Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.95+511.42

Савка І.Я.

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ІЗ ЗАЛЕЖНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В УМОВАХ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

Савка І.Я. *Нелокальна задача із залежними коефіцієнтами в умовах для рівняння другого порядку за часовою змінною* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 101–110.

У декартовому добутку часового відрізка та просторового багатовимірного тора досліджено нелокальну двоточкову задачу із залежними коефіцієнтами в умовах для безтипного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, які розташовані на деякій гладкій кривій. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі. Доведено метричну теорему про оцінку знизу малих знаменників на гладкій кривій.

Вступ. Основні позначення

Нелокальні задачі для рівнянь із частинними похідними, в загальному, є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемами малих знаменників і є нестійкою стосовно як завгодно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області (див. [4]). Коректна розв'язність таких задач встановлена для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів рівняння і нелокальних умов. При цьому вважалось, що коефіцієнти задачі *незалежно* змінюються в наперед заданій області.

Для залежних коефіцієнтів ці результати не можна використати безпосередньо, тому у запропонованій роботі на основі метричного підходу розроблено нову методику дослідження нелокальної двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними (без обмежень на тип) другого порядку за часовою змінною t у випадку, коли коефіцієнти нелокальних умов є *залежними*. Основні результати роботи анонсовано в [3].

Надалі використовуємо такі позначення: $x \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$, $\widetilde{k} = \big(1 + (k,k)\big)^{1/2}$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $\partial_t^n = \frac{\partial^n}{\partial t^n}$, $\partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1} \ldots \partial_{x_p}^{s_p}$, $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор, $\mathcal{D} = [0,T] \times \Omega_p$, $T > 0$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 11K60.

Ключові слова і фрази: диференціальні рівняння, нелокальні задачі, малі знаменники, діофантові наближення, залежні коефіцієнти, гладка крива, метрична оцінка.

Введемо простори функцій: $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір Соболєва отриманих поповненням простору тригонометричних многочленів $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_q}$, яка породжується скалярним добутком $\big(\varphi, \psi\big)_{\mathbf{H}_q} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q}\varphi_k\bar{\psi}_k$; $\mathbf{H}^n_{N,q} = \mathbf{H}^n_{N,q}(\mathcal{D})$, $q \in \mathbb{R}$, $\{n, N\} \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u = u(t, x)$, таких що $\forall\, t \in [0, T]$ функції $\partial_t^j u(t,\cdot)$ належать простору $\mathbf{H}_{q-jN}$ для $j = 0, 1, \dots, n$ та неперервні на відрізку $[0, T]$ у цьому просторі; норма в $\mathbf{H}^n_{N,q}$ визначається формулою

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^n_{N,q}} = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \|\partial_t^j u(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{H}_{q-jN}}.$$

1 Постановка задачі. Побудова формального розв'язку

В області $\mathcal{D}$ змінних (t, x) розглянемо задачу

$$L(\partial_t, -i\partial_x)u \equiv \partial_t^2 u + A_1(-i\partial_x)\partial_t u + A_2(-i\partial_x)u = 0, \tag{1}$$

$$L_1 u \equiv u|_{t=0} - \mu_1(\tau)u|_{t=T} = \varphi_1, \qquad L_2 u \equiv \partial_t u|_{t=0} - \mu_2(\tau)\partial_t u|_{t=T} = \varphi_2, \tag{2}$$

де

$$A_1(\eta) = \sum_{|s|\le N_1} a_{1,s}\eta^s, \quad A_2(\eta) = \sum_{|s|\le 2N_2} a_{2,s}\eta^s, \quad \{a_{1,s}, a_{2,s}\} \in \mathbb{C}, \{N_1, 2N_2\} \in \mathbb{Z}_+,$$

є многочленами степенів N_1 і $2N_2$ відповідно, $\{\mu_1, \mu_2\} \in C^4(I;\mathbb{R})$, I — відрізок, τ — параметр параметризації, $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ та $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ — задані функції, $u = u(t, x)$ — шуканий розв'язок.

Зведений порядок N рівняння (1) визначається формулою $N = \max\{N_1, N_2\}$. Число N фігурує у просторах $\mathbf{H}^2_{N,q}$ та в означенні розв'язку задачі (1), (2).

Означення 1.1. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *розуміємо функцію* $u \in \boldsymbol{H}^2_{N,q}$, *що задовольняє умови* $\|L(\partial_t, \partial_x)u\|_{\boldsymbol{H}^0_{N,q-2N}} = 0$, $\|L_1 u - \varphi_1\|_{\boldsymbol{H}_q} = 0$, $\|L_2 u - \varphi_2\|_{\boldsymbol{H}_{q-N}} = 0$.

