Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.98

Шарин С.В.

ПОЛІНОМІАЛЬНІ ПОВІЛЬНО ЗРОСТАЮЧІ РОЗПОДІЛИ

Шарин С.В. *Поліноміальні повільно зростаючі розподіли* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 123–132.

У роботі побудовано поліноміальний (нелінійний) аналог повільно зростаючих розподілів Шварца. Розглянуто узагальнену операцію диференціювання у просторі поліноміальних узагальнених функцій, а також перетворення Фур'є-Лапласа таких розподілів. Наведено приклади.

Вступ

Узагальнені функції Шварца давно стали класичним інструментом математичної фізики. Проте ряд задач, наприклад, квантової теорії поля (див. [4]), вимагають поліноміального (нелінійного) узагальнення поняття узагальненої функції. У роботах [11, 12] побудовано поліноміальні ультрарозподіли та розглянуто поліноміальне узагальнення операції крос-кореляції і перетворення Лапласа. У цій статті ми вводимо клас $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ поліноміальних повільно зростаючих узагальнених функцій, що є узагальненням простору $\mathcal{S}'_+$ класичних розподілів Шварца. При цьому простір $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ з точністю до ізоморфізму асоціюється із згортковою алгеброю коефіцієнтів $\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$, що дозволяє ввести на $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ структуру алгебри.

Зауважимо, що є інші широко відомі нескінченновимірні узагальнення класичних просторів розподілів, які використовують методи гауссівського аналізу білого шуму і концепцію трійок Гельфанда [7, 9, 10].

1 Попередні відомості і означення

Нехай X, Y — локально опуклі комплексні векторні простори. Позначимо $\mathscr{L}(X, Y)$ простір всіх неперервних лінійних операторів з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X. Для простоти писатимемо $\mathscr{L}(X)$ замість $\mathscr{L}(X, X)$. Сильно

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46G20, 46F25.
Ключові слова і фрази: поліноми на нескінченновимірних просторах, ядерні (F) та (DF) простори, повільно зростаючі узагальнені функції.

спряжений простір до X ми будемо позначати X'. Дію функціоналу $f \in X'$ на елемент $x \in X$ ми будемо записувати $\langle f \mid x \rangle$.

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $\mathscr{L}({}^nX, \mathbb{C}) := \mathscr{L}(X \times \ldots \times X, \mathbb{C})$ простір всіх неперервних n-лінійних функціоналів. Функціонал $F \in \mathscr{L}({}^nX, \mathbb{C})$ називається симетричним, якщо $F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, де σ — довільна перестановка множини $\{1, \ldots, n\}$. Простір всіх симетричних n-лінійних неперервних функціоналів позначимо $\mathscr{L}_s({}^nX, \mathbb{C})$. Визначимо так зване *діагональне відображення* як природне вкладення $\Delta_n : X \ni x \longmapsto (x, \ldots, x) \in X \times \ldots \times X$. Відображення P називається *неперервним n-однорідним поліномом*, якщо знайдеться $F \in \mathscr{L}({}^nX, \mathbb{C})$ таке, що $P(x) = F(\Delta_n(x))$. Простір усіх неперервних n-однорідних поліномів позначимо $\mathsf{P}_n(X)$ і наділимо його топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X. За означенням приймемо $\mathsf{P}_0(X) = \mathbb{C}$. Для детальнішого ознайомлення з основами теорії поліномів на нескінченновимірних просторах ми рекомендуємо книгу [5].

Для n-го (симетричного) тензорного степеня простору X будемо використовувати позначення $\otimes^n X$ (відповідно $\otimes^n_s X$). Поповнення тензорного добутку $\otimes$ (симетричного тензорного добутку $\otimes_s$) в проективній локально опуклій топології позначатимемо $\otimes_{\mathfrak{p}}$ (відповідно $\otimes_{s,\mathfrak{p}}$).

