Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.98

Загороднюк А.В.[1], Чернега І.В.[2]

СПЕКТР АЛГЕБР СИМЕТРИЧНИХ ТА СУБСИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Загороднюк А.В., Чернега І.В. *Спектр алгебр симетричних та субсиметричних аналітичних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 31–38.

В роботі досліджуються алгебри симетричних та субсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторах $L_1[0,\infty)\cap L_\infty[0,\infty)$ та $L_\infty[0,1]$ і їх спектри.

Вступ

Нехай X, Y — банахові простори над полем $\mathbb{K}$, де $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Нагадаємо, що відображення $P : X\to Y$ називається *n-однорідним поліномом,* якщо існує симетричне n-лінійне відображення $A : X^n \to Y$ таке, що $P(x)=A(x,\dots,x)$. *Поліном степеня m* є скінченною сумою n-однорідних поліномів, $n=1,\dots,m$.

Нехай G — напівгрупа ізометричних операторів на просторі X. Функція f з простору X називається *симетричною відносно G* (або *G-симетричною,*) якщо $f(\sigma(x))=f(x)$ для кожного $\sigma\in G$. Важливим прикладом є випадок, коли $X=\ell_p$ $(1\le p<\infty)$ і $G=\mathcal{G}$ — група перестановок на множині натуральних чисел. Тоді $\sigma\in\mathcal{G}$ діє на просторі ℓ_p наступним чином:

$$\sigma\Big(\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_{\sigma(i)},$$

де $\{e_1,e_2\dots,\}$ — стандартна база на просторі ℓ_p. В літературі $\mathcal{G}$-симетричні функції на ℓ_p називають *симетричними.*

Функція f на просторі $L_p[0,1]$ називається симетричною, якщо $f(\sigma x)=f(x)$ для довільного $\sigma\in\Sigma$, де Σ є групою вимірних автоморфізмів відрізка $[0,1]$, які зберігають міру.

Іншим важливим прикладом є випадок, коли $X=\ell_p$ і $G=\mathfrak{G}$ — напівгрупа, породжена ізометричними операторами β_i,

$$\beta_i\colon (x_1,x_2,\dots)\mapsto(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots). \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46-02, 46E30, 46J20.

Ключові слова і фрази: спектр алгебр, симетричні та субсиметричні аналітичні функції.

© Загороднюк А.В., Чернега І.В., 2010

$\mathfrak{S}$-симетричні функції називають *субсиметричними.*

Симетричні поліноми на гільбертових просторах та просторах ℓ_p і $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, вперше досліджувались Немировським і Семеновим в [12]. Властивості симетричних поліномів та аналітичних функцій вивчалися в [7, 1]. Зокрема, в роботі [7] отримано точне представлення симетричних поліномів на банахових просторах з симетричною базою та так званих переставно-інваріантних просторах функцій за допомогою елементарних симетричних поліномів. В [1] авторами досліджується спектр алгебри симетричних голоморфних функцій на просторі ℓ_p. Максимальні ідеали алгебр аналітичних функцій вивчалися в роботах [2, 3, 4, 14, 15].

В роботі [7] доведено, що, подібно до скінченновимірного випадку, поліноми

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \qquad k = \lceil p \rceil, \lceil p \rceil + 1 \ldots, \tag{2}$$

утворюють *алгебраїчну базу* в алгебрі всіх симетричних поліномів на просторі ℓ_p, де $\lceil p \rceil$ — найменше ціле число, яке є більшим або дорівнює p. Тобто, для кожного симетричного полінома P степеня $\lceil p \rceil + n - 1$, $n \geq 1$ існує поліном $q \in \mathbb{C}^n$, такий що $P(x) = q(F_{\lceil p \rceil}(x), \ldots, F_{\lceil p \rceil + n-1}(x))$.

Позначимо через $G_k(x) = \int\limits_0^1 x^k(t)dt$ елементарні симетричні поліноми на просторі $L_p[0,1]$, $k = 1, \ldots, p$. Згідно з [7], кожен симетричний поліном на просторі L_p належить до алгебраїчної оболонки поліномів G_k, $k \leq p$.

Субсиметричні поліноми досліджувались в роботах [8, 9, 12]. Так, у статті [8] (Теорема 2.1) Р. Гонзало показує, що так звані *стандартні* поліноми

$$F_{k_1,\ldots,k_n}(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_n} x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_n}^{k_n}, \quad k_1 + \cdots + k_n = n, \tag{3}$$

утворюють лінійну базу у скінченновимірному просторі n-однорідних субсиметричних поліномів для $n \geq \lceil p \rceil$.

Для банахового простору X позначимо через $\mathcal{P}(X)$ алгебру всіх поліномів на X і через $\mathcal{P}_s(X)$ (відпов. $\mathcal{P}_{s_{b_s}}(\ell_p)$) — алгебру всіх симетричних (відпов. субсиметричних) поліномів на X. Поповнення $\mathcal{P}(X)$ в метриці рівномірної збіжності на обмежених множинах співпадає з алгеброю цілих аналітичних функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на просторі X. Через $H_{bs}(X)$ (відпов. $H_{bs_{b_s}}(\ell_p)$) ми будемо позначати підалгебру всіх симетричних (відпов. субсиметричних) функцій алгебри $H_b(X)$. Ми також будемо позначати через $M_{bs}(\ell_p)$ і $M_{bs_{b_s}}(\ell_p)$ спектр (множину комплексних гомоморфізмів) алгебр $H_{bs}(\ell_p)$ і $H_{bs_{b_s}}(\ell_p)$ відповідно.

1 Симетричні аналітичні функції на просторі $L_1[0,\infty) \cap L_\infty[0,\infty)$

Позначимо через E простір

$$E = L_1[0,\infty) \cap L_\infty[0,\infty)$$

з нормою

$$\|x\|_E = \max\{\|x\|_{L_1[0,\infty)}, \|x\|_{L_\infty[0,\infty)}\}.$$

Також позначимо через $\mathcal{P}_s(E)$ алгебру всіх поліномів на просторі E, симетричних відносно групи вимірних автоморфізмів інтервалу $[0,\infty)$.

Нехай, також, $R_k(x) = \int\limits_0^\infty x^k(t)dt.$

Твердження 1.1. *Поліноми R_k є коректно визначеними на просторі E для кожного $k = 1, 2, \ldots,$ і послідовність $\{R_k\}$ утворює алгебраїчну базу в алгебрі $\mathcal{P}_s(E)$.*

Доведення. Оскільки простір E є переставно-інваріантним простором функцій на інтервалі $[0,\infty)$ (див. [10, ст.118]), то послідовність поліномів $\{R_k\}$ утворює алгебраїчну базу в $\mathcal{P}_s(E)$ згідно з [7], теорема 2.12. □

Позначимо через Ψ відображення, яке кожному $P \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$, $P = q(F_1, \ldots, F_m)$, ставить у відповідність $Q \in \mathcal{P}_s(E)$, $Q = q(R_1, \ldots, R_m)$. Зауважимо, що Ψ є біекцією і гомоморфізмом алгебр симетричних поліномів.

Для даного елемента $(a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in \ell_1$ покладемо

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{\Delta_k}(t), \tag{4}$$

де $\Delta_k = [k-1, k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ і $\chi_{\Delta_k}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k; \\ 0, & t \notin \Delta_k. \end{cases}$

Тоді

$$\|f_a\| = \max\Big\{\sum_k |a_k|, \sup_k |a_k|\Big\} = \sum_k |a_k| = \|a\|.$$

Позначимо через $\Gamma(Q)$ звуження $Q \in \mathcal{P}_s(E)$ на лінійний простір східчастих функцій $\{f_a,\ a \in \ell_1\}$.

Легко бачити, що

$$R_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t)\Big) = F_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\Big), \tag{5}$$

тобто $Q(f_a) = q(R_1(f_a), \ldots, R_m(f_a)) = q(F_1(a), \ldots, F_m(a)) = \Psi^{-1}(Q)(a)$.

Отже, $\Gamma = \Psi^{-1}$.

Твердження 1.2. *Для довільних поліномів $P \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$, $Q = \Psi(P) \in \mathcal{P}_s(E)$ має місце нерівність:*

$$\|P\| \le \|Q\|.$$

Доведення. Нехай P — симетричний поліном на ℓ_1, $P = q(F_1, \ldots, F_m)$ і нехай $Q = \Psi(P) = q(R_1, \ldots, R_m)$.

Нехай, також, $\|P\| = c$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує $x_\varepsilon \in \ell_1$, $\|x_\varepsilon\| = 1$, таке що $c - \varepsilon \le |P(x_\varepsilon)| \le c + \varepsilon$.

Нехай $F_1(x_\varepsilon) = c_1, \ldots, F_m(x_\varepsilon) = c_m$. Тоді $c - \varepsilon \leq |q(c_1, \ldots, c_m)| \leq c + \varepsilon$. Розглянемо функції $f_{x_\varepsilon} \in E$ вигляду (4), $\|f_{x_\varepsilon}\| = \|x_\varepsilon\| = 1$ що залежать від x_ε і, такі що

$$R_1(f_{x_\varepsilon}) = c_1, \ldots, R_m(f_{x_\varepsilon}) = c_m.$$

Тоді маємо, що

$$|Q(f_{x_\varepsilon}) - c| = |q(c_1, \ldots, c_m) - c| = |P(x_\varepsilon) - c| \leq \varepsilon$$

і отже,

$$\|P\| \leq \|Q\|.$$

□

З твердження 1.2 випливає, що Γ є неперервним.

Лема 1.1. *Нехай $H_1(X)$, $H_2(Y)$ — підалгебри Фреше аналітичних функцій над банаховими просторами X, Y, і нехай $T : H_1(X) \to H_2(Y)$ — неперервний сюр'єктивний гомоморфізм, такий що T є бієктивним оператором з $\mathcal{P}_1(X)$ в $\mathcal{P}_2(Y)$, де $\mathcal{P}_1(X)$, $\mathcal{P}_2(Y)$ — підпростори всіх поліномів в $H_1(X)$ і $H_2(Y)$ відповідно. Тоді T є ізоморфізмом алгебр $H_1(X)$ і $H_2(Y)$.*

Доведення. Припустимо, що $T : H_1(X) \to H_2(Y)$ не є ін'єктивним. Тоді існує аналітична функція f, така що $T(f) = 0$. Нехай $f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \neq 0$, де P_k є k-однорідними поліномами, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді, за неперервністю T, $T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} T(P_k) \neq 0$. Таким чином, суперечність показує, що T мусить бути ін'єктивним оператором з $H_1(X)$ в $H_2(Y)$. Отже, T є неперервним і бієктивним. Застосовуючи теорему про обернене відображення для просторів Фреше, ми отримуємо, що T^{-1} — неперервний. □

Теорема 1. *$H_{bs}(E)$ може бути неперервно вкладена в $H_{bs}(\ell_1)$, як щільна підалгебра.*

Доведення. Візьмемо $\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m$, $\gamma \in H_{bs}(E)$ і $\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} P_m$, $\zeta \in H_{bs}(\ell_1)$, $P_m = \Gamma(Q_m)$. Оскільки $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m$ збігається, то

$$\limsup_{m\to\infty} \|Q_m\|^{1/m} = \frac{1}{\mathcal{R}_E(\gamma)} = 0,$$

де $\mathcal{R}_E(\gamma)$ є радіусом збіжності γ в E.

З твердження 1.2 маємо, що $\|P_m\| \leq \|Q_m\|$ для кожного m. Тоді

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{\ell_1}(\zeta)} := \limsup_{m\to\infty} \|P_m\|^{1/m} \leq \limsup_{m\to\infty} \|Q_m\|^{1/m} = \frac{1}{\mathcal{R}_E(\gamma)} = 0,$$

і, таким чином, $\mathcal{R}_{\ell_1}(\zeta) = \infty$.

Отже, з того, що $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m \in H_{bs}(E)$, випливає, що $\sum_{m=0}^{\infty} P_m \in H_{bs}(\ell_1)$, і ми маємо неперервне вкладення $H_{bs}(E) \subset H_{bs}(\ell_1)$, яке є продовженням Γ зі щільного підпростору поліномів і яке ми будемо позначати тим самим символом. Очевидно, що Γ є гомоморфізмом зі щільним образом. □

Зауважимо, що коли Γ є сюр'єктивним відображенням, то, використовуючи лему 1.1, ми отримуємо, що $H_{bs}(E)$ є ізоморфним до $H_{bs}(\ell_1)$.

Наслідок 1.1. $M_{bs}(E) \supset M_{bs}(\ell_1)$.

2 Випадок $L_\infty[0,1]$

Теорема 2. *$H_{bs}(E)$ неперервно вкладається в $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, як щільна підалгебра.*

Доведення. Кожну функцію $\gamma \in L_\infty[0,1]$ ми можемо продовжити до функції $\widetilde{\gamma}$ на E наступним чином:

$$\widetilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma, & t \in [0,1]; \\ 0, & t \in [0,\infty) \setminus [0,1]. \end{cases}$$

Нехай

$$T : H_{bs}(E) \to H_{bs}(L_\infty[0,1]), \qquad T(f)(\gamma) = f(\widetilde{\gamma}).$$

Легко бачити, що T є неперервним гомоморфізмом, $|T(Q_n)| \le \|Q_n\|$ для кожного n-однорідного симетричного полінома Q_n і, крім того, $T(R_n) = G_n$. Таким чином, T є ізоморфізмом за лемою 1.1. □

Як і у випадку алгебри $H_{bs}(E)$, ми можемо розглянути звуження функцій з алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ на східчасті функції. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$, візьмемо довільний вектор $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ і нехай $\Delta_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$, $k = 1, \ldots, n$.

Як і раніше, визначимо функцію $f_a(t)$ наступним чином:

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\Delta_k}(t),$$

де $\chi_{\Delta_k}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \notin \Delta_k. \end{cases}$

Тоді

$$G_m(f_a) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\Delta_k}(t) \right)^m dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^m \chi_{\Delta_k}(t) \right) dt = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^m}{n} = \frac{F_m(a)}{n}.$$

Для заданого $f \in L_\infty[0,1]$ визначимо $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \chi_{\Delta_n}(t)$ — послідовність східчатих функцій, таких що $f_n \to f$ при $n \to \infty$. Тоді

$$G_m(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{kn}^m}{n}.$$

Твердження 2.1. *Для довільного вектора* $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ *існує східчата функція* $f(t) \in L_\infty[0,1]$, *така що*

$$G_k(f) = \xi_k.$$

Доведення. Відомо (див. [1]), що існує $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_p$ такий, що $F_k(x) = n\xi_k$. Тоді $G_k(f) = \frac{F_k}{n}$. □

3 Субсиметричні аналітичні функції на E

Для $\zeta \in E$ і $0 \le s_1 < s_2$ означимо ізометричні оператори $\beta_{[s_1,s_2]}$ на просторі $H_{bs_{b_s}}(E)$ наступним чином:

$$\beta_{[s_1,s_2]}(\zeta(t)) = \zeta(\beta_{[s_1,s_2]}(t)) := \begin{cases} \zeta(t), & t \in [0, s_1), \\ 0, & t \in [s_1, s_2], \\ \zeta(t - s_2 + s_1), & t \in (s_2, \infty). \end{cases}$$

Означення 3.1. *Функція* $f \in E$ *є субсиметричною, якщо* $f(t) = f(\beta_{[s_1,s_2]}(t))$ *для довільного оператора* $\beta_{[s_1,s_2]}$, $0 \le s_1 < s_2$.

Зауважимо, що $\beta_{[s_1,s_2]}$ є аналогом оператора β_i, що визначається формулою (1).

Згідно з формулою (3), поліном F_{k_1,k_2} може бути записаний у вигляді

$$F_{k_1,k_2}(x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i^{k_1} x_{j+i}^{k_2},$$

і якщо $k_1 = k_2$, то він симетричний. Наступне твердження показує, що для субсиметричних поліномів на E ситуація є іншою.

Твердження 3.1. *Поліном*

$$R_{1,1}(\gamma) = \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(t)\gamma(t+s)dsdt$$

є субсиметричним, але не симетричним.

Субсиметричність полінома є очевидною.

Приклад 3.1. *Розглянемо функцію* $\gamma(t) = \exp(-t)$ *і вимірний автоморфізм* $\sigma_{1,3} : \Delta_1 \leftrightarrow \Delta_3$, *де* $\Delta_k = [k-1, k)$, $k = 1, 2, 3$. *Легко бачити, що*

$$R_1(\gamma) = \int_0^\infty \exp(-t)dt =$$

$$\int_{\Delta_1} \exp(-t-2)dt + \int_{\Delta_2} \exp(-t)dt + \int_{\Delta_3} \exp(-t+2)dt + \int_3^\infty \exp(-t)dt,$$

тобто $R_1(\gamma) = \sigma_{1,3}(R_1(\gamma))$. *Однак,*

$$R_{1,1}(\gamma) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-t)\exp(-(t+s))dsdt \neq$$

$$\int_{\Delta_1}\int_{\Delta_1}\exp(-t-2)\exp(-t-s-2)dsdt+\int_{\Delta_2}\int_{\Delta_2}\exp(-t)\exp(-t-s)dsdt+$$

$$\int_{\Delta_3}\int_{\Delta_3}\exp(-t+2)\exp(-t-s+2)dsdt+\int_3^\infty\int_3^\infty\exp(-t)\exp(-t-s)dsdt=\sigma_{1,3}(R_{1,1}(\gamma)).$$

Таким чином, поліном $R_{1,1}(\gamma)$ не є симетричним.