Із означення 1.1 випливає, що $\varphi_1 \in \mathbf{H}_q$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{q-N}$ є необхідною умовою розв'язності задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}^2_{N,q}$.

Вектор-коефіцієнтів $\mu = \big(\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)\big)_{\tau\in I}$ описує відрізок гладкої плоскої кривої K і параметризується відрізком I.

Для частинних випадків векторів $\mu = \big(\mu_1(\tau), \dots, \mu_n(\tau)\big)$, $n \ge 2$, задача типу (1), (2) досліджувалась у роботах [1, 2, 4]. Зокрема, в монографії [4] встановлено коректність задачі для рівняння n-го порядку (за t) з нелокальними умовами вигляду

$$\partial_t^{i-1}u|_{t=0} - \mu_i(\tau)\partial_t^{i-1}u|_{t=T} = \varphi_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

для майже всіх векторів $(\tau, \vec{a})$ у випадку $\mu_i(\tau) = \tau$, де $\tau \in \mathbb{C}$, $\vec{a}$ — вектор, складений із певних коефіцієнтів диференціального рівняння, а в роботі [2] встановлено коректність задачі для анізотропного (за x) рівняння n-го порядку за змінною t з умовами (3) для майже всіх векторів (τ, T) у випадку $\mu_i(\tau) = \frac{\alpha_i-\tau}{\beta_i+\tau}$, де $\tau \in \mathbb{R}$, $\{\alpha_i, \beta_i\} \in \mathbb{C}$. Розв'язність задачі у випадку незалежних коефіцієнтів $\mu_i(\tau) \equiv \tau_i$, $\tau_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, встановлено в [1] для майже всіх векторів $\left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{\operatorname{Re} \tau_1}, \ldots, \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \tau_n}{\operatorname{Re} \tau_n}, T, \vec{a}\right)$.

Метою даної роботи є встановлення умов розв'язності задачі (1), (2) у випадку довільної гладкої кривої K на площині $\mathbb{R}^2$. При цьому використано метричний підхід і сформульовано умови розв'язності задачі для майже всіх параметрів $\tau \in I$, тобто для майже всіх точок гладкої кривої K.

Розв'язок u задачі (1), (2) має вигляд ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{(ik,x)}, \tag{4}$$

де $u_k(t)$ — двічі неперервно диференційовні функції на $[0,T]$, а праві частини φ_1 та φ_2 нелокальних умов (2) — рядів $\varphi_1(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{1k} e^{(ik,x)}$, $\varphi_2(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{2k} e^{(ik,x)}$.

Із означення (1.1) отримаємо для кожної з функцій $u_k(t)$, де $k \in \mathbb{Z}^p$, таку задачу:

$$L\big(d/dt, k\big) u_k \equiv u_k''(t) + A_1(k) u_k'(t) + A_2(k) u_k(t) = 0, \tag{5}$$

$$L_1 u_k \equiv u_k(0) - \mu_1(\tau) u_k(T) = \varphi_{1k}, \qquad L_2 u_k \equiv u_k'(0) - \mu_2(\tau) u_k'(T) = \varphi_{2k}. \tag{6}$$

Розглянемо характеристичний многочлен

$$L(\lambda, k) \equiv \lambda^2 + A_1(k)\lambda + A_0(k) = \big(\lambda - \lambda_{1k}\big)\big(\lambda - \lambda_{2k}\big) \tag{7}$$

для диференціального рівняння (5). Якщо $D(k)$ — дискримінант многочлена $L(\lambda,k)$, то $D(k) = \big[A_1(k)\big]^2 - 4A_0(k)$ і $\lambda_{1k} = \dfrac{-A_1(k) - \sqrt{D(k)}}{2}$, $\lambda_{2k} = \dfrac{-A_1(k) + \sqrt{D(k)}}{2}$.

Згідно з [6] для коренів λ_{1k} і λ_{2k} справедливими є оцінки

$$|\lambda_{1k}| \le C_1 \tilde{k}^N, \quad |\lambda_{2k}| \le C_1 \tilde{k}^N, \qquad C_1 = C_1(a_{j,s}). \tag{8}$$