Для означення простору $\mathsf{P}_n(X)$ можна використати лінійні топологічні ізоморфізми $\mathsf{P}_n(X) \simeq \mathscr{L}_s({}^nX, \mathbb{C}) \simeq \big(\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X\big)'$, описані у книзі [5]. Якщо розглянути природне вкладення

$$\otimes_n \colon X \times \ldots \times X \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \otimes^n_{\mathfrak{p}} X,$$

то ізоморфізм $(\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X)' \ni p_n \longmapsto P_n := p_n \circ \otimes_n \circ \Delta_n \in \mathsf{P}_n(X)$ однозначно визначає n-однорідний поліном як композицію

$$P_n(x) = \langle p_n \mid \otimes^n x \rangle, \quad \text{де} \quad \otimes^n x := x \otimes \cdots \otimes x = (\otimes_n \circ \Delta_n)x, \qquad x \in X. \tag{1}$$

Простір всіх скінченних сум $\mathsf{P}(X) = \Big\{ P = \sum\limits_{n=0}^{m} P_n : P_n \in \mathsf{P}_n(X),\, m \in \mathbb{N} \Big\}$, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X, називається *простором неперервних поліномів на X*. Простір $\mathsf{P}(X)$ є топологічною алгеброю з одиницею і множенням $P(x) \cdot Q(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum\limits_{m=0}^{n} P_m(x) \cdot Q_{n-m}(x)$.

Символами $\mathsf{P}'(X)$, $\mathsf{P}'_n(X)$ ми будемо позначати сильно спряжені простори до $\mathsf{P}(X)$, $\mathsf{P}_n(X)$ відповідно. Аналогічні простори поліномів $\mathsf{P}(X')$, $\mathsf{P}_n(X')$ і сильно спряжених до них просторів $\mathsf{P}'(X')$, $\mathsf{P}'_n(X')$ ми вважаємо визначеними для простору X'.

Всюди в роботі символом $\prod\limits_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\times} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X$ ми позначаємо *декартовий локально опуклий добуток* і $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X$ — *пряму локально опуклу суму* симетричних тензорних степенів $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X$ простору X; аналогічно для простору X'. Зауважимо, що елементи прямої суми містять лише скінченну кількість доданків.

Нехай простір X є ядерним (F) або (DF) локально опуклим простором (див. [8, 3]). Зауважимо, що у цьому випадку простори $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X'$ і $(\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X)'$ — топологічно ізоморфні.

Наведемо ряд тверджень, доведених у роботі [12], які дають тензорну характеристику відповідних поліноміальних алгебр.

Твердження 1.1 ([12])**.** *Справджуються наступні лінійні топологічні ізоморфізми*

$$\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X' \overset{\Upsilon_{X'}}{\simeq} \mathsf{P}_n(X), \quad \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X \overset{\Upsilon_X}{\simeq} \mathsf{P}_n(X'), \quad \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X' \overset{\widetilde{\Upsilon}_{X'}}{\simeq} \mathsf{P}'(X'), \quad \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X \overset{\widetilde{\Upsilon}_X}{\simeq} \mathsf{P}(X').$$

Елементи простору $\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X'$ на довільний $x \in X$ діють за формулою

$$p(x) := \left\langle \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n \,\middle|\, \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n x \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n(x), \quad p = \prod^{\times} p_n, \tag{2}$$

де $P_n(x)$ визначається формулою (1). Зауважимо, що множина $\sum^{\oplus} \otimes^n x$ є тотальною підмножиною в $\sum^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X$.

Наслідок 1.1 ([12])**.** *Простори* $\mathsf{P}'(X')$ *і* $\mathsf{P}(X')$ *утворюють двоїстість* $\langle \mathsf{P}'(X') \mid \mathsf{P}(X') \rangle$. *Крім того, якщо* X *неперервно і щільно вкладається в* X', *то правильним є неперервне щільне вкладення* $\mathsf{P}(X') \looparrowright \mathsf{P}'(X')$.

Елементи простору $\mathsf{P}'(X')$ ми називатимемо *поліноміальними узагальненими функціями.* Їх можна розуміти як поліноми на просторі X в розумінні формули (2). Надалі, враховуючи ізоморфізм $\widetilde{\Upsilon}_{X'}$, поліноміальні узагальнені функції деколи будемо записувати у вигляді $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$, де $p_n \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X'$.

Твердження 1.2 ([12])**.** *Пряма сума* $\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X = \left\{ \varphi = \sum^{\oplus} \varphi_n \colon \varphi_n \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X \right\}$ *є локально опуклою алгеброю відносно згортки* $\varphi \star \psi := \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \Big(\sum^{n}_{m=0} \varphi_m \otimes_s \psi_{n-m} \Big)$, *і відображення* $\left\{ \sum^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X, \star \right\} \xrightarrow{\widetilde{\Upsilon}_X} \left\{ \mathsf{P}(X'), \cdot \right\}$ *є ізоморфізмом алгебр.*

Наслідок 1.2 ([12])**.** *Множення алгебри* $\mathsf{P}(X')$ *може бути єдиним чином продовжене до множення в* $\mathsf{P}'(X')$. *Простір* $\mathsf{P}'(X')$ *є топологічною алгеброю відносно введеного множення і* $\widetilde{\Upsilon}_X$ *однозначно продовжується до алгебраїчного ізоморфізму* $\left\{ \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X', \star \right\} \overset{\widetilde{\Upsilon}_{X'}}{\simeq} \left\{ \mathsf{P}'(X'), \cdot \right\}$.

