Карпатські математичні
публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.2, №.1

УДК 517.51

Волошин Г.А., Маслюченко В.К.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ, 2π-ПЕРІОДИЧНИХ ВІДНОСНО ДРУГОЇ ЗМІННОЇ

Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 4–14.

За допомогою операторів Джексона і Бернштейна ми доводимо, що для кожного топологічного простору X і довільної нарізно неперервної функції $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка є 2π-періодичною відносно другої змінної, існує така послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої функції $f_n^x = f_n(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – це тригонометричні поліноми і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.

Вступ

Зважаючи на відому теорему Вейєрштасса про рівномірне наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними поліномами [8, с. 98], природно розглянути таке питання: чи для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ існує така послідовність функцій $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, неперервних відносно першої змінної і поліноміальних відносно другої, що послідовність поліномів $f_n^x = f_n(x, \cdot)$ для кожного $x \in [0,1]$ рівномірно прямує до функції $f^x = f(x, \cdot)$ на відрізку $[0,1]$. У праці [1] за допомогою операторів Бернштейна $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$, які на неперервну функцію $g \in C[0,1]$ діють за правилом

$$(B_n g)(y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g\Big(\frac{k}{n}\Big) y^k (1-y)^{n-k},$$

де $0 \le y \le 1$, було показано, що для довільного топологічного простору X та кожної нарізно неперервної функції $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ функції

$$f_n(x,y) = (B_n f^x)(y),$$

де $x \in X$, $y \in [0,1]$ є сукупно неперервними і поліноміальними відносно другої змінної, причому $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in X$. Тут запис $h_n \rightrightarrows h$ на Y означає, звичайно ж, рівномірну збіжність h_n до h, тобто $\|h_n - h\| = \sup\limits_{x \in Y} |h_n(y) - h(y)| \to 0$ при $n \to \infty$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 65D15.
Ключові слова і фрази: нарізно неперервні функції, оператори Джексона, оператори Бернштейна.

Подібні питання можна ставити (див. [2]) і для інших методів наближення неперервних функцій чи ще якихось об'єктів. Тут ми вивчаємо споріднене питання, що пов'язане з другою теоремою Вейєрштрасса про рівномірне наближення тригонометричними поліномами [8, с. 398]. За допомогою операторів Джексона або Бернштейна ми встановлюємо, що для кожного топологічного простору X і довільної нарізно неперервної функції $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка є 2π-періодичною відносно другої змінної, існує така послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої функції $f_n^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – це тригонометричні поліноми, і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$. Ми також з'ясовуємо, що оператори Фейєра годяться лише для наближення сукупно неперервних функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які є 2π-періодичними відносно другої змінної, встановивши, що вони – неперервні в топології рівномірної збіжності, але розривні в топології поточкової збіжності.

Ці результати було анонсовано в [3].

1 Позначення і допоміжні результати

На просторі $C(Y)$ всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$, заданих на топологічному просторі Y, розглянемо локально опуклу топологію $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності, яка задається сукупністю переднорм

$$q_y(g) = |g(y)|,\ y \in Y.$$

Локально опуклий простір $(C(Y), \mathcal{T}_p)$ позначимо символом $C_p(Y)$.

Для компактного простору Y символом $C_u(Y)$ ми позначаємо банахів простір $(C(Y), \|\cdot\|)$ з рівномірною нормою

$$\|g\| = \max_{y\in Y} |g(y)|,$$

а символом $\mathcal{T}_u$ – топологію простору $C_u(Y)$, яка є топологією рівномірної збіжності на $C(Y)$.

Оператор $A : C(Y) \to C(Y)$ ми називаємо *pu-неперервним*, якщо він неперервний як відображення $A : C_p(Y) \to C_u(Y)$. Так само вводяться поняття *pp*-, *uu*- і *up*-неперервності.

Символом $C_{2\pi}$ ми позначаємо простір всіх неперервних 2π-періодичних функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Він буде банаховим простором відносно норми

$$\|g\| = \max_{y\in\mathbb{R}} |g(y)| = \max_{0\le y\le 2\pi} |g(y)|,$$

яка породжує на $C_{2\pi}$ топологію рівномірної збіжності $\mathcal{T}_u$. На просторі $C_{2\pi}$ можна розглядати і топологію $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності. Топології $\mathcal{T}_p$ і $\mathcal{T}_u$ на $C_{2\pi}$ породжують відповідні типи неперервності операторів $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$. Наприклад, оператор $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – *pu*-неперервний, якщо він неперервний як відображення $A : (C_{2\pi}, \mathcal{T}_p) \to (C_{2\pi}, \mathcal{T}_u)$.