Для побудови розв'язку рівняння (5) введемо множини $\mathcal{K}_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : D(k) = 0\}$, $\mathcal{K}_2 = \mathbb{Z}^p \backslash \mathcal{K}_1$. Якщо $k \in \mathcal{K}_1$, то $\lambda_{1k} = \lambda_{2k}$ і загальний розв'язок задачі (5), (6) визначається формулою

$$u_k(t) = \big(c_{1k} + c_{2k} t\big) e^{\lambda_{1k} t},$$

де коефіцієнти c_{1k}, c_{2k} задовольняють систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \big(1 - \mu_1(\tau) e^{\lambda_{1k} T}\big) c_{1k} - \mu_1(\tau) T e^{\lambda_{1k} T} c_{2k} = \varphi_{1k}, \\ \lambda_{1k}\big(1 - \mu_2(\tau) e^{\lambda_{1k} T}\big) c_{1k} + \big(1 - \mu_2(\tau) e^{\lambda_{1k} T}(1 + \lambda_{1k} T)\big) c_{2k} = \varphi_{2k}, \end{cases}$$

визначник $\Delta_k(\tau)$ якої задається рівністю

$$\Delta_k(\tau) = \big(1 - \mu_1(\tau) e^{\lambda_{1k} T}\big)\big(1 - \mu_2(\tau) e^{\lambda_{1k} T}\big) + T\big(\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)\big) \lambda_{1k} e^{\lambda_{1k} T}.$$

Якщо ж $k \in \mathcal{K}_2$, то розв'язок задачі (5), (6) визначається формулою

$$u_k(t) = c_{1k} e^{\lambda_{1k} t} + c_{2k} e^{\lambda_{2k} t},$$

де коефіцієнти c_{1k}, c_{2k} також задовольняють систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \big(1 - \mu_1(\tau) e^{\lambda_{1k} T}\big) c_{1k} + \big(1 - \mu_1(\tau) e^{\lambda_{2k} T}\big) c_{2k} = \varphi_{1k}, \\ \lambda_{1k}\big(1 - \mu_2(\tau) e^{\lambda_{1k} T}\big) c_{1k} + \lambda_{2k}\big(1 - \mu_2(\tau) e^{\lambda_{2k} T}\big) c_{2k} = \varphi_{2k}. \end{cases}$$

Визначник цієї системи має вигляд

$$\begin{aligned}\Delta_k(\tau) =&\mu_1(\tau)\big(\lambda_{1k}e^{\lambda_{2k}T}-\lambda_{2k}e^{\lambda_{1k}T}\big)+\mu_2(\tau)\big(\lambda_{1k}e^{\lambda_{1k}T}-\lambda_{2k}e^{\lambda_{2k}T}\big)\\ &+(\lambda_{2k}-\lambda_{1k})\big(1+\mu_1(\tau)\mu_2(\tau)e^{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T}\big).\end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно, що задача (5), (6) має єдиний розв'язок лише для тих τ, що є розв'язками нерівності $|\Delta_k(\tau)|>0$.

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (1), (2) *у просторі* $\boldsymbol{H}^2_{N,q}$ *єдиний для тих і лише для тих* τ, *які задовольняють умову*

$$|\Delta_k(\tau)|>0, \qquad \big(\forall\, k\in\mathbb{Z}^p\big). \tag{10}$$

Зауважимо, що $\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}|\Delta_k(\tau)|>0$ є достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2).

Нехай τ задовольняє умову (10), тоді існує розв'язок $u_k(t)$ задачі (5), (6) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ і визначається формулами

$$\begin{aligned}u_k(t) =&\frac{\big(1-\mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}(1+\lambda_{1k}T)\big)e^{\lambda_{1k}t}-\lambda_{1k}\big(1-\mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}\big)te^{\lambda_{1k}t}}{\Delta_k(\tau)}\varphi_{1k}\\ &+\frac{te^{\lambda_{1k}t}+(T-t)\mu_1(\tau)e^{\lambda_{1k}(T+t)}}{\Delta_k(\tau)}\varphi_{2k}, \qquad k\in\mathcal{K}_1,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}u_k(t) =&\frac{\lambda_{2k}e^{\lambda_{1k}t}-\lambda_{1k}e^{\lambda_{2k}t}+\mu_2(\tau)\big(\lambda_{1k}e^{\lambda_{1k}T+\lambda_{2k}t}-\lambda_{2k}e^{\lambda_{1k}t+\lambda_{2k}T}\big)}{\Delta_k(\tau)}\varphi_{1k}\\ &+\frac{e^{\lambda_{2k}t}-e^{\lambda_{1k}t}+\mu_1(\tau)\big(e^{\lambda_{1k}t+\lambda_{2k}T}-e^{\lambda_{1k}T+\lambda_{2k}t}\big)}{\Delta_k(\tau)}\varphi_{2k}, \qquad k\in\mathcal{K}_2,\end{aligned} \tag{12}$$

Таким чином, одержуємо формальне зображення розв'язку $u(t,x)$ задачі у вигляді ряду (4), де функції $u_k(t)$ визначаються формулами (11), (12).