У просторі $\mathscr{L}\left[\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X \right]$ неперервних лінійних операторів з $\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X$ в себе розглянемо підалгебру $\mathscr{L}_\Gamma \left[\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X \right]$ операторів, які залишають простори $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X$ інваріантними, тобто

$$\mathscr{L}\left[\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X \right] \supset \mathscr{L}_\Gamma \left[\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X \right] := \begin{pmatrix} \mathscr{L}[\otimes^0_{s,\mathfrak{p}} X] & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \mathscr{L}[\otimes^1_{s,\mathfrak{p}} X] & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathscr{L}[\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

де, очевидно, $\otimes^0_{s,\mathfrak{p}} X = \mathbb{C}$ і $\otimes^1_{s,\mathfrak{p}} X = X$. Використовуючи ізоморфізм Υ_X, ми будемо асоціювати відповідні операторні алгебри, а саме $\mathscr{L}\left[\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X \right] \simeq \mathscr{L}\left[\mathsf{P}(X') \right]$ і $\mathscr{L}_\Gamma \left[\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X \right] \simeq \mathscr{L}_\Gamma \left[\mathsf{P}(X') \right]$.

2 Поліноміальне розширення повільно зростаючих узагальнених функцій

У роботах [11, 12] побудовано поліноміальне розширення ультрарозподілів з носіями на півосі $[0, +\infty)$ та в конусі $\mathbb{R}^d_+$ відповідно і розглянуто узагальнення перетворення Лапласа для поліноміальних ультрарозподілів.

Нехай $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ позначають класичні простори Шварца швидко спадних функцій та повільно зростаючих узагальнених функцій відповідно. Відомо [1], що $\mathcal{S}$ є ядерним (F) простором, а $\mathcal{S}'$ — ядерним (DF) простором.

Розглянемо в $\mathcal{S}'$ підпростір $\mathcal{S}'_+$ тих розподілів, які тотожно рівні нульовому функціоналу на півосі $(-\infty, 0)$. Нехай $(\mathcal{S}'_+)^\circ$ — поляра підпростору $\mathcal{S}'_+$ відносно двоїстості $\langle \mathcal{S}', \mathcal{S} \rangle$. Тоді дуальним до $\mathcal{S}'_+$ буде факторпростір

$$\mathcal{S}_+ := \mathcal{S}/(\mathcal{S}'_+)^\circ = \left\{ \boldsymbol{\varphi} = \varphi + \varphi_0 \colon \varphi \in \mathcal{S}, \varphi_0 \in (\mathcal{S}'_+)^\circ \right\}.$$

Нехай $\theta(x)$ позначає характеристичну функцію додатної півосі. Ядро оператора множення на функцію Хевісайда $\theta(x)$

$$\Theta \colon \mathcal{S} \ni \varphi \longmapsto \theta\varphi \in \mathcal{S}'_+$$

співпадає з $(\mathcal{S}'_+)^\circ$. Тому для його образу $\Theta[\mathcal{S}]$ правильним є топологічний ізоморфізм $\mathcal{S}_+ \simeq \Theta[\mathcal{S}]$. Таким чином, кожен елемент $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$ можна розуміти як регулярний розподіл з простору $\mathcal{S}'_+$.

З теорії ядерних просторів [2] випливає, що $\mathcal{S}'_+$ є ядерним (DF) простором, а $\mathcal{S}_+$ — ядерним (F) простором. Крім того, $\mathcal{S}'_+$ є згортковою алгеброю з одиницею $\delta(x)$, де $\delta(x)$ — дельта функція Дірака, а $\mathcal{S}_+$ є алгеброю відносно поточкового множення будь-яких представників відповідних класів суміжності.