Розглянемо одиничне коло $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ з топологією, індукованою з комплексної площини $\mathbb{C}$. Зрозуміло, що $\mathbb{S}$ – це компактний простір, і ми можемо розглянути простори $C_u(\mathbb{S})$ і $C_p(\mathbb{S})$. Співставимо кожній функції $h \in C(\mathbb{S})$ функцію $g = Uh \in C_{2\pi}$, для якої

$$g(y) = h(e^{iy})$$

для кожного $y \in \mathbb{R}$. Легко перевірити, що відображення $U : C(\mathbb{S}) \to C_{2\pi}$ – це алгебраїчний ізоморфізм, який є ізометрією банахових просторів $C_u(\mathbb{S})$ і $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$ та топологічним ізоморфізмом локально опуклих просторів $C_p(\mathbb{S})$ і $(C_{2\pi}, \mathcal{T}_p)$. За допомогою цього ізоморфізму можна ототожнити простори $C_{2\pi}$ і $C(\mathbb{S})$.

Розглянемо підпростір $C_0[0, 2\pi]$ простору $C[0, 2\pi]$, який складається з таких функцій $g \in C[0, 2\pi]$, що для них $g(0) = g(2\pi)$. Відображення звуження $R : C_{2\pi} \to C_0[0, 2\pi]$, $Rg = g|_{[0,2\pi]}$ – це теж алгебраїчний ізоморфізм, який буде ізометрією, коли простори $C_{2\pi}$ і $C_0[0, 2\pi]$ наділити рівномірними нормами. Таким чином, простір $C_{2\pi}$ можна реалізувати і як підпростір $C_0[0, 2\pi]$ простору $C[0, 2\pi]$.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$ і $\varphi(x) = f^x$. Відображення $\varphi : X \to Z^Y$ називається *вертикальним розшаруванням для f* або *асоційованим з f відображенням*. Для топологічних просторів X та Y символом $C(X \times Y)$ $\big(CC(X \times Y)\big)$ позначається множина всіх сукупно (нарізно) неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.

Ми будемо використовувати наступний добре відомий результат (див., наприклад, [7, твердження 2.1.2]).

Теорема 1. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – функція і $\varphi : X \to \mathbb{R}^Y$ – асоційоване з f відображення. Тоді:*

а) $f \in CC(X \times Y) \iff \varphi(X) \subseteq C(Y)$ і відображення $\varphi : X \to C_p(X)$ – неперервне;

б) якщо Y – компактний простір, то $f \in C(X \times Y) \iff \varphi(X) \subseteq C(Y)$ і відображення $\varphi : X \to C_u(X)$ є неперервним.

Оскільки відповідність $f \longmapsto \varphi$ є бієктивною в обох випадках, то теорема 1 дозволяє ототожнити множину $CC(X \times Y)$ з множиною $C(X, C_p(Y))$ всіх неперервних відображень $\varphi : X \to C_p(Y)$, які ми називаємо *p-неперервними*, а множину $C(X \times Y)$ – з множиною $C(X, C_u(Y))$ всіх неперервних відображень $\varphi : X \to C_u(Y)$, які ми називаємо *u-неперервними*.

Для топологічного простору X символом $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ ми позначаємо простір усіх нарізно неперервних функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які є 2π-періодичними відносно другої змінної. За допомогою ізоморфізму $U : C(\mathbb{S}) \to C_{2\pi}$ цей простір можна ототожнити з простором $CC(X \times \mathbb{S})$, а простір $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$ – з простором $C(X \times \mathbb{S})$, і на основі цього отримати такий наслідок теореми 1.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція і $\varphi : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ – асоційоване з f відображення. Тоді:*

а) $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \iff \varphi(X) \subseteq C_{2\pi}$ і $\varphi : X \to C_{2\pi}$ – p-неперервне;

б) $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R}) \iff \varphi(X) \subseteq C_{2\pi}$ і $\varphi : X \to C_{2\pi}$ – u-неперервне.

Позначимо літерою T сукупність усіх тригонометричних поліномів $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тобто функцій вигляду

$$g(y) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos ky + b_k \sin ky).$$

Очевидно, що T – це підпростір простору $C_{2\pi}$.

Нехай $CT(X \times \mathbb{R})$ – це множина тих функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких функції $f_y : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ – неперервні для кожного $y \in \mathbb{R}$, а функції $f^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – це тригонометричні поліноми для кожного $x \in X$. Зрозуміло, що $CT(X \times \mathbb{R})$ – це підпростір простору $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$.