2 Оцінки для функції $u_k(t)$ та її похідних

Для доведення належності розв'язку u до простору $\mathbf{H}^2_{N,q}$ достатньо оцінити зверху функції $u_k(t)$, $u_k'(t)$ та $u_k''(t)$.

Запровадимо функцію Ψ_k дійсної змінної τ, $\tau\in I$, за формулою

$$\Psi_k(\tau):=\begin{cases}\Delta_k(\tau), & k\in\mathcal{K}_1,\\ \dfrac{\Delta_k(\tau)}{\lambda_{2k}-\lambda_{1k}}, & k\in\mathcal{K}_2.\end{cases} \tag{13}$$

Якщо $k\in\mathcal{K}_1$, то із (8) та (11) отримаємо оцінку

$$\tilde{k}^{-jN}\left|u_k^{(j)}(t)\right|\le\frac{C_2\max\{1,e^{2\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}\}}{|\Psi_k(\tau)|}\Big(\tilde{k}^N|\varphi_{1k}|+|\varphi_{2k}|\Big), \quad j=0,1,2, \tag{14}$$

де $C_2=(2\max\{||\mu_1||_{C(I)},||\mu_2||_{C(I)}\}+1)(3+C_1T)C_1^2$.

Якщо $k\in\mathcal{K}_2$, то для $j=0,1,2$ маємо рівність

$$\begin{aligned}u_k^{(j)}(t)=&\left(\frac{\partial^{j+1}r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j}\Big|_{\xi=0}-\mu_2(\tau)\frac{\partial^{j+1}r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j}\Big|_{\xi=T}\right)\frac{\varphi_{1k}}{\Psi_k(\tau)}-\\ &\left(\frac{\partial^{j}r_k(t,\xi)}{\partial t^j}\Big|_{\xi=0}-\mu_1(\tau)\frac{\partial^{j}r_k(t,\xi)}{\partial t^j}\Big|_{\xi=T}\right)\frac{\varphi_{2k}}{\Psi_k(\tau)},\end{aligned} \tag{15}$$

де $r_k(t,\xi) := \dfrac{e^{\lambda_{1k}t+\lambda_{2k}\xi} - e^{\lambda_{1k}\xi+\lambda_{2k}t}}{\lambda_{2k}-\lambda_{1k}}$, $(t,\xi)\in[0,T]^2$.

Лема 2.1. *Для комплексних чисел λ_1 і λ_2, де $\lambda_1\neq\lambda_2$, справедлива нерівність*

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right| \le 2(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}+e^{\operatorname{Re}\lambda_2}). \tag{16}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\lambda=\lambda_1-\lambda_2>0$. Якщо $0<\lambda<1$, то із нерівності $1\le e^{\lambda}\le(e-1)\lambda+1$ випливає нерівність $\frac{e^{\lambda}-1}{e^{\lambda}+1}\le\frac{(e-1)\lambda}{2}\le\lambda$, що рівносильна нерівності

$$\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\le e^{\lambda_1}+e^{\lambda_2},\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \lambda_1\neq\lambda_2. \tag{17}$$

Якщо ж $\lambda\ge1$, то очевидно, що нерівність (17) виконується.

У випадку $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ запишемо квадрат лівої частини нерівності (16) у вигляді

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|^2=\frac{(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}-e^{\operatorname{Re}\lambda_2})^2+4e^{\operatorname{Re}\lambda_1}e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\sin^2\operatorname{Im}(\lambda_1-\lambda_2)/2}{\operatorname{Re}^2(\lambda_1-\lambda_2)+\operatorname{Im}^2(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Тоді із нерівностей (17) та $|\sin t|\le|t|$ отримаємо такі нерівності:

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|^2\le\left(\frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_1}-e^{\operatorname{Re}\lambda_2}}{\operatorname{Re}\lambda_1-\operatorname{Re}\lambda_2}\right)^2+\frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_1}e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\sin^2\operatorname{Im}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\operatorname{Im}^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}\le$$

$$(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}+e^{\operatorname{Re}\lambda_2})^2+e^{\operatorname{Re}\lambda_1}e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\le4(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}+e^{\operatorname{Re}\lambda_2})^2,\quad \operatorname{Re}\lambda_1\neq\operatorname{Re}\lambda_2,\quad \operatorname{Im}\lambda_1\neq\operatorname{Im}\lambda_2,$$

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|^2=\left(\frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_1}-e^{\operatorname{Re}\lambda_2}}{\operatorname{Re}\lambda_1-\operatorname{Re}\lambda_2}\right)^2\le\left(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}+e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\right)^2,\quad \operatorname{Re}\lambda_1\neq\operatorname{Re}\lambda_2,\quad \operatorname{Im}\lambda_1=\operatorname{Im}\lambda_2,$$