Множина $(\mathcal{S}'_+)^\circ$ є ідеалом в алгебрі $\mathcal{S}$, інваріантним відносно лівосторонніх зсувів. Тому у факторпросторі $\mathcal{S}_+$ коректно визначено напівгрупу зсувів

$$T_t \colon \mathcal{S}_+ \ni \boldsymbol{\varphi}(x) \longmapsto \Theta\boldsymbol{\varphi}(x+t) \in \mathcal{S}_+, \qquad t \geq 0.$$

Ідеал $(\mathcal{S}'_+)^\circ$ є також інваріантним відносно оператора диференціювання D, тому коректно визначеним є оператор

$$D \colon \mathcal{S}_+ \ni \boldsymbol{\varphi} \longmapsto D(\boldsymbol{\varphi}) \in \mathcal{S}_+.$$

Нехай T'_t і D' — спряжені оператори до T_t і D відповідно відносно дуальної пари $\left\langle \mathcal{S}'_+, \mathcal{S}_+ \right\rangle$. Зауважимо, що простір $\mathcal{S}_+$ неперервно і щільно вкладається у простір $\mathcal{S}'_+$ (це випливає з вкладення $\mathcal{S} \looparrowright \mathcal{S}'$). Отже, ми можемо розглянути простір поліномів $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ і його спряжений $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$, для яких згідно із наслідком 1.1 виконується неперервне щільне вкладення $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+) \looparrowright \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$. Крім того, $\left\langle \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+), \mathsf{P}(\mathcal{S}'_+) \right\rangle$ — дуальна пара.

Теорема 1. (i) *Однопараметрична сім'я* $\left\{ \Gamma(T'_t) \right\}_{t \geq 0}$ *лінійних операторів, яка визначена на згортковій алгебрі* $\left\{ \sum^{\oplus}_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+, \star \right\}$ *рівністю*

$$\left[\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}_+} \Gamma(T'_t) \widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}_+}(Q) \right](f) = Q(T'_t f), \quad Q = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} Q_n \in \mathsf{P}(\mathcal{S}'_+), \quad f \in \mathcal{S}'_+,$$

де $Q_n = q_n \circ \otimes_n \circ \Delta_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+)$, $q_n \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$, *є одностайно неперервною* (C_0) *напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів.*

Її генератор $\mathsf{d}\Gamma(D')$ *належить підалгебрі* $\mathscr{L}_\Gamma\left[\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\right]$ *і на довільний елемент* $q = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n \in \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$, *де* $q_n = \otimes^n\boldsymbol{\varphi} \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$, $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{S}_+$, *діє за правилом*

$$\mathsf{d}\Gamma(D')q = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}\otimes D(\boldsymbol{\varphi})}_{j}\otimes\underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}}_{n-j}.$$

(ii) *Однопараметрична сім'я* $\left\{\Gamma(T_t)\right\}_{t\geq 0}$ *лінійних операторів, яка визначена на згортковій алгебрі* $\left\{\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+,\star\right\}$ *рівністю*

$$\left[\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}'_+}\Gamma(T_t)\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}'_+}(P)\right](\boldsymbol{\varphi}) = P(T_t\boldsymbol{\varphi}),\quad P = \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}P_n \in \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+),\quad \boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{S}_+,$$

де $P_n = p_n\circ\otimes_n\circ\Delta_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+)$, $p_n\in\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$, *є одностайно неперервною* (C_0) *напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів.*

Її генератор $\mathsf{d}\Gamma(D)$ *належить підалгебрі* $\mathscr{L}_\Gamma\left[\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+\right]$ *і на довільний елемент* $p = \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}p_n \in \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$, *де* $p_n = \otimes^n f\in\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$, $f\in\mathcal{S}'_+$, *діє за правилом*

$$\mathsf{d}\Gamma(D)p = -\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{f\otimes\cdots\otimes f\otimes D'(f)}_{j}\otimes\underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{n-j}.$$

Доведення. Нехай $\mathcal{S}^n$ позначає поповнення простору $\mathcal{S}$ за нормою

$$\|\varphi\|_n = \sup_{x\in\mathbb{R},\ 0\leq\alpha\leq n}(1+x^2)^{n/2}|D^\alpha\varphi(x)|,\quad \varphi\in\mathcal{S},\quad n\in\{0\}\cup\mathbb{N}.$$

Для кожного $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ розглянемо факторпростір $\mathcal{S}^n_+ := \mathcal{S}^n/(\mathcal{S}'_+)^\circ$. Тоді простір $\mathcal{S}_+$ може бути зображений у вигляді проективної границі [1]

$$\mathcal{S}_+ = \lim_{n\to\infty}\mathrm{pr}\,\mathcal{S}^n_+,$$

причому кожне вкладення $\mathcal{S}^{n+1}_+\subset\mathcal{S}^n_+$ $(n=0,1,2,\dots)$ цілком неперервне. Використовуючи відому [6] властивість комутативності проективних границь із проективними тензорними добутками отримаємо

$$\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+ = \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\lim_{n\to\infty}\mathrm{pr}\,\mathcal{S}^n_+ = \lim_{n\to\infty}\mathrm{pr}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}^n_+. \tag{3}$$

Система функцій

$$q_n = \otimes^n\boldsymbol{\varphi} : (t_1,\dots,t_n)\longmapsto\boldsymbol{\varphi}(t_1)\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}(t_n), \tag{4}$$

де $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{S}_+$, є тотальною підмножиною в $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$.

З твердження 1.1 випливають рівності

$$\big[\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}_+}\Gamma(T_t')\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}_+}^{-1}(Q)\big](f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle \otimes^n (T_t'f) \mid q_n\big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle T_t'f\otimes\cdots\otimes T_t'f \mid \boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}\big\rangle =$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle T_t'f \mid \boldsymbol{\varphi}\big\rangle^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle f \mid T_t\boldsymbol{\varphi}\big\rangle^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle \otimes^n f \mid \otimes^n(T_t\boldsymbol{\varphi})\big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\big\langle \otimes^n f \mid (\otimes^n T_t)(q_n)\big\rangle.$$

Для кожного n розглянемо напівгрупу $\otimes^n T_t$ на тотальній підмножині (4) в просторі $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$. Оскільки оператор T_t здійснює лінійну заміну змінних, то, очевидно, маємо

$$\|T_t\boldsymbol{\varphi}\|_n = \|\boldsymbol{\varphi}\|_n, \quad \forall n\in\{0\}\cup\mathbb{N}.$$

Звідси, а також із регулярності проективної границі (3), випливає одностайна неперервність напівгрупи $\otimes^n T_t$ в просторі $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ для кожного $n = 0,1,2,\dots$. Використовуючи (C_0) властивість напівгрупи T_t, легко довести цю ж властивість для напівгрупи $\otimes^n T_t$. Остаточно, одностайна неперервність та сильна неперервність напівгрупи $\Gamma(T_t')$ випливає із властивостей топології прямої суми.

Знайдемо генератор напівгрупи $\otimes^n T_t$. Для кожного фіксованого $q_n = \otimes^n\boldsymbol{\varphi}$ маємо

$$\frac{d}{dt}\big[(\otimes^n T_t)(q_n)\big]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big[T_t\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes T_t\boldsymbol{\varphi}\big]\Big|_{t=0} =$$
$$\sum_{j=1}^{n}\underbrace{T_t\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes T_t\boldsymbol{\varphi}\otimes\frac{d}{dt}T_t\boldsymbol{\varphi}}_{j}\otimes\underbrace{T_t\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes T_t\boldsymbol{\varphi}}_{n-j}\Bigg|_{t=0} =$$
$$\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}\otimes D(\boldsymbol{\varphi})}_{j}\otimes\underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}}_{n-j}.$$

Операція диференціювання D є лінійною і неперервною в просторі $\mathcal{S}_+$ [1]. Тому оператор $\otimes^{j-1}I_+\otimes D\otimes^{n-j} I_+$, де I_+ позначає тотожній оператор в $\mathscr{L}[\mathcal{S}_+]$, належить простору $\mathscr{L}[\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+]$. Для завершення доведення пункту (i) залишилось використати те, що кожен елемент $q\in\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ можна апроксимувати лінійною комбінацією елементів (4).

Використовуючи теорію двоїстості і дуальність $\Big\langle\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+' \mid \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\Big\rangle$, легко провести аналогічні міркування для доведення пункту (ii). □

Теорема 2. (i) *Генератор* $\mathsf{d}\Gamma(D')$ *є неперервним диференціюванням на згортковій алгебрі* $\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$, *тобто*

$$\mathsf{d}\Gamma(D')(p\star q) = [\mathsf{d}\Gamma(D')p]\star q + p\star[\mathsf{d}\Gamma(D')q] \tag{5}$$

для довільних $p,q\in\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$.

