Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.9(076)

Собкович Р.І., Казмерчук А.І.

# РОЗВ'ЯЗНІСТЬ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Собкович Р.І., Казмерчук А.І. *Розв'язність багатоточкових крайових задач з параметром для системи диференціальних рівнянь* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 116–122.

Розглянуто багатоточкові крайові задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь з параметром. Доведено теореми існування та єдиності.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}, \lambda) + A\lambda, \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ і параметр $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$ — вектори $m$-вимірного евклідового простору $E^m$, A — невироджена матриця, та поставимо задачу відшукання її розв'язків, які задовольняють умови

$$x(t_i) = x_i^0, \qquad i = 1, 2, \dots, n+1; \qquad 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \le h. \tag{2}$$

Оскільки кількість умов, які повинен задовольняти розв'язок, більша від порядку системи, то задача (1), (2), взагалі кажучи, розв'язків може не мати. Досягти виконання всіх умов (2) можна за рахунок вдалого вибору параметра $\lambda$, який у цьому випадку виступає у ролі керування. Фактично задача, яку ми досліджуємо, є різновидністю добре відомої із якісної теорії диференціальних рівнянь задачі Валле-Пуссена. На відміну від різних методів її дослідження, розглянутих авторами ряду статей (див., наприклад, [1, 3]), де задача (1), (2) розглядалася для рівнянь першого порядку, ми пропонуємо новий підхід, який ґрунтується на відшуканні розв'язків на множині функцій, що задовольняють умови (2). Його застосування дозволило сформулювати та довести нові теореми існування та єдиності розв'язків задачі (1), (2), обґрунтувати існування ширших, у порівнянні із наведеними у вказаних вище роботах, класів функцій, для яких досліджувана задача має розв'язок, а також отримати конструктивні алгоритми для їх відшукання.

Нехай функція $f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$ визначена та неперервна в області $D = [0; h] \times I_0 \times I_1 \times \dots \times I_n$, $I_s = [a_s; b_s]$, $s = 0, 1, \dots, n$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A34.

*Ключові слова і фрази:* система диференціальних рівнянь, $n$-точкова проблема.

**Означення.** *Пару* $\{x_*(t), \lambda_*\}$ *будемо називати розв'язком задачі (1),(2), якщо функція* $x_*(t)$ — $n$ *разів диференційовна на відрізку* $[0; h]$, $x_*(t) \in I_0$, $x_*^{(s)}(t) \in I_s$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$, $\lambda_* \in [a_n, b_n]$, *тотожно справджується рівність*

$$x_*^{(n)}(t) = f(t, x_*(t), x_*'(t), \ldots, x_*^{(n-1)}(t), \lambda_*) + A\lambda_*,$$

*а також виконуються умови* $x_*(t_i) = x_i^0$.

Користуючись методикою, запропонованою у роботі [2], побудуємо інтегральний оператор $L[f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}, \lambda)]$ таким чином, щоб всі розв'язки системи $x = L[f]$ (якщо вони існують) задовольняли умовам (2). Шукатимемо $L$ у вигляді

$$L[f] = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(t) \cdot \left( \int_{t_i}^{t} \beta_i(s) \cdot f(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s), \lambda) ds + x_i^0 \right), \qquad (3)$$

вимагаючи при цьому, щоб функції $\alpha_i(t)$ задовольняли умови

$$\alpha_i(t_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1. \qquad (4)$$

Диференціюючи рівність $x = L[f]$, отримуємо співвідношення

$$x' = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i'(t) \cdot \left( \int_{t_i}^{t} \beta_i(s) \cdot f(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(x), \lambda) ds + x_i^0 \right) +$$

$$f(s, x, x', \ldots, x^{(n-1)}, \lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i(t) \cdot \beta_i(t)).$$

Нехай функції $\alpha_i(t)$ та $\beta_i(t)$ задовольняють рівність

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) \cdot \beta_i(t) = 0. \qquad (5)$$

Продовжуючи процес диференціювання та накладаючи на функції $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ обмеження, тобто

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(s)}(t) \cdot \beta_i(t) = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (6)$$

на $n$-му кроці отримаємо рівняння

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(n)}(t) \cdot \left( \int_{t_i}^{t} \beta_i(s) \cdot f(s, \ldots) ds + x_i^0 \right) + f(s, x, x', \ldots, x^{(n-1)}, \lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n-1)}(t) \cdot \beta_i(t)).$$

Нехай виконуються умови

$$\alpha_i^{(n+1)}(t) = 0; \; i = 1, 2, \ldots, n+1; \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(n-1)}(t) \cdot \beta_i(t) = 1. \tag{8}$$