2 Апроксимуючі послідовності операторів

Послідовність операторів $A_n : C_{2\pi} \to T$ ми називаємо *апроксимуючою* для T, якщо $A_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожної функції $g \in C_{2\pi}$.

Нехай $\alpha = p, u$ і $\beta = p, u$. Апроксимуючу послідовність операторів $A_n : C_{2\pi} \to T$ ми називатимемо *$\alpha\beta$-апроксимуючою*, якщо всі оператори A_n є *$\alpha\beta$-неперервними.*

Кожний оператор $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ породжує перетворення

$$\widetilde{A} : CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \to CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}),$$

яке кожній функції $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ ставить у відповідність функцію $\widetilde{f} = \widetilde{A}f$, що визначається на $X \times \mathbb{R}$ формулою

$$\widetilde{f}(x, y) = (Af^x)(y).$$

Нехай $\varphi(x) = f^x$ і $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{f}^x$ для кожного $x \in X$, де $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $\widetilde{f} = \widetilde{A}f$. Зрозуміло, що тоді

$$\widetilde{\varphi} = A \circ \varphi.$$

З теореми про неперервність композиції випливає, що відображення $\widetilde{\varphi}$ буде u-неперервним, коли φ – p-неперервне і A – pu-неперервне або φ – u-неперервне і A – uu-неперервне. Звідси, використовуючи теорему 2, негайно отримуємо такий результат.

Теорема 3. *а) Нехай $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – pu-неперервний оператор, $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $\widetilde{f} = \widetilde{A}f$. Тоді $\widetilde{f} \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$.*

б) Нехай $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – uu-неперервний оператор, $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$ і $\widetilde{f} = \widetilde{A}f$. Тоді $\widetilde{f} \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$.

З цієї теореми легко виводиться наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність операторів $A_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $f_n = \widetilde{A}_n f$. Тоді:*

а) якщо $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – pu-апроксимуюча послідовність операторів для T, то $f_n \in CT(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$ для кожного n і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$;

б) якщо $f \in C(X \times \mathbb{R})$ і $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – uu-апроксимуюча послідовність операторів для T, то $f_n \in CT(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$ для кожного n і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.

Доведення. Оскільки $A_n(C_{2\pi}) \subseteq T$, то $f_n \in CT(X \times \mathbb{R})$. Сукупна неперервність функцій f_n у кожному випадку випливає з теореми 3. Нарешті,

$$f_n^x = A_n(\varphi(x)) \rightrightarrows \varphi(x) = f^x \text{ на } \mathbb{R}$$

для кожного $x \in X$, бо послідовність операторів A_n є апроксимуючою. □

3 Оператори Фейєра

В теорії рядів Фур'є важливу роль відіграють *ядра Діріхле*:

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt,$$

і *ядра Фейєра*:

$$K_n(t) = \frac{2}{n+1}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t),$$

які є тригонометричними многочленами. Через ядро Діріхле D_n виражається n-та частинна сума

$$(S_n g)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ряду Фур'є функції $g \in C_{2\pi}$ за формулою [8, с. 381]:

$$(S_n g)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(g(x+t) + g(x-t))D_n(t)dt,$$

а через ядра Фейєра записуються середні арифметичні таких сум [7, с.751]:

$$(F_n g)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(S_k g)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(g(x+t) + g(x-t))K_n(t)dt.$$

Добре відомо [7, с. 526; с. 752], що $S_n g \to g$ поточково для кожної кусково диференційовної функції $g \in C_{2\pi}$, і $F_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожної функції $g \in C_{2\pi}$.

Оператори F_n називаються *операторами Фейєра*. Оскільки $F_n g \in T$ для кожного n і $F_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожної функції $g \in C_{2\pi}$, то $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — це апроксимуюча послідовність операторів для підпростору T всіх тригонометричних поліномів.

Для операторів Фейєра вживається ще й така форма їх задання для функцій $g \in C_{2\pi}$:

$$(F_n g)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+t)K_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)K_n(y-x)dy.$$

Це випливає з того, що підінтегральна функція – неперервна та 2π-періодична.

Крім того, легко пояснити, що ядро Фейєра K_n має такі властивості:

1) $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$;

2) $K_n(t) \geq 0$ і $K_n(-t) = K_n(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$;

3) $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$.

Нескладно перевірити, що оператори Фейєра $F_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ є uu-неперервними. Справді, F_n – це лінійний оператор і для кожної функції $g \in C_{2\pi}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$

$$|F_n g(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)| K_n(t)dt \leq \frac{\|g\|}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \|g\|,$$

звідки випливає нерівність $\|F_n g\| \leq \|g\|$, яка забезпечує неперервність оператора F_n у нормованому просторі $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$. Оскільки $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_u$, то оператори F_n будуть і up-неперервними.