(ii) *Генератор* $\mathsf{d}\Gamma(D)$ *є неперервним диференціюванням на згортковій алгебрі* $\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+'$, *тобто*

$$\mathsf{d}\Gamma(D)(p\star q) = [\mathsf{d}\Gamma(D)p]\star q + p\star[\mathsf{d}\Gamma(D)q] \tag{6}$$

для довільних $p,q\in\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+'$.

(iii) *Генератори* $\mathsf{d}\Gamma(D)$ *і* $\mathsf{d}\Gamma(D')$ *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\langle \mathsf{d}\Gamma(D)p \mid q\rangle = -\langle p \mid \mathsf{d}\Gamma(D')q\rangle\,, \quad \forall p \in \prod_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\times} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+, \quad \forall q \in \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+. \tag{7}$$

Доведення. (i) Нехай $p = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n \boldsymbol{\varphi} \in \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ і $q = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n \boldsymbol{\psi} \in \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$, $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{S}_+$. Тоді

$$p \star q = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\oplus} \otimes^n \boldsymbol{\varphi}\right) \star \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\oplus} \otimes^n \boldsymbol{\psi}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\oplus} \sum_{m=0}^{n} (\otimes^m \boldsymbol{\varphi}) \otimes (\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi}).$$

Нехай ${}^n_jD$ позначає оператор, що на довільний елемент виду $\otimes^n \boldsymbol{\varphi} \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ діє за правилом

$${}^n_jD[\otimes^n \boldsymbol{\varphi}] := \underbrace{\boldsymbol{\varphi} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varphi} \otimes D(\boldsymbol{\varphi})}_{j} \otimes \underbrace{\boldsymbol{\varphi} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varphi}}_{n-j}.$$

Далі безпосередньо переконуємося у правильності рівності (5):

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\Gamma(D')(p \star q) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\oplus} \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} {}^n_jD[(\otimes^m \boldsymbol{\varphi}) \otimes (\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi})] = \\
&\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\oplus} \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} {}^m_jD[\otimes^m \boldsymbol{\varphi}] \otimes (\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi}) + \sum_{j=1}^{n-m} (\otimes^m \boldsymbol{\varphi}) \otimes {}^{n-m}_{\ \ j}D[\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi}]\right) = \\
&\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\oplus} \sum_{m=0}^{n} \left(\Big(\sum_{j=1}^{m} {}^m_jD[\otimes^m \boldsymbol{\varphi}]\Big) \otimes (\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi})\right) + \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\oplus} \sum_{m=0}^{n} \left((\otimes^m \boldsymbol{\varphi}) \otimes \Big(\sum_{j=1}^{n-m} {}^{n-m}_{\ \ j}D[\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi}]\Big)\right) = \\
&[\mathsf{d}\Gamma(D')p] \star q + p \star [\mathsf{d}\Gamma(D')q].
\end{aligned}$$

(ii) Доведення рівності (6) проводиться аналогічно.

(iii) Правильність співвідношення (7) відразу слідує із рівностей $D' = -D$ та

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{j=1}^{n} {}^n_jD'[p_n] \;\Big|\; q_n \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} {}^n_jD'[\otimes^n f] \;\Big|\; \otimes^n \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \\
&- \left\langle \otimes^n f \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n} {}^n_jD[\otimes^n \boldsymbol{\varphi}] \right\rangle = -\left\langle p_n \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n} {}^n_jD[q_n] \right\rangle,
\end{aligned}$$

де $p_n = \otimes^n f \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$, $f \in \mathcal{S}'_+$, $q_n = \otimes^n \boldsymbol{\varphi} \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$, а оператор ${}^n_jD'$ визначається за формулою ${}^n_jD'[\otimes^n f] := \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f \otimes D'(f)}_{j} \otimes \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n-j}$. □

Елементи простору $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ ми називатимемо *поліноміальними повільно зростаючими узагальненими функціями.*