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|^2=\frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_1}e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\sin^2\operatorname{Im}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\operatorname{Im}^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}\le\left(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}+e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\right)^2,\operatorname{Re}\lambda_1=\operatorname{Re}\lambda_2,\quad \operatorname{Im}\lambda_1\neq\operatorname{Im}\lambda_2,$$

Із отриманих нерівностей випливає нерівність (16). Лему доведено. □

Лема 2.2. *Нехай $h_k(t,\xi):=e^{\operatorname{Re}\lambda_{1k}t+\operatorname{Re}\lambda_{2k}\xi}+e^{\operatorname{Re}\lambda_{1k}\xi+\operatorname{Re}\lambda_{2k}t}$, $(t,\xi)\in[0,T]^2$, тоді для функції $r_k(t,\xi)$ виконуються оцінки*

$$\left|\frac{\partial^j r_k(t,\xi)}{\partial t^j}\right|\le C_3\,\tilde{k}^{jN}h_k(t,\xi),\quad \left|\frac{\partial^{j+1}r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j}\right|\le C_3\tilde{k}^{(j+1)N}\,h_k(t,\xi),\quad j=0,1,2, \tag{18}$$

де $C_3=2(TC_1+1)(C_1+1)^2$.

Доведення. З леми 2.1 випливає, що $|r_k(t,\xi)|\le 2Th_k(t,\xi)$. Тоді на основі формул

$$\frac{\partial^j r_k(t,\xi)}{\partial t^j}=\lambda_{1k}^j r_k(t,\xi)+\frac{\lambda_{1k}^j-\lambda_{2k}^j}{\lambda_{1k}-\lambda_{2k}}e^{\lambda_{1k}\xi+\lambda_{2k}t},\quad j=0,1,2,$$

$$\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial\xi} = \lambda_{2k} r_k(t,\xi) + e^{\lambda_{1k}\xi+\lambda_{2k}t}, \quad \frac{\partial^{j+1} r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j} = \lambda_{1k}\lambda_{2k}\frac{\partial^{j-1} r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^{j-1}}, \quad j=1,2,$$

із нерівностей (8) отримаємо оцінки

$$\left|\frac{\partial^j r_k(t,\xi)}{\partial t^j}\right| \le (2TC_1+j)C_1^{j-1}\tilde{k}^{jN}h_k(t,\xi),\ j=0,1,2,3, \quad \left|\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial\xi}\right| \le (2TC_1+1)\tilde{k}^N h_k(t,\xi),$$

$$\left|\frac{\partial^{j+1} r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j}\right| \le (2TC_1+j-1)C_1^j\tilde{k}^{(j+1)N}h_k(t,\xi), \quad j=1,2,3,$$

з яких випливають нерівності (18). Лему доведено. □

З формули (15) і леми 2.2 при $k\in\mathcal{K}_2$ випливають оцінки

$$\tilde{k}^{-jN}\left|u_k^j(t)\right| \le C_4\frac{h_k(t,0)+h_k(t,T)}{|\Psi_k(\tau)|}\big(\tilde{k}^N|\varphi_{1k}|+|\varphi_{2k}|\big), \quad j=0,1,2, \tag{19}$$

де $C_4 = C_3\max\{1, ||\mu_1||_{C(I)}, ||\mu_2||_{C(I)}\}$.

Функції $|\Psi_k(\tau)|$ у нерівностях (14) і (19), які є відмінними від нуля для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ (за припущенням), можуть набувати як завгодно малих значень при $\tilde{k}\to\infty$, тому вони впливають на збіжність ряду, який визначає норму розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}^2_{N,q}$. Отже, існування розв'язку задачі пов'язане з проблемою малих знаменників. Для вирішення цієї проблеми застосовується метричний підхід, який дозволяє встановити такі оцінки знизу для малих знаменників:

$$|\Psi_k(\tau)| \ge \tilde{k}^{-\delta}\max\{1, e^{2\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}\}, \quad k\in\mathcal{K}_1, \qquad |\Psi_k(\tau)| \ge \tilde{k}^{-\delta}(h_k(t,0)+h_k(t,T)), \quad k\in\mathcal{K}_2,$$

де δ – деяке дійсне число. Ці оцінки виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) параметрів τ із I.

3 Оцінка знизу малих знаменників задачі

Для встановлення таких оцінок використано допоміжні теореми (теореми 2, 3) про оцінки мір виняткових множин.