Для даного елемента $(a_1,\ldots,a_n,\ldots)\in\ell_1$ визначимо функцію $f_a(t)$ за формулою (4). Розглянемо звуження полінома $R_{1,1}\in\mathcal{P}_{bs_{b_s}}(E)$ на лінійний простір східчастих функцій $\{f_a,\ a\in\ell_1\}$, яке ми, як і у випадку симетричних поліномів, будемо позначати Γ.

Твердження 3.2. *Відображення* Γ *має нетривіальне ядро.*

Доведення. Маємо, що

$$R_{1,1}(f_a)=\int_0^\infty\int_0^\infty\sum_{k=1}^\infty a_k\chi_{\Delta_k}(t)\sum_{k=1}^\infty a_k\chi_{\Delta_k}(t+s)dsdt=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^\infty a_i^2+\sum_{\substack{i<j,\\ i,j=1}}^\infty a_ia_j=\frac{F_2}{2}+G_2,$$

де $G_2=\sum\limits_{\substack{i<j,\\ i,j=1}}^\infty x_ix_j$.

Використовуючи той факт, що $G_2=\dfrac{F_1^2-F_2}{2}$, ми отримуємо

$$\Gamma(R_{1,1})=\frac{F_1^2}{2}.$$

З іншого боку, $\Gamma^{-1}\Big(\dfrac{F_1^2}{2}\Big)=\dfrac{R_1^2}{2}$, і таким чином,

$$R_{1,1}-\frac{R_1^2}{2}\xrightarrow{\Gamma}0.$$

□

Наслідок 3.1. *Існує комплексний гомоморфізм* $\varphi\in M(E)$, *такий що* $\varphi\notin M_{bs_{b_s}}(\ell_1)$.

Література

1. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A., *Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*, Bull. Lond. Math. Soc. **35** (2003), 55–64.

2. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W., *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 51–93.

3. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W., *Weak-star continuous analytic funtions*, Can. J. Math. **47** (1995), 673–683.

4. Aron R.M., Galindo P., Garcia D., Maestre M., *Regularity and algebras of analytic function in infinite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 543–559.

5. Dineen S., *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, North-Holland, Mathematics Studies, Amsterdam, New York, Oxford, **57**(1981).

6. Dineen S., Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.

7. González M., Gonzalo R., Jaramillo J., *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function space*, J. London Math. Soc. **(2) 59**, (1999) 681–697.

8. Gonzalo R., *Multilinear forms, subsymmetric polynomials and spreading models on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 379–397.

9. Hájek P., *Polynomial algebras on classical Banach spaces*, Israel J. Math. **106** (1998), 209–220.

10. Lindestrauss J., Tzafriri L., Classical Banach spaces II, Springer-Verlag, New York, 1977.

11. Mujica J., Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.

12. Nemirovskii A.S., Semenov S.M., *On polynomial approximation of functions on Hilbert space*, Mat. USSR Sbornik **21** (1973), 255–277.

13. Novosad Z., Zagorodnyuk A., *Polynomial automorphisms and hypercyclic operators on spaces of analytic functions*, Arch. Math. **89** (2007), 157–166.

14. Zagorodnyuk A., *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2559–2569.

15. Zagorodnyuk A., *Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces*, Contemp. Math. **435** (2007), 381–394.

[1] Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
[2] Інститут прикладних проблем механіки та математики НАН України,
Львів, Україна

Надійшло 17.09.2010

Zagorodnyuk A.V., Chernega I.V. *Spectra of algebras of symmetric and subsymmetric analytic functions*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 31–38.

Algebras of symmetric and subsymmetric analytic functions of bounded type on spaces $L_1[0,\infty)\cap L_\infty[0,\infty)$ and $L_\infty[0,1]$ and their spectra are investigated.

Загороднюк А.В., Чернега И.В. *Спектр алгебр симметрических и субсимметрических аналитических функций* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 31–38.

В роботе исследуются алгебры симметрических и субсимметрических аналитических функций ограниченного типа на пространствах $L_1[0,\infty)\cap L_\infty[0,\infty)$ и $L_\infty[0,1]$ и их спектры.