \bar{Y}_\nu(x)\bar{Z}^*_\nu(t)$, де $\bar{Y}_\nu(x)$, $\bar{Z}_\nu(t)$ — власні функції операторів L і L^*, що відповідають власним значенням λ_ν та $\bar{\lambda}_\nu$ і пронормовані так, щоб виконувались співвідношення (23). Теорему доведено. □

З цієї теореми легко отримати теорему про розвинення заданої вектор-функції $f(x)$.

Теорема 4. *Нехай L — оператор, породжений регулярними крайовими умовами, і нехай всі його власні значення є простими нулями функції $\Delta(\lambda)$. Тоді будь-яка вектор-функція $f(x)$ з області визначення оператора L розвивається у рівномірно збіжний ряд за його власними функціями*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \bar{Y}_\nu(x), \tag{25}$$

де при виконанні умови (23)

$$\alpha_\nu = \int\limits_a^b \bar{Z}^*_\nu(t) f(t)\,dt,$$

а $\bar{Y}_\nu(x)$, $\bar{Z}_\nu(x)$ — власні функції операторів L і L^*, що відповідають власним значенням λ_ν і $\bar{\lambda}_\nu$.

Доведення. Покладемо $Lf = \varphi'$, $L^*\bar{Z}_\nu = \psi'_\nu$, де φ і ψ_ν — вектор-функції обмеженої на $[a,b]$ варіації, неперервні справа. Тоді

$$f(x) = \int\limits_a^b G(x,t)\,d\varphi(t), \quad \bar{Z}_\nu(x) = \int\limits_a^b H(x,t)\,d\psi_\nu(t), \tag{26}$$

де $H(x,t)$ — функція Ґріна оператора L^*. Підставимо в формулу (26) замість функції $G(x,t)$ її розвинення (24). Внаслідок рівномірної збіжності останнього, можемо його інтегрувати почленно. Отже, справджується формула (25), де

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu} \int\limits_a^b \bar{Z}_\nu^*(t)\, d\varphi(t). \tag{27}$$

Оскільки $G(x,t) = H^*(t,x)$ (див. [6]), то буде виконуватись також і рівність

$$\int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x) \int\limits_a^b G(x,t)\, d\varphi(t) = \int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x) \int\limits_a^b H^*(t,x)\, d\varphi(t),$$

звідки, враховуючи (26), отримаємо співвідношення $\int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x) f(x) = \int\limits_a^b \bar{Z}_\nu^*(x)\, d\varphi(x).$

З іншого боку, $L^*\bar{Z}_\nu = \lambda_\nu^* \bar{Z}_\nu$. Тоді $\psi_\nu(x) = \int\limits_a^x \lambda_\nu^* \bar{Z}_\nu(t)\, dt$. Підставивши цю рівність у (27), отримаємо, що

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu} \int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x) f(x) = \frac{1}{\lambda_\nu} \int\limits_a^b (\lambda_\nu^* \bar{Z}_\nu(x))^* f(x)\, dx = \int\limits_a^b \bar{Z}_\nu^*(x) f(x)\, dx,$$

що й потрібно було довести. □

Отже, за допомогою оцінки матриці-функції Ґріна крайової задачі побудовано розвинення у ряд за власними вектор-функціями диференціального оператора L будь-якої вектор-функції з області визначення оператора L (тобто з множини вектор-функцій, які разом зі своїми похідними до порядку $n-2$ є абсолютно неперервними на $[a,b]$, а компоненти $(n-1)$-ї похідної мають там обмежену варіацію і неперервні справа, і які, крім того, задовольняють крайові умови (2)). Отримані результати полегшують дослідження коливань і стійкості будівельних конструкцій.

Література

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. — М.: Мир, 1991. — 566 с.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 550 с.

3. Кац И.С., Крейн М.Г. *О спектральных функциях струны* // Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир — 1968. — С. 648–731.

4. Махней О.В. *Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2001. — Т.44, №2. — С. 17–25.

5. Махней О. В. *Розвинення за власними функціями сингулярного диференціального оператора* // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2004. — Т.47, №4. — С. 88–94.

6. Махней О.В. *Функція Ґріна крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння* // Вісник НУ "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. — 2009. — №643. — С. 64–72.

7. Махней О.В. *Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості* // Матем. студії. — 2002. — Т.18, №2. — С. 147–156.

8. Махней А.В., Таций Р.М. *Асимптотика собственных значений краевой задачи для векторного сингулярного дифференциального уравнения* // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т.45, №6. — С. 788–796.

9. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

10. Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. *Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами* // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 566. — С. 33–40.

11. Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. // Препр. НАН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, №2–94. — Львів, 1994. — 56 с.

12. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 312 с.

13. Шин Д.Ю. *О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка* // Мат. сб. — 1940. — Т.7(49), №3. — С. 479–532.

14. Makhney O.V., Tatsiy R.M. *The structure of Cauchy function of the vector quasidifferential equation* // Математичні Студії. — 2004. — Т.21, №2. — С. 221–224.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

[2] Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
Львів, Україна

Надійшло 09.09.2010

Makhnei O.V., Tatsii R.M. *Expansion by eigenvectors in case of simple eigenvalues of singular differential operator*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 94–105.

The asymptotic formulas with large values of parameter for solutions of singular differential equation allow us to estimate Green's function of the boundary-value problem. With the help of this estimation the expansion of singular differential operator by eigenvectors in the case of simple eigenvalues is constructed.

Махней А.В., Таций Р.М. *Разложение по собственным вектор-функциям в случае простых собственных значений сингулярного дифференциального оператора* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 94–105.

Асимптотические формулы при больших значениях параметра для решений сингулярного дифференциального уравнения позволяют оценить функцию Грина краевой задачи. С помощью этой оценки построено разложение по собственным вектор-функциям сингулярного дифференциального оператора в случае простых собственных значений.