Теорема 2. *Нехай функція $f\in C^{(n+1)}\big(I;\mathbb{C}\big)$ є такою, що $\min\limits_{\tau\in I}\max\limits_{0\le j\le n}|f^{(j)}(\tau)| \ge \delta > 0$. Тоді для довільного $\varepsilon\in(0,\delta/2)$ виконується оцінка*

$$\operatorname{meas}_{\mathbb{R}}\{\tau\in I : |f(\tau)|<\varepsilon\} \le 4\big(\sqrt{2}+1\big)\Big(\frac{M}{\delta}\operatorname{meas}_{\mathbb{R}} I + 1\Big)n\sqrt[n]{\varepsilon/\delta},$$

де $M = \max\limits_{1\le j\le n+1}||f^{(j)}||_{C(I)}$.

Твердження теореми випливає із теореми 2.5.4 роботи [5].

Теорема 3. *Нехай функція F має вигляд*

$$F(\tau, z) = f_1(\tau)z_1 + f_2(\tau)z_2 + \ldots + f_m(\tau)z_m, \quad \tau \in I, \;\; z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\},$$

де $f_i \in C^m\big(I; \mathbb{R}\big)$, $i = 1, \ldots, m$, I — відрізок прямої $\mathbb{R}$, z – фіксований векторний параметр. Якщо вронскіан $W[f](\tau)$ системи функцій $\{f_1, \ldots, f_m\}$ відмінний від нуля на I, тобто $\min\limits_{\tau \in I} |W[f](\tau)| > 0$, то для довільного $\varepsilon \in \big(0, \frac{m_1|z|}{2}\big)$ виконується оцінка

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\{\tau \in I : |F(\tau, z)| < \varepsilon\} \le C_5 \sqrt[m-1]{\varepsilon/|z|}, \tag{20}$$

де

$$C_5 = 4\big(\sqrt{2} + 1\big)\big(m_2 \,\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\, I/m_1 + 1\big)(m - 1)m_1^{\frac{1}{(1-m)}}, \quad |z| = |z_1| + \ldots + |z_m|.$$

$$m_1 = m_1(f) = \min_{\tau \in I} \big|W[f](\tau)\big| \Big(m \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1, j\ne i}^{m} \|f_j\|_{C^{(m-1)}(I)}\Big)^{-1}, \quad m_2 = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le m} ||f_i^{(j)}||_{C(I)},$$

Доведення. При фіксованому z застосуємо до функції $F(\tau, z)$ теорему 2. Покажемо, що $\delta = m_1|z|$. Для цього розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно вектора z

$$\begin{bmatrix} f_1(\tau) & f_2(\tau) & \ldots & f_m(\tau) \\ f_1'(\tau) & f_2'(\tau) & \ldots & f_m'(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(\tau) & f_2^{(m-1)}(\tau) & \ldots & f_m^{(m-1)}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\tau, z) \\ F'(\tau, z) \\ \vdots \\ F^{(m-1)}(\tau, z) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Визначником цієї системи є вронскіан $W[f](\tau)$, який за умовою теореми не перетворюється в нуль в жодній точці відрізка I. Тому дана система сумісна та має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера

$$z_i = \frac{W_i[f, F](t)}{W[f](\tau)}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

де $W_i[f, F](\tau)$ — вронскіан системи функцій $\{f_1, \ldots, f_{i-1}, F, f_{i+1}, \ldots, f_m\}$, іншими словами, $W_i[f, F](\tau)$ — це визначник, отриманий із вронскіана $W[f](\tau)$ шляхом заміни його i-го стовпця $\mathrm{col}(f_i, f_i', \ldots, f_i^{(m-1)})$ на стовпець правої частини системи (21).

Взявши модулі обидвох частин цих рівностей та просумувавши їх по $i = 1, \ldots, m$, одержимо тотожність

$$|z| = \sum_{i=1}^{m} |z_i| = \frac{1}{|W[f](t)|} \sum_{i=1}^{m} \big|W_i[f, F](\tau)\big|. \tag{22}$$

На підставі нерівності Адамара для матриці $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^m$, де $a_{ij} \in \mathbb{C}$, отримаємо нерівність $|\det \mathbf{A}| \le \prod\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$, з якої випливає оцінка

$$\big|W_i[f, F](\tau)\big| \le \sum_{j=0}^{m-1} |F^{(j)}(\tau, z)| \prod_{j=1, j\ne i}^{m} \|f_j\|_{C^{(m-1)}(I)}.$$

Тоді із тотожності (22) отримаємо нерівність

$$\max_{0\le j\le m-1}\left|F^{(j)}(\tau,z)\right| \ge \min_{\tau\in I}\left|W[f](\tau)\right|\Big(m\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1,j\ne i}^{m}\|f_j\|_{C^{(m-1)}}\Big)^{-1}|z| = m_1|z| = \delta.$$

