Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.956.4

Малицкая А.П., Буртняк И.В.

МЕТОД ПАРАМЕТРИКСА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Малицкая А.П., Буртняк И.В. *Метод параметрикса для ультрапараболических систем* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 74–82.

Рассмотрено системы ультрапараболических уравнений, которые обобщают уравнение диффузии с инерцией. Используя модифицированный метод Леви, построено фундаментальную матрицу решений системы уравнений Колмогорова второго порядка, получено оценки ее производных, входящих в систему.

Мы рассматриваем один класс ультрапараболических систем, обобщающих уравнение диффузии с инерцией. Фундаментальная матрица решений задачи Коши (ФМРЗК) для таких систем, коэффициенты которой зависят от t, построеная в работах [1, 2]. В этой статье построено фундаментальную матрицу решений системы (ф.м.р.), коэффициенты которой зависят от всех переменных. Для построения мы используем дважды метод Леви.

1 Обозначение. Постановка задачи. Основной результат

Пусть $x = (x_1, x_2) \in R^2$. $\Pi_{(0,T]} = \{(t, x), x \in R^2, 0 \le t \le T\}$, $0 \le \tau < t$, $\rho(t, x; \tau, \xi) = (x_1 - \xi_1)^2(4(t-\tau))^{-1} + 3(x_2 - \xi_2 + (x_1 + \xi_1)(2(t-\tau))^{-1})^2(t-\tau)^{-3}$, $n \in N$.

Рассмотрим задачу Коши для системы [1], [2]:

$$\partial_t u_\nu(t, x) - x_1 \partial_{x_2} u_\nu(t, x) = \sum_{r=1}^{n} [a_2^{r\nu}(t, x)\partial_{x_1}^2 + a_1^{r\nu}(t, x)\partial_{x_1} + a_0^{r\nu}(t, x)] u_r(t, x),$$

$$\nu = \{1, ..., n\}, (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

$$u_\nu(t, x)|_{t=\tau} = u_{\nu 0}(x), \quad 0 \le \tau < t \le T, \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.
Ключевые слова и фразы: метод параметрикса, фундаментальная матрица решений, ультрапараболические системы.

где $\partial_t w_\nu(t,x) = \sum\limits_{r=1}^{n}[a_2^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1}^2 + a_2^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1} + a_0^{r\nu}(t,x)]w_r(t,x)$ — равномерно параболическая за Петровским в $\Pi_{[0,T]}$, (x_2 — параметр); т.е., для $\forall\sigma_1 \in R^1$, $det\{\sum\limits_{k=2} a_k(t,x)(i\sigma_1)^2 - \lambda I\} = 0$ имеет корни $\lambda_j(t,x)$, $j = \{1,...,n\}$, удовлетворяющие условию

$$Re\lambda_j(t,x) < -\delta|\sigma_1|^2 \tag{3}$$

для $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \delta > 0$, δ не зависит от (t,x), $j = \{1,...,n\}$, I — единичная матрица, $\sqrt{-1} = i, a_k = (a_k^{r\nu})_{r,\nu=1}^n$. Коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям:

А) $a_j^{r\nu}(t,x)$, $j = \{0,1,2\}$ — комплекснозначные, непрырывные и ограниченые функции, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$;

Б) $a_j^{r,\nu} = a_j^{\nu,r}$, $j = \{0,1,2\}$, $\{r\nu\} \subset \{1,...,n\}$;

В) $|a_j^{r\nu}(t,x) - a_j^{r\nu}(t,x')| \le K(|x_1 - x_1'|^{\alpha_1} + |x_2 - x_2'|^{\alpha_2})$, $\forall\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]}$, $\alpha_1 \in (0,1]$, $\alpha_2 \in (\frac{1}{3}, 1]$, $K > 0$ — постоянная, независящая от t, x, x';

Г) существуют непрерывные, ограниченые $\partial_{x_1}^j a_j^{r\nu}(t,x), j = \{0,1,2\}$, удовлетворяющие условию В).