Для відшукання функцій $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ дістаємо систему рівнянь (4)–(8), розв'язуючи яку, знаходимо

$$\alpha_i(t) = \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)}, \qquad P_i(t) = \prod_{j=1; j\neq i}^{n+1} (t - t_j), \qquad \beta_i(t) = \frac{(t_i - t)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Таким чином,

$$L[f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \left( \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, x(s), x'(s), \dots, x^{(n-1)}(s), \lambda) ds + x_i^0 \right).$$

Зауважимо, що побудований таким чином оператор $L$ довільну неперервну на проміжку $[t_1; t_{n+1}]$ функцію $g(t)$ відображає у $n$ разів диференційовну на цьому проміжку функцію $p(t) = L[g(t)]$, яка задовольняє умови $p(t_i) = x_i^0$, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Серед інших властивостей оператора $L$ відзначимо, що $L[f+c] = L[f]$ для довільної векторної сталої $c$. Справді,

$$L[f+c] = L[f] + (-1)^{n+1} \cdot c \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \cdot \frac{(t_i - t)^n}{n!} = L[f] + \frac{c}{n!} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} (t - t_i) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(t - t_i)^{n-1}}{P_i(t_i)} = L[f],$$

оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{(t-t_i)^{n-1}}{P_i(t_i)} = 0$. Диференціюючи $n$ разів рівність

$$x = L[f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}, \lambda)], \tag{9}$$

отримуємо

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n!}{P_i(t_i)} \cdot \left( \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, \dots) ds + x_i^0 \right) + f(s, x, x', \dots, x^{(n-1)}, \lambda). \tag{10}$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{P_i(t_i)} \cdot \left( \int_{t_i}^{t} (t_i - s)^{n-1} f(s, \dots) ds \right)' = f(t, \dots) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(t_i - t)^{n-1}}{P_i(t_i)} = 0,$$

то продиференційований вираз є константою. Покладемо

$$A\lambda = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n!}{P_i(t_i)} \left( \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, \dots) ds + x_i^0 \right). \tag{11}$$

Тепер очевидно, що коли пара $\{x_*(t), \lambda_*\}$ задовольняє систему (9), (11), то вона буде також розв'язком задачі (1), (2). Справді, для довільного розв'язку $x_*(t)$ рівняння

$x = L[f]$, як випливає із (10) та (11), маємо $x_*^{(n)} = L^{(n)}[f] = f + A\lambda$. Крім цього, $x_*(t_i) = L[f(t,..)]|_{t=t_i} = x_i^0$ $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Приступимо до встановлення умов існування розв'язків задачі (9), (11). У просторі векторів $v = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \in E^{m(n+1)}$ введемо в розгляд оператор $P$, означивши його рівністю

$$P(v) = \begin{pmatrix} L[f(t, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)] \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{P_i'(t)}{P_i(t_i)} \cdot \left( \int\limits_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, u_0(s), \ldots, u_{n-1}(s), u_n) ds + x_i^0 \right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{P_i^{(n-1)}(t)}{P_i(t_i)} \cdot \left( \int\limits_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, u_0(s), \ldots, u_{n-1}(s), u_n) ds + x_i^0 \right) \\ A^{-1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{n!}{P_i(t_i)} \cdot \left( \int\limits_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, u_0(s), \ldots, u_{n-1}(s), u_n) ds + x_i^0 \right) \end{pmatrix},$$

де $u_0(t) = x(t),\ u_1(t) = x'(t),\ \ldots,\ u_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t),\ u_n = \lambda$. Із неперервності функції $f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ випливає існування таких векторних констант $\underline{M}$ та $\overline{M}$, що для всіх точок області $D$ виконується нерівність

$$\underline{M} \leq f(t, y_0, \ldots, y_n) \leq \overline{M} \tag{12}$$

(тут і далі нерівності між векторами та матрицями розуміємо покомпонентно).

Нехай $S$ — множина векторів $v \in E^{m(n+1)}$, координати яких задовольняють умови

$$a_s + \frac{h_s}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + p_s \leq u_s \leq b_s - \frac{h_s}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} - p_s, \qquad s = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$a_n + |A^{-1}| \cdot \left( \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + n! \cdot \left| \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{P_i(t_i)} \right| \right) \leq \lambda \leq b_n - |A^{-1}| \cdot \left( \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + n! \cdot \left| \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{P_i(t_i)} \right| \right),$$

де $h_s = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \left| \frac{P_i^{(s)}(t)}{P_i(t_i)} \cdot (t - t_i)^{n+1} \right|_c$ $p_s = \left| p^{(s)}(t, x-1, \ldots, x_{n+1}) \right|_c$, $p(t, x_1, \ldots, x_{n+1}) = L[0]$, $(|\cdot|_c = max_{t \in [o;h]} |\cdot|)$, а також нехай $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \cdots \\ \tilde{u}_{n-1} \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} \in S$. Можна переконатись у тому, що виконуються співвідношення

$$\begin{pmatrix} a_0 + \frac{h_0}{n!} \cdot \frac{\overline{M}-\underline{M}}{2} + p_0 \\ a_1 + \frac{h_1}{n!} \cdot \frac{\overline{M}-\underline{M}}{2} + p_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{n!} \cdot \frac{\overline{M}-\underline{M}}{2} + p_{n-1} \\ a_n + |A|^{-1} \cdot \left( \frac{\overline{M}-\underline{M}}{2} + n! \left| \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{P_i(t_i)} \right| \right) \end{pmatrix} \le P(\tilde{v}) \le$$

$$\begin{pmatrix} b_0 - \frac{h_0}{n!} \cdot \frac{\overline{M}-\underline{M}}{2} - p_0 \\ b_1 - \frac{h_1}{n!} \cdot \frac{\overline{M}-\underline{M}}{2} - p_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{n!} \cdot \frac{\overline{M}-\underline{M}}{2} - p_{n-1} \\ b_n - |A|^{-1} \cdot \left( \frac{\overline{M}-\underline{M}}{2} + n! \left| \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{P_i(t_i)} \right| \right) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Ми не будемо зупинятися на детальному обґрунтуванні даних нерівностей, а лише зауважимо, що при їх доведенні рівняння (9) доцільно, враховуючи доведену вище властивість оператора $L$, зобразити у вигляді $x = L[f(t,x,x',\ldots,\lambda) - \frac{\overline{M}+\underline{M}}{2}]$, оскільки у цьому випадку підінтегральна функція задовольнятиме умову $\left|f(t,\ldots) - \frac{\overline{M}+\underline{M}}{2}\right| \le \frac{\overline{M}-\underline{M}}{2}$. Зауважимо, що дана оцінка краща від традиційних (у випадках оцінок виду $|f(t,\ldots)| \le M$).

Із системи нерівностей (13) випливає, що $P(\tilde{v}) \in S$. Оскільки оператор $P$ переводить множину $S$ у себе і є цілком неперервним (це випливає із неперервності функції $f$), то в $S$ існує хоча б один розв'язок операторного рівняння

$$v = P(v). \tag{14}$$

Таким чином, справедливим буде наступне твердження.

**Теорема 1.** *Нехай функція $f(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)},\lambda)$ — визначена та неперервна в області $D$, виконується нерівність (12), а також множина $S$ — непорожня. Тоді задача (1), (2) має в $S$ хоча б один розв'язок.*

Дослідимо умови, при яких розв'язок — єдиний. При цьому будемо вважати, що в області $D$ функція $f(t,y_0,y_1,\ldots,y_n)$ задовольняє умови Ліпшиця за змінними $y_0,y_1,\ldots,$ $y_n$ з матрицями $K_s$, $s=0,1,\ldots,n$, відповідно, тобто для довільних двох точок $(t,y_0,$ $y_1,\ldots,y_n)$, $(t,\tilde{y}_0,\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n) \in D$ виконується нерівність

$$|f(t,y_0,y_1,\ldots,y_n) - f(t,\tilde{y}_0,\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)| \le \sum_{i=0}^{n} K_i \cdot |y_i - \tilde{y}_i|. \tag{15}$$

Розглянемо ітераційний процес

$$v_{k+1}(t) = Pv_k(t), \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{16}$$

вибравши початкове наближення у вигляді $v_0(t) = \begin{pmatrix} p(t,x_1,\ldots,x_n) \\ p'(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p^{n-1}(t,x_1,\ldots,x_n) \\ n!\cdot A^{-1}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{P_i(t_i)} \end{pmatrix}$. Враховуючи умову (15), знаходимо

$$|v_{k+1}-v_k| = |Pv_k - Pv_{k-1}| \leq$$

$$\begin{pmatrix} \left|L\left[|f(t,u_{0_k},u_{1_k},\ldots,u_{n_k}) - f(t,u_{0_{k-1}},u_{1_{k-1}},\ldots,u_{n_{k-1}})|\right]\right| \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1}\left|\frac{P_i'(t)}{P_i(t_i)}\right|\left|\int\limits_{t_i}^{t}\frac{|t_i-s|^{n-1}}{(n-1)!}\parallel f(t,u_{0_k},u_{1_k},\ldots,u_{n_k}) - f(t,u_{0_{k-1}},u_{1_{k-1}},\ldots,u_{n_{k-1}})\parallel ds\right| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |A^{-1}|\cdot\sum\limits_{i=1}^{n+1}\frac{n}{|P_i(t_i)|}\cdot\left|\int\limits_{t_i}^{t}|t_i-s|^{n-1}\cdot|f(t,u_{0_k},\ldots,u_{n_k}) - f(t,u_{0_{k-1}},\ldots,u_{n_{k-1}})|ds\right| \end{pmatrix} \leq$$