Оскільки функція $F(\tau,z)$ задовольняє теорему 2 із значеннями $\delta = m_1|z|$ і

$$M = M(z) := \max_{1\le j\le m}||F^{(j)}(\cdot,z)||_{C(I)} \le m_2|z|, \qquad M/\delta \le m_2/m_1,$$

то для фіксованого параметра z та $\forall\,\varepsilon\in\Big(0,\frac{m_1|z|}{2}\Big)$ отримуємо шукану оцінку (20). $\square$

Теорема 4. *Нехай $\mu_1,\mu_2\in C^4(I)$, і нехай вронскіан системи функцій $\{1,\mu_1\mu_2,\mu_1,\mu_2\}$ відмінний від нуля на відрізку I, тобто $\big(\forall\,\tau\in I\big)$ $W[1,\mu_1\mu_2,\mu_1,\mu_2](\tau)\ne 0$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) τ із відрізка I, тобто для майже всіх (стосовно індукованої міри Лебега на* K*) точок кривої* K *нерівність*

$$|\Psi_k(\tau)| \ge \tilde{k}^{-\delta}\begin{cases} 1+e^{2\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}, & k\in\mathcal{K}_1,\\ 1+e^{\operatorname{Re}(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T}+|e^{\lambda_{1k}T}+e^{\lambda_{2k}T}|, & k\in\mathcal{K}_2,\end{cases} \tag{23}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\delta>3p$.

Доведення. Введемо множини $B_k=\{\tau\in I: |\Psi_k(\tau)|<\varepsilon_k\}$, $k\in\mathbb{Z}^p$, B — множина тих точок $\tau\in I$, для яких справджується оцінка $|\Psi_k(\tau)|<\varepsilon_k$ для безлічі $k\in\mathbb{Z}^p$, де

$$\varepsilon_k = \frac{m_1\tilde{k}^{-\delta}}{3}\times\begin{cases} 1+e^{2\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}, & k\in\mathcal{K}_1,\\ 1+e^{\operatorname{Re}(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T}+|e^{\lambda_{1k}T}+e^{\lambda_{2k}T}|, & k\in\mathcal{K}_2,\end{cases}$$

$$m_1 = m_1(1,\mu_1\mu_2,\mu_1,\mu_2).$$

Функцію $\Psi_k(\tau)$, яка визначається формулою (13), перепишемо у вигляді

$$\Psi_k(\tau) = 1+\mu_1(\tau)\mu_2(\tau)e^{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T} +$$

$$\begin{cases} \mu_1(\tau)e^{\lambda_{1k}T}(T\lambda_{1k}-1)-\mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}(T\lambda_{1k}+1), & k\in\mathcal{K}_1,\\ \mu_1(\tau)\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial t}\Big|_{(t,\xi)=(0,T)}-\mu_2(\tau)\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial\xi}\Big|_{(t,\xi)=(0,T)}, & k\in\mathcal{K}_2.\end{cases}$$

Функція $\Psi_k(\tau)$, як функція $F(\tau,z)$, задовольняє умови теореми 3, де $m=4$, $f_1(\tau)=1$, $f_2(\tau)=\mu_1(\tau)\mu_2(\tau)$, $f_3(\tau)=\mu_1(\tau)$, $f_4(\tau)=\mu_2(\tau)$,

$$(z_1,z_2,z_3,z_4) = \begin{cases} \Big(1,e^{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T},(T\lambda_{1k}-1)e^{\lambda_{1k}T},-(T\lambda_{1k}+1)e^{\lambda_{1k}T}\Big), & k\in\mathcal{K}_1,\\ \Big(1,e^{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T},\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial t}\Big|_{(t,\xi)=(0,T)},-\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial\xi}\Big|_{(t,\xi)=(0,T)}\Big), & k\in\mathcal{K}_2.\end{cases}$$

Оскільки виконуються нерівності

$$\varepsilon_k \le \frac{m_1\tilde{k}^{-\delta}}{2}\begin{cases} 1+e^{2\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}+e^{\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}(|T\lambda_{1k}-1|+|T\lambda_{1k}+1|), & k\in\mathcal{K}_1,\\ 1+e^{\operatorname{Re}(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T}+\Big(\Big|\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial t}\Big|+\Big|\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial\xi}\Big|\Big)\Big|_{(t,\xi)=(0,T)}, & k\in\mathcal{K}_2,\end{cases}$$

то при кожному $k \in \mathbb{Z}^p$ випливають оцінки для міри множини B_k

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\, B_k \le C_5 \tilde{k}^{-\delta/3}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\, B_k$ при $\delta > 3p$ мажорується збіжним рядом $C_5 \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{-\delta/3}$, то з леми Бореля-Кантеллі випливає, що міра Лебега множини точок із I, що потрапляють у нескінченну кількість множин B_k, дорівнює нулю, тобто $\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\, B = 0$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел τ із відрізка I нерівність (23) виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів k при $\delta > 3p$. $\square$

4 Існування розв'язку задачі

Із формули (13) та оцінки (23) випливає, що умова (10) виконується для майже всіх τ із I, тобто для майже всіх точок кривої K.