Определения ф.м.р. системы (1). Ф.м.р. системы (1) называется матрица

$$\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi), \quad \{(t,x),(\tau,\xi)\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad t > \tau,$$

такая что вектор-функция

$$u(t,x) = \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{R^2} \mathcal{E}(t,x;\beta,\gamma) f(\beta,\gamma) d\gamma$$

для любой финитной гладкой функции $f(t,x)$ является решениям неоднородной системы

$$\partial_t u(t,x) - x_1\partial_{x_2} u_(t,x) = \sum_{k=0}^{2} a_k(t,x)\partial_{x_1}^k u(t,x) + f(t,x), (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если система (1) удовлетворяет условиям А), Б), В), то существует ф.м.р. $\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)$, $t > \tau$. Если еще выполняеться условие Г), то существует ф.м.р. сопряженой системы к (1) $\mathcal{E}^*(t,x;\tau,\xi)$, $t > \tau$, при этом $\mathcal{E}'(t,x;\tau,\xi) = \mathcal{E}^*(t,x;\tau,\xi)$, и имеют место оценки*

$$|\partial_{x_1}^k \mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{4+k}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \quad 0 \le k \le 2, \tag{5}$$

$$|\partial_{x_2} \mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{7}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}|\Delta_{h_1}\partial_{x_1}^k \mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{4+k+\alpha_1}{2}}|h_1|^{\alpha_1} \max[\exp\{-c\rho(t,x^*;\tau,\xi)\}, \\ \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}], \quad x^* = (x_1 + h_1, x_2),\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}|\Delta_{h_2}\partial_{x_2} \mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{7+3\alpha_2}{2}}|h_2|^{\alpha_2} \max[\exp\{-c\rho(t,x^{**};\tau,\xi)\}, \\ \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}], \quad x^{**} = (x_1, x_2 + h_2),\end{gathered} \tag{8}$$

где положительные постоянные c, C_k, C_1 зависят от $\delta, \alpha_1, \alpha_2, \sup\limits_{\Pi_{[0,T]}} |a_k(t,x)|, T$, от характера непрерывности $a_2(t,x)$.

Ф.м.р. системы (1) (случай слоя). Построение ф.м.р. системы будем проводить в два этапа. Сначала рассмотрим вспомагательную систему, построенную в соответствии с системой (1), т.е.

$$\partial_t u(t,x) - x_1 \partial_{x_2} u(t,x) = \sum_{k=1}^{2} a_k(t, y_0, y_2 - y_1(t-\tau)) \partial_{x_1}^k u(t,x), \tag{9}$$

где (y_0, y_1, y_2, τ) — параметры, $t > \tau$, $(y_0, y_1, y_2) \in R^3$.

Используя методику [1, 2], построим матрицу Грина (ФМРЗК) для системы (9)

$$\mathcal{E}_0(t, x; \tau, \xi, y_0, y(t,\tau)), y(t,\tau) = y_2 - y_1(t-\tau).$$

Исходя из задачи Коши для (9) с началь–ными условиями при $t = \tau$, $\tau \geq 0$, построим ф.м.р. для системы, где $y_0 = x_1$.

$$\partial_t u(t,x) - x_1 \partial_{x_2} u(t,x) = \sum_{k=1}^{2} a_k(t, x_1, y_2 - y_1(t-\tau)) \partial_{x_1}^k u(t,x). \tag{10}$$

Используя метод Э.Э. Леви, будем отискивать ф.м.р. системы (10) $Z_0(t, x; \tau, \xi, y(t,\tau))$ в виде:

$$Z_0(t, x; \tau, \xi, y(t,\tau)) = \mathcal{E}_0(t, x; \tau, \xi, \xi_1, y(t,\tau)) +$$
$$\int_\tau^t d\beta \int_{R^2} \mathcal{E}_0(t, x; \beta, \gamma, \gamma_1, y(t,\tau)) \varphi(\beta, \gamma; \tau, \xi, y(\beta,\tau)) d\gamma = \mathcal{E}_0 + W, \tag{11}$$