3 Поліноміальне розширення перетворення Фур'є-Лапласа

Відомо з [1], що перетворення Фур'є $\widehat{\varphi}(\zeta) := [F\varphi(t)](\zeta)$ бієктивно і неперервно відображає простір $\mathcal{S}$ на простір $\mathcal{S}$. Побудуємо факторпростір

$$\widehat{\mathcal{S}}_+ := \mathcal{S}/F\left[(\mathcal{S}'_+)^\circ\right],$$

який, очевидно, буде образом при перетворенні Фур'є елементів з простору $\mathcal{S}_+$, тобто визначеним є відображення $F_+ \colon \mathcal{S}_+ \longmapsto \widehat{\mathcal{S}}_+$. Користуючись ін'єктивністю відображення F_+, простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ наділимо індукованою перетворенням F_+ топологією. Звідси випливає, що простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ є ядерним (F) простором. Нехай $F'_+ \colon \widehat{\mathcal{S}}'_+ \longmapsto \mathcal{S}'_+$ — спряжене до F_+ відображення, де $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ — сильно спряжений до $\widehat{\mathcal{S}}_+$ простір. Перетворення $\mathcal{F}'_+ := 2\pi(F'_+)^{-1} \colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}}'_+$ назвемо *узагальненим перетворенням Фур'є-Лапласа* узагальнених функцій з класу $\mathcal{S}'_+$.

Відображення $\mathcal{F}'_+$ є неперервним у сильній топології простору $\mathcal{S}'_+$, тому $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ є ядерним (DF) простором. Крім того $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ є мультиплікативною алгеброю з одиницею $\widehat{\delta}$ відносно множення

$$\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \qquad f, g \in \mathcal{S}'_+.$$

Білінійна форма $\left\langle \mathcal{F}'_+ f \mid F_+\varphi \right\rangle = \left\langle F'_+\mathcal{F}'_+ f \mid \varphi \right\rangle = 2\pi \left\langle f \mid \varphi \right\rangle$, де $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$ визначає нову дуальність $\left\langle \widehat{\mathcal{S}'_+} \mid \widehat{\mathcal{S}_+} \right\rangle$.

Використовуючи твердження 1.1, ми можемо розширити узагальнене перетворення Фур'є-Лапласа на алгебру $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ наступним чином.

Комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+) & \xrightarrow{\mathsf{F}'_+} & \mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \\
\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}'_+}\Big\| & & \widetilde{\Upsilon}_{\widehat{\mathcal{S}}'_+}\Big\| \\
\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\times} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+ & \xrightarrow{\times(\otimes^n \mathcal{F}'_+)} & \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\times} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \widehat{\mathcal{S}}'_+
\end{array}$$

однозначно визначає поліноміальне розширення

$$\mathsf{F}'_+ \colon \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+) \ni P = \prod_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\times} P_n \longmapsto \widehat{P} := \prod_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\times} \mathsf{F}'_n(P_n) \in \mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \quad P_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+)$$

узагальненого перетворення Фур'є-Лапласа $\mathcal{F}'_+$, де F'_n – однорідний випадок відображення F'_+, тобто перетворення, що однозначно визначається комутативною діаграмою

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+) & \xrightarrow{\mathsf{F}'_n} & \mathsf{P}_n(\widehat{\mathcal{S}}_+) \\
\Upsilon_{\mathcal{S}'_+}\Big\| & & \Upsilon_{\widehat{\mathcal{S}}'_+}\Big\| \\
\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+ & \xrightarrow{\otimes^n \mathcal{F}'_+} & \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \widehat{\mathcal{S}}'_+ \, .
\end{array}$$

Відображення F'_+ ми назвемо *поліноміальним перетворенням Фур'є-Лапласа.* Слід зауважити, що це відображення належить діагональній підалгебрі $\mathscr{L}_\Gamma\left[\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+), \mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+)\right]$.

Більше того, перетворення F'_+ діє як сюр'єктивний топологічний ізоморфізм з $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ на $\mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$.

З наслідку 1.1 випливає, що звуження

$$\mathsf{F}_+ := \mathsf{F}'_+ \mid_{\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)}$$

на щільну підалгебру $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+) \subset \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ діє як алгебраїчний ізоморфізм

$$\mathsf{F}_+ \colon \mathsf{P}(\mathcal{S}'_+) \ni Q = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} Q_n \longrightarrow \widehat{Q} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathsf{F}_n(Q_n) \in \mathsf{P}(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \quad Q_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+),$$

де $\mathsf{F}_n := \mathsf{F}'_n \mid_{\mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+)}$. Крім того, правильною є дуальна рівність $\left\langle \widehat{P} \mid \widehat{Q} \right\rangle = \langle P \mid Q\rangle$.

Приклад 3.1. *Знайдемо узагальнене перетворення Фур'є-Лапласа дельта-функції Дірака*

$$\left\langle \mathcal{F}'_+\delta \mid F_+\varphi \right\rangle = 2\pi \langle \delta \mid \varphi\rangle = 2\pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \bigg|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \langle 1 \mid F_+\varphi\rangle .$$

Таким чином, $\mathcal{F}'_+\delta = 1$.

Розглянемо елемент δ_p *з простору* $\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\times} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$ *виду*

$$\delta_p = (\delta, \delta\otimes\delta, \dots, \otimes^n\delta, \dots).$$

Зауважимо, що кожен $\otimes^n\delta \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$ *можна розуміти як* n*-однорідний поліном з простору* $\mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+)$ *в сенсі формули (1).*

Обчислимо поліноміальне перетворення Фур'є-Лапласа елемента δ_p. *Для довільного* $n\in\mathbb{N}$ *маємо*

$$\otimes^n\mathcal{F}'_+\left[\otimes^n\delta\right] = 1\otimes\cdots\otimes 1 = \otimes^n 1.$$

Тому остаточно отримаємо $\mathsf{F}'_+[\delta_p] = (1, 1\otimes 1, \dots, \otimes^n 1, \dots)$.

Приклад 3.2. *Нехай* $\theta(x)$ *– функція Хевісайда. Знайдемо її узагальнене перетворення Фур'є-Лапласа.*

$$\left\langle \mathcal{F}'_+\theta \mid F_+\varphi \right\rangle = 2\pi\langle\theta\mid\varphi\rangle = 2\pi\int_0^\infty \varphi(t)\,dt =$$
$$2\pi\int_0^{+\infty} e^{-it\xi}\,\varphi(t)\,dt\bigg|_{\xi=0} = 2\pi\widehat{\varphi}(0) = 2\pi\langle\delta\mid F_+\varphi\rangle .$$

Отримали $\mathcal{F}'_+\theta = 2\pi\delta$. *Знайдемо поліноміальне перетворення Фур'є-Лапласа елемента* $\theta_p = (\frac{1}{2\pi}\theta, \frac{1}{2\pi}\theta\otimes\frac{1}{2\pi}\theta, \dots, \otimes^n\frac{1}{2\pi}\theta, \dots)$. *Для довільного* $n\in\mathbb{N}$ *маємо*

$$\otimes^n\mathcal{F}'_+\left[\otimes^n\frac{1}{2\pi}\theta\right] = \delta\otimes\cdots\otimes\delta = \otimes^n\delta.$$

Отже, $\mathsf{F}'_+[\theta_p] = \delta_p$.

Література

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. –М.: Наука, 1979. –318 с.
2. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. –М.: Мир, 1967. –266 с.
3. Шефер X. Топологические векторные пространства. –М.: Мир, 1971. –360 с.
4. Borchers H. *Algebras of unbounded operators in quantum fields theory*, Physica, **124A** (1988), 1–127.
5. Dineen S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1999.
6. Grothendieck A. *Produits tensoriels topologues et espases nucléaire*, Mem. Amer. Math. Soc., **16**, 11 (1955), 1–140.
7. Hida T., Kuo H.H., Potthoff J., Streit L. White Noise: An Infinite Dimensional Calculus, Kluwer Academic Publishers, 1993.
8. Jarchow H. Locally Convex Spaces, Teubner, Stuttgart, 1981.
9. Kondratiev Y.G., Streit L., Westerkamp W., Yan J. *Generalized functions in infinite dimensional analysis*, Hiroshima Math. J. **28** (1998), 213–260.
10. Obata N. White Noise Calculus and Fock Space, Springer, 1995.
11. Lopushansky O.V. *Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation*, Banach Center Publ., **88** (2010), 195–209.
12. Lopushansky O.V., Sharyn S.V. *Polynomial ultradistributions on cone* $\mathbb{R}^d_+$, Topology, **48**, 2–4 (2009), 80–90.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 5.11.2010

Sharyn S.V. *Polynomial tempered distributions*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 123–132.

In the article polynomial (nonlinear) analogue of tempered Schwartz distributions is constructed. Generalized operation of differentiation in the space of polynomial generalized functions as well as Fourier-Laplace transformation of such distributions are considered. Some examples are given.

Шарин С.В. *Полиномиальные медленно растущие распределения* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 123–132.

В работе построено полиномиальный (нелинейный) аналог медленно растущих распределений Шварца. Рассмотрено обобщенную операцию дифференцирования в пространстве полиномиальных обобщенных функций, а также преобразование Фурье-Лапласа таких распределений. Приведены примеры.