$$\begin{pmatrix} h_0\cdot\sum\limits_{i=0}^{n}K_i|u_{i_k}-u_{i_{k-1}}|_c \\ h_1\cdot\sum\limits_{i=0}^{n}K_i|u_{i_k}-u_{i_{k-1}}|_c \\ |A^{-1}|\cdot\sum\limits_{i=0}^{n}K_i|u_{i_k}-u_{i_{k-1}}|_c \end{pmatrix}.$$

Із останньої векторної нерівності отримуємо рекурентне співвідношення

$$|r_{k+1}(t)|_c \leq Q|r_k(t)|_c, \tag{17}$$

де $Q = h_0K_0 + h_1K_1 + \ldots + h_nK_n$, $\quad r_k(t) = \sum\limits_{i=0}^{n}K_i|u_{i_k}-u_{i_{nk-1}}|$, $\quad k=1,2,\ldots$. Ітеруючи нерівність (17), дістаємо $|r_{k+1}(t)|_c \leq Q^k|r_1(t)|_c$. Такі міркування дозволяють сформулювати наступне твердження.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1, нерівність (1), а також всі власні значення матриці $Q$ лежать в одиничному крузі. Тоді задача (1), (2) має єдиний розв'язок $\{x_*(t),\lambda_*\}$, до якого при $k\to\infty$ рівномірно по $t\in[t_1;t_{n+1}]$ збігається послідовність векторних функцій (13). Похибка характеризується при цьому векторною нерівністю*

$$\begin{pmatrix} |x_k(t)-x_*(t)| \\ |x_k'(t)-x_*'(t)| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |x_k^{(n-1)}(t)-x_*^{(n-1)}(t)| \\ |\lambda_k-\lambda_*| \end{pmatrix} \leq Q^k(E-Q)^{-1}|u_1(t)-u_0(t)|_c, \tag{18}$$

*де $E$ — одинична матриця, $k=1,2,\ldots$.*

*Доведення.* Оскільки всі власні значення матриці $Q$ лежать в одиничному крузі, то

$$\sum_{i=0}^{l-1}Q^{k+i} \leqq Q^k\cdot\sum_{i=0}^{\infty}Q^i = Q^k\cdot(E-Q)^{-1}, \quad \lim_{k\to\infty}Q^k = 0.$$

Тому

$$|r_{l+k}(t) - r_k(t)|_c \leq \sum_{i=0}^{l-1} Q^{k+i} \cdot |r_1(t) - r_0(t)|_c \leq Q^k \cdot (E-Q)^{-1} \cdot |r_1(t) - r_0(t)|_c. \qquad (19)$$

Звідси випливає рівномірна по $t \in [t_1; t_{n+1}]$ збіжність послідовностей $\{u_{i_k}(t)\}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_{i_k}(t) = u_{i_*}$, $u_{o_*}(t) = x_*(t)$, $u_{n_*} = \lambda_*$. Те, що послідовні наближення $u_{i_k}(t)$ належать області $D$, випливає із структури множини $S$. Очевидно, що функція $x_*(t)$ задовольняє умови (2), оскільки ці умови задовольняють всі наближення $x_k(t)$. Оцінки похибок (18) випливають із (19) за рахунок граничного переходу при $l \to \infty$. Єдиність розв'язку $\{x_*(t), \lambda_*\}$ обґрунтовується методом від супротивного. Теорема доведена. □

## Література


1. Сеидов З.Б. *Краевые задачи с параметром для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* // Сиб. мат. жур. – 1968. – Т.9, №1. – С. 223–230.
2. Собкович Р.І., Гургула С.І. *Про існування та единість розв'язків триточкової задачі з параметром* // Наук. вісті Інст. менеджменту та економіки "Галицька академія". – 2009. – №16(2). – С.128–132.
3. Курпель Н.С., Марусяк А.Г. *Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами* // УМЖ. – 1980. – Т.32, №2. – С. 223–226.


Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

*Надійшло 08.09.2010*

Sobkovich R.I., Kazmerchuk A.I. *Solvability of n-point problems with parameter for system of differential equation*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 116–122.

The $n$-point problems for non-linear systems of differential equation is investigated. Existence and uniqueness theorems are proved.

Собкович Р. И., Казмерчук А.И. *Разрешимость многоточечных краевых задач с параметром для системы дифференциальных уравнений* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 116–122.

Рассмотрены многоточечные задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений с параметром. Доказаны теоремы существования и единственности.