где матрица $\varphi(t, \gamma; \tau, \xi, y(t,\tau))$ подобрана так, чтобы $Z_0(t, x; \tau, \xi, y(t,\tau))$ при $t > \tau$, как функция t, x, была решением системы (10). При этом будем предполагать, что $\varphi(t, \gamma; \tau, \xi, y(t,\tau))$ и $\varphi'_{x_2}(t, \gamma; \tau, \xi, y(t,\tau))$ — непрерывны как функции своих аргументов и справедливы оценки:

$$|\varphi(t, \gamma; \tau, \xi, y(t,\tau))| \leq C(t-\tau)^{-\frac{6+\alpha_1}{2}} \exp\{-c\rho(t, x; \tau, \xi)\}, \tag{12}$$

$$|\varphi'_{x_2}(t, \gamma; \tau, \xi, y(t,\tau))| \leq C_1(t-\tau)^{-\frac{9+\alpha_1}{2}} \exp\{-c\rho(t, x; \tau, \xi)\}, \tag{13}$$

$$|\Delta_{h_1} \varphi(t, \gamma; \tau, \xi, y(t,\tau))| \leq C_k(t-\tau)^{-\frac{6+\alpha'_1}{2}} |h_1|^{\alpha''_1} \max[\exp\{-c\rho(t, x^*; \tau, \xi)\},$$
$$\exp\{-c\rho(t, x; \tau, \xi)\}], \quad \alpha'_1 < \alpha_1, \quad \alpha''_1 = \alpha_1 - \alpha'_1. \tag{14}$$

Эти априорные ограничения будут доказаны потом. Применяя оператор $\partial_t - x_1 \partial_{x_2} - \sum_{k=1}^{2} a_k(t, x, y(t,\tau)) \partial_{x_1}^k$ к $Z_0(t, x; \tau, \xi, y(t,\tau))$, определенной формулой (11), и используя априорные оценки и предположения, получим относительно $\varphi(t, x; \tau, \xi, y(t,\tau))$ интегральное уравнение

$$\varphi(t, x; \tau, \xi, y(t,\tau)) = K(t, x; \tau, \xi, y(t,\tau)) +$$
$$\int_\tau^t d\beta \int_{R^2} K(t, x; \beta, \gamma, y(t,\beta)) \varphi(\beta, \gamma; \tau, \xi, y(\beta,\tau)) d\gamma, \tag{15}$$

где

$$K(t,x;\tau,\xi,y(\beta,\tau)) = \{\sum_{k=1}^{2}[a_k(t,x;y(t,\tau)) - a_k(t,\xi_1;y(t,\tau))]\}\partial_{x_1}^k \times \mathcal{E}_0(t,x;\tau,\xi,\xi_1,y(t,\tau)).$$

В силу оценок для производных $\mathcal{E}_0(t,x;\tau,\xi,\xi_1,y(t,\tau))$ (див. [1, 2])

$$|\partial_{x_1}^k\partial_{x_2}^l\mathcal{E}_0(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C_{kl}(t-\tau)^{-\frac{4+k+3l}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \tag{16}$$

при $t>\tau$, $\{x,\xi\}\in R^2$.

Оценим $K(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))$:

$$|K(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le |\sum_{k=1}^{2}[a_k(t,x_1;y(t,\tau)) - a_k(t,\xi_1;y(t,\tau))]\times$$

$$\partial_{x_1}^k\mathcal{E}_0(t,x;\tau,\xi,\xi_1,y(t,\tau))| \le A(t-\tau)^{-\frac{6-\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho)\}. \tag{17}$$

Будем искать $\varphi(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))$ в виде:

$$\varphi(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)) = \sum_{m=1}^{\infty}K_m(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)), \tag{18}$$

$$K(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)) \equiv K_1(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)),$$

$$K_m(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)) = \int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int_{R^2}K_1(t,x;\beta\gamma;y(t,\beta))K_{m-1}(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(\beta,\tau))d\gamma.$$

Оценим члены ряда (18)

$$|K_2(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le A^2\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{2-\alpha_1}{2}}}\int\limits_{R^2}\exp\{-c\rho(t,x;\beta,\gamma)\}(t-\beta)^{-2}$$

$$\exp\{-c\rho(\beta,\gamma;\tau,\xi)\}(\beta-\tau)^{-2}d\gamma = A^2B(\frac{\alpha_1}{2},\frac{\alpha_1}{2})(\frac{\pi}{C})(t-\tau)^{\frac{2\alpha_1-6}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}$$

(последние интегралы легко вычисляются).

Оценка $K_3(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$, $K_4(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ и т.д. проводится совершенно так же; при этом с помощью индукции легко доказать то, что для любого m

$$|K_m(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le \frac{\Gamma^m(\frac{\alpha_1}{2})}{\Gamma(\frac{m\alpha_1}{2})}A^m(\frac{\pi}{C})^{m-1}(t-\tau)^{\frac{m\alpha_1-6}{2}}\exp\{-c\rho\}. \tag{19}$$

Из оценок (19) вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда (18) при $t-\tau\ge\varepsilon>0$ и справедливость оценки (12).

Так, как

$$|\partial_{x_2}K(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{9-\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\} \tag{20}$$

и

$$-\partial_{x_2}K(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))=\partial_{\xi_2}K(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau)),\partial_{x_2}K_2(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))=$$

$$\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}d\beta\int\limits_{R^2}\partial_{x_2}K(t,x;\beta,\gamma,y(t,\beta))K(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))d\gamma+$$

$$\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}d\beta\int\limits_{R^2}K(t,x;\beta,\gamma,y(t,\beta))\partial_{\gamma_2}K(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))d\gamma,$$

$$|\partial_{x_2}K_2(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))|=|\partial_{\xi_2}K_2(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))|\leq C_1^2(t-\tau)^{-\frac{9-2\alpha_1}{2}}\times$$

$$\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}B(\frac{\alpha_1}{2};\frac{\alpha_1}{2})(\frac{\pi}{C}), \tag{21}$$

то по индукции для любого m получим

$$|\partial_{x_2}K_m(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))|\leq C_1^m(t-\tau)^{\frac{m\alpha_1-9}{2}}\exp\{-c\rho\}\frac{\Gamma^m(\frac{\alpha_1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha_1}{2})}(\frac{\pi}{C})^{m-1}. \tag{22}$$

В силу оценок (20)–(22) ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\partial_{x_2}K_m(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ сходится равномерно и абсолютно при $t-\tau\geq\varepsilon>0$, поэтому $\varphi'_{x_2}(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\partial_{x_2}K_m(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ непрерывна по t,x, при $t-\tau\geq\varepsilon>0$ справедлива оценка (13).

Оценка (14) доказывается, как в параболическом случае [3, с. 30-31]. Поскольку

$$\partial_{x_2}W=\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}d\beta\int\limits_{R^2}\partial_{x_2}\mathcal{E}_0(t,x;\beta,\gamma,\gamma_1,y(t,\beta))\varphi(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))d\gamma+$$

$$\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}d\beta\int\limits_{R^2}\mathcal{E}_0(t,x;\beta,\gamma,y(t,\beta))\varphi'_{\gamma_2}(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))d\gamma,$$

то $|\partial_{x_2}W|\leq C_1(t-\tau)^{-\frac{9-\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}$.

Заметим, что существование $\partial^2_{x_1}W$, $\partial_{x_1}W$, ∂_tW доказывается аналогично, как в параболическом случае [3, с. 30-31], отсюда имеем

$$|\partial^k_{x_2}Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))|\leq C_k(t-\tau)^{-\frac{4+k}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \tag{23}$$

Следует отметить, что старшые производные $Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ удовлетворяют условию Гельдера по x_1.

Теперь выберем в качестве вспомогательной систему (10). Ф.м.р. системы (1) будем искать в виде

$$\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)=Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau))+\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{R^2}Z_0(t,x;\beta,\gamma,\gamma(t,\beta))\times$$

$$\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma = Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau)) + V. \tag{24}$$

Подберем матрицу $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ так, чтобы $\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)$, как функция t и x, была при $t>\tau$ решением системы (1). При этом будем предполагать, что $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ при $t>\tau$ являяться непрерывной функцией своих аргументов, и для нее справедливы оценки

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{6-3\alpha_2}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \tag{25}$$

$$|\Delta_{h_2}\Phi(t,x;\tau,\xi)| \le C|h_2|^{\alpha_2'}(t-\tau)^{-\frac{6-3\alpha_2''}{2}} \max[\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\},$$
$$\exp\{-c\rho(t,x^{**};\tau,\xi)\}],\quad \alpha_2'<\alpha_2,\quad \alpha_2''=\alpha_2-\alpha_2'. \tag{26}$$

Эти априорные оценки будут доказаны потом. Применим оператор $\partial_t - x_1\partial_{x_2} - \sum\limits_{k=0}^{2} a_k(t,x)\partial_{x_1}^k$ к $\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)$, определенной формулой (24), используя априорные предположения и оценки (23), получим относительно $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ интегральное уравнение

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{R^2} K(t,x;\beta,\gamma,)\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma,$$

где

$$K(t,x;\tau,\xi) = \sum_{k=1}^{2}[a_k(t,x) - a_k(t,x_1;\xi(t,\tau))]\partial_{x_1}^k Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau)) +$$
$$a_0(t,x)Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau)).$$

В силу оценок (23) и сделаных предложений

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{6-3\alpha_2}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \tag{27}$$

$$\Phi(t,\gamma;\tau,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,\gamma;\tau,\xi), \tag{28}$$

$$K_1(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi),$$

$$K_m(t,\gamma;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^2} K_1(t,x;\beta\gamma)K_{m-1}(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma.$$

Оценим члены ряда (28). Поскольку

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le A_1^2 \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^2} [(t-\beta)(\beta-\tau)]^{-\frac{2-3\alpha_2}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\beta,\gamma)\}\times$$

$$(t-\beta)^{-2}\exp\{-c\rho(\beta,\gamma;\tau,\xi)\}(\beta-\tau)^{-2}d\gamma \le A_1^2 B(\frac{3\alpha_2}{2},\frac{3\alpha_2}{2})\times$$
$$(\frac{\pi}{C})(t-\tau)^{-\frac{6-6\alpha_2}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, t>\tau, \tag{29}$$

то, как и в предыдущем случае, по индукции найдем

$$|K_m(t,x;\tau,\xi)| \le \frac{A_1^m \Gamma^m(\frac{3\alpha_2}{2})}{\Gamma(\frac{3m\alpha_2}{2})}(t-\tau)^{\frac{3m\alpha_2-6}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \qquad (30)$$

Из оценок (30) вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда (28) при $t-\tau \ge \varepsilon > 0$ и справедливость для $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ априорной оценки (25).

Установим справедливость неравенства (26). При $(t-\tau)^{3/2} < |x_2 - x_2^{**}| = |h_2|$ оно следует из (25). Поэтому рассмотрим случай $|x_2 - x_2^{**}| \le (t-\tau)^{3/2}$.

$$|\Delta_{h_2} K(t,x;\tau,\xi)| \le \sum_{k=1}^{2} |\Delta_{h_2} a_k(t,x)||\partial_{x_1}^k Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| + \sum_{k=1}^{2} |a_k(t,x)-$$

$$a_k(t,x_1,\xi(t,\tau))||\Delta_{h_2}\partial_{x_1}^k Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau))| + |a_0(t,x)||\Delta_{h_2} Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau)|+$$

$$|\Delta_{h_2} a_0(t,x)||Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau)| \le M[|h_2|^{\alpha_2}(t-\tau)^{-3} + |x_2 - \xi_2 +$$

$$\xi_1(t-\tau)|^{\alpha_2}|h_2|(t-\tau)^{-9/2} + |h_2|(t-\tau)^{-7/2} + |h_2|^{\alpha_2}(t-\tau)^{-3}]\times$$

$$\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\} \le |h_2|^{\alpha_2''}(t-\tau)^{-(6-3\alpha_2'')/2} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \qquad (31)$$

При проведении последних оценок члены вида $\Delta_{h_2}\partial_{x_1}^2 Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau))$ представлялись по теореме о среднем, а затем оценивались. Все время использовалось элементарное неравенство; при $|x_2 - x_2'| \le (t-\tau)^{3/2}$ и $-1 \le \theta \le 1$, $-1 + \frac{|x_2-\xi_2+(x_1+\xi_1)(2(t-\tau))^{-1}|}{(t-\tau)^{3/2}} \le |\frac{x_2-\xi_2+(x_1+\xi_1)(2(t-\tau))^{-1}}{(t-\tau)^{3/2}} + \theta\frac{x_2-x_2'}{(t-\tau)^{3/2}}| \le \frac{|x_2-\xi_2+(x_1+\xi_1)(2(t-\tau))^{-1}|}{(t-\tau)^{3/2}} + 1$.

С помощью оценок (25), (31) оценим $\Delta_{h_2}\Phi(t,x;\tau,\xi)$:

$$\Delta_{h_2}\Phi(t,x;\tau,\xi) = \Delta_{h_2}K(t,x;\tau,\xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{R^2} \Delta_{h_2}K(t,x;\beta,\gamma)\Phi(t,x;\tau,\xi)d\gamma.$$

Оценим второе слагаемое:

$$\int_\tau^t d\beta \int_{R^2} |\Delta_{h_2}K(t,x;\beta,\gamma)||\Phi(t,x;\tau,\xi)|d\gamma = \int_\tau^{t-|h_2|^{2/3}} + \int_{t-|h_2|^{2/3}}^t = I_1 + I_2,$$

в интеграле I_1 $\tau \le \beta \le t - |h_2|^{2/3}$, т.е. $t - \beta \ge |h_2|^{2/3}$, поэтому, применив оценку (31), получим

$$I_1 \le C(t-\tau)^{\frac{3(\alpha_2+\alpha_2')}{2}}|h_2|^{\alpha_2'} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \qquad (32)$$

Оценим I_2:

$$\int_{\tau-|h_2|^{2/3}}^t d\beta \int_{R^2} |K(t,x;\beta,\gamma)||\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)|d\gamma + \int_{\tau-|h_2|^{2/3}}^t d\beta \int_{R^2} |K(t,x^{**};\beta,\gamma)| \times |\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)|d\gamma,$$

используя оценки (25), (27), получим

$$I_1 \le C(t-\tau)^{\frac{3\alpha_2-6}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\} \int\limits_{\tau-|h_2|^{2/3}}^{t} (t-\beta)^{\frac{3\alpha_2-1}{2}} d\beta \le$$

$$C(t-\tau)^{\frac{3\alpha_2-6}{2}} |h_2|^{\alpha_2} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \tag{33}$$

Из неравенств (32), (33) получаем (26). Аналогично установим:

$$|\Delta_{h_1}\Phi(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{\frac{\alpha_1''-6}{2}} |h_1|^{\alpha_1} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \tag{34}$$

Матрица $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ при $t>\tau$ непрерывна по своим аргументам, удовлетворяет оценкам (25), (26), поэтому приведенные выше построения закончены. Так, как

$$\partial_{x_1}V(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{R^2} \partial_{x_1}Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma,$$

$$\partial^2_{x_1}V(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\beta \int\limits_{R^2} \partial^2_{x_1}Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma+$$

$$\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\beta \int\limits_{R^2} \partial^2_{x_1}Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))[\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)-\Phi(\beta,x_1;x(t,\beta);\tau,\xi)]d\gamma+$$

$$\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} \Phi(\beta,x_1;x(t,\beta);\tau,\xi)d\beta\partial^2_{x_1}\int\limits_{R^2} Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))d\gamma. \tag{35}$$

то

$$\partial_{x_2}V(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\beta \int\limits_{R^2} \partial_{x_2}Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma+$$

$$\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\beta \int\limits_{R^2} \partial_{x_2}Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))[\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)-\Phi(\beta,\gamma_1;x(t,\beta);\tau,\xi)]d\gamma+$$

$$\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\beta \int\limits_{R^1} (\partial_{x_2}\int\limits_{R^1} Z_0(t,x;\tau,\gamma;\gamma(t,\beta))d\gamma_2)\Phi(\beta,\gamma_1;x(t,\beta);\tau,\xi)d\gamma_1. \tag{36}$$

При доказательстве последней формулы используем, что

$$|\partial_{x_2}Z_0(t,x;\tau,\xi,y_2-y_1(t-\tau)) - \partial_{x_2}Z_0(t,x;\tau,\xi,y_2'-y_1(t-\tau))| \le$$

$$C|y_2-y_2'|^{\alpha_2}(t-\tau)^{-7/2}\exp\{-c\rho\},$$

$$\int\limits_{R^1} \partial_{x_2} Z_0(t,x;\beta,\gamma;y(t,\beta))|_{y_2=x_2-x_1(t-\beta)} d\gamma_2 = 0,$$

$$\partial_{x_2} \int\limits_{R^1} Z_0(t,x;\beta,\gamma;y(t,\beta))d\gamma_2 = \int\limits_{R^1} [\partial_{x_2} Z_0(t,x;\beta,\gamma;y(t,\beta)) - \partial_{x_2} Z_0(t,x;\beta,\gamma;y(t,\beta))|_{y_2=x_2-x_1(t-\beta)}] d\gamma_2.$$

Из оценок матрицы Грина $Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi(t,\beta))$ и формул (35), (36) получим оценки для $\partial_{x_2} V$, $\partial_{x_1}^k V$, $0 \le k \le 2$, которые показывают, что главной частью матрицы $\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)$ по порядку особенности является $Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi(t,\beta))$.

Отметим, что аналогично можно построить ф.м.р. сопряженной системы к (1) [3, с. 91]. Используя формулу Грина-Остроградского, получим ряд свойств ф.м.р. системы (1), в частности, формулу свертки и свойство нормальности.

Список литературы

1. Малицька Г.П. *Системи рівнянь типу Колмогорова* // Укр. мат. журн.–2009.– Т.12, №3.–С.1650–1563.
2. Малицька Г.П. *Про системи рівнянь типу Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від часової змінної* // Деп. в ДНТБ України. – 2007. – №102, 0.9 др. арк. РЖДНР 2007, №1–2.
3. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964.– 443с.

Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника,
Ивано-Франковск, Украина

Поступило 26.10.2010

Malytska H.P., Burtnyak I.V. *Method of parametris for the ultraparabolic systems*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 74–82.

We consider systems of ultraparabolic equations which generated equation of diffusion with inertia. Using the modified method Levy, we constructed the fundamental matrix of solutions of this system of Kolmogorov equations of second order, and got estimations of derivatives, included in the system.

Малицька Г.П., Буртняк І.В. *Метод параметриксу для ультрапараболічних систем* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 74–82.

Тут розглянуто системи ультрапараболічних рівнянь, які узагальнюють рівняння дифузії з інерцією. Використовуючи модифікований метод Леві, ми побудували фундаментальну матрицю розв'язків системи рівнянь Колмогорова другого порядку, одержано оцінки похідних, що входять в систему.