Теорема 5. *Нехай функції μ_1 та μ_2 задовольняють умови теореми 4. Тоді, якщо $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q+N+\delta}$ і $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{q+\delta}$, де $\delta > 3p$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел τ із відрізка I існує розв'язок u задачі* (1), (2) *із простору $\mathbf{H}^2_{N,q}$, який зображається рядом* (4) *і неперервно залежить від функцій φ_1, φ_2.*

Доведення. В умовах теореми існує константа $K_\tau > 0$, залежна від $\tau \in I$, така що для майже всіх $\tau \in I$ виконується нерівність (23) при $\tilde{k} > K_\tau$, причому $\min\limits_{\tau\in I, \tilde{k}\le K_\tau} |\Psi_k(\tau)| > 0$.

Тоді із нерівностей (14), (19) та нерівності

$$h_k(t,0) + h_k(t,T) \le 4\left(1 + e^{\mathrm{Re}(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T} + |e^{\lambda_{1k}T} + e^{\lambda_{2k}T}|\right)$$

отримаємо оцінки

$$\tilde{k}^{-2jN}\big|u_k^{(j)}(t)\big|^2 \le C_6\big(\tilde{k}^{2(N+\delta)}|\varphi_{1k}|^2 + \tilde{k}^{2\delta}|\varphi_{2k}|^2\big), \quad j = 0,1,2, \tag{24}$$

де $C_6 = 2\max^2\Big\{C_2, 4C_4, C_2 \cdot \max\limits_{\tau\in I,\tilde{k}<K_\tau}\big\{\frac{1+e^{\mathrm{Re}\,\lambda_{1k}T}}{|\Psi_k(\tau)|}\big\}, C_4 \cdot \max\limits_{\tau\in I, t\in[0,T],\tilde{k}<K_\tau}\big\{\frac{h_k(t,0)+h_k(t,T)}{|\Psi_k(\tau)|}\big\}\Big\}.$

Тоді із формули для норми в просторі $\mathbf{H}^n_{N,q}$ та нерівностей (24) отримуємо оцінку для квадрата норми розв'язку $\|u\|^2_{H^2_{N,q}} \le 3C_6(\|\varphi_1\|^2_{H_{q+N+\delta}} + \|\varphi_2\|^2_{H_{q+\delta}})$, що і треба було довести. $\square$

Дослідження підтримані ДФФД України (проект №28.1/010, проект №29.1/005).

Література

1. Бобик І.О. *Крайові задачі для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними*: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Львів. – 1994. – 130 с.

2. Власій О.Д. *Задача з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. — 52, № 1. — С. 34–42.

3. Ільків В.С., Савка І.Я. *Нелокальна двоточкова задача з векторним параметром на гладкій кривій* // Тринадцята міжнар. наук. конференція ім. акад. М.Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010), Матеріали конференції. – Т.1. – Київ, 2010. – С. 337.

4. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

5. Симотюк М.М. *Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними*: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. — Львів, 2005. – 193 с.

6. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри .– Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача,
Львів, Україна

Надійшло 17.11.2010

Savka I.Ya. *Nonlocal problem with dependent coefficients in conditions for the second-order equation in time variable*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 101–110.

In the Cartesian product of a time segment and a spatial multidimensional torus, we investigate nonlocal two-point problem with dependent coefficients on a smooth curve in conditions for typeless partial differential equation of the second order in time variable. Conditions for the one-valued solvability of the problem are established. Metric theorem on lower bound of small denominators on smooth curve are proved.

Савка И.Я. *Нелокальная задача с зависимыми коэффициентами в условиях для уравнения второго порядка по временной переменной* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 101–110.

В области, являющейся декартовым произведением часового отрезка и пространственного многомерного тора, исследована нелокальная двухточечная задача с зависимыми коэффициентами в условиях для безтипного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка по временной переменной переменной, которые расположены на некоторой гладкой кривой. Установлены условия однозначной разрешимости задачи. Доказано метрическую теорему об оценке снизу малых знаменателей на гладкой кривой.