Таким чином, ми отримуємо наступний результат.

Теорема 5. *а) Оператори Фейєра $F_n : C_{2\pi} \to T$ утворюють uu-апроксимуючу послідовність для підпростору T всіх тригонометричних поліномів.*

б) Для довільного топологічного простору X і кожної сукупно неперервної і 2π-періодичної відносно другої змінної функції $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функції

$$f_n(x,y) = (F_n f^x)(y)$$

сукупно неперервними, $f_n^x \in T$ для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ та $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для довільного $x \in X$.

Дослідимо, чи будуть оператори F_n – pu-неперервними.

Лема. *Нехай $K \in C_{2\pi}$, $K(t) \geq 0$ на $\mathbb{R}$, $K(0) > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$. Тоді функціонал*

$$\Phi(g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t) K(t - t_0) dt$$

є розривним на просторі $(C_{2\pi}, \mathcal{T}_p)$.

Доведення. Знайдемо таку точку $a \in [-\pi, \pi)$, що $t_0 = a + 2m\pi$ для деякого цілого m. Нехай $\eta = \frac{K(0)}{2}$. Очевидно, що $0 < \eta < K(0)$. Оскільки функція K неперервна в нулі, то існує таке $\delta > 0$, що $a + \delta < \pi$ і $K(t) \geq \eta$, як тільки $a \leq t \leq a + \delta$. Для кожного номера n покладемо $b_n = a + \frac{\delta}{n}$ і розглянемо функцію $g_n \in C_{2\pi}$, графіком якої на відрізку $[-\pi, \pi]$ є ламана з вершинами у точках $(-\pi, 0)$, $(a, 0)$, $(a + \frac{b_n - a}{2}, n)$, $(b_n, 0)$ та $(\pi, 0)$. Очевидно, що $g_n(t) \to 0$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, бо $b_n \to a$ при $n \to \infty$. Але, оскільки $K(t - t_0) = K(t - a)$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, то

$$\Phi(g_n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_n(t) K(t - t_0) dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_n(t) K(t - a) dt$$

$$= \int\limits_a^{b_n} g_n(t)K(t-a)dt \geq \eta \int\limits_a^{b_n} g_n(t)dt = \eta \frac{n(b_n - a)}{2} = \frac{\delta\eta}{2} > 0$$

для кожного n. Отже, $\Phi(g_n) \nrightarrow 0$. Це і показує нам, що функціонал Φ – розривний в топології $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності. □

Звідси легко виводиться наступна теорема.

Теорема 6. *Оператори Фейєра F_n не є pp-неперервними, а отже, і pu-неперервними.*

Доведення. Оскільки

$$(F_n g)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)K_n(y-x)dy,$$

функція $K = \frac{1}{\pi}K_n$ належить до простору $C_{2\pi}$ і $K(0) = \frac{n+1}{2\pi} > 0$, то згідно з лемою, для кожного $x \in \mathbb{R}$ функціонал

$$\Phi_x(g) = (F_n g)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)K_n(y-x)dy$$

не є p-неперервним на $C_{2\pi}$. Тому і оператор F_n – не pp-неперервний, адже його pp-неперервність рівносильна p-неперервності всіх функціоналів Φ_x, а у нас жоден з них не є таким. □

4 Оператори Джексона

Розіб'ємо відрізок $[0, 2\pi]$ на $n+1$ рівних частин точками $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$. Нехай $0 \leq a_0 \leq x_1$ і $a_k = a_0 + kd$ при $k = 1, \dots, n$, де $d = \frac{2\pi}{n+1}$. Точки $a_0, a_1, \dots, a_n$ – рівномірно розподілені на відрізку $[0, 2\pi]$, $a_{k+1} - a_k = d$ і $x_k \leq a_k \leq x_{k+1}$ при $k = 0, 1, \dots, n$.

Для функції $g \in C_{2\pi}$, номера n і числа $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$(J_n g)(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} g(a_k)K_n(x - a_k),$$

де K_n – ядро Фейєра. Оскільки K_n – це тригонометричний поліном, то і $J_n g$ – теж тригонометричний поліном. Таким чином, ми визначили відображення $J_n : C_{2\pi} \to T$, які, очевидно, будуть лінійними. Відображення J_n – це *оператори Джексона*, а функції $J_n g$ – *поліноми Джексона* для функції g. Відомо, що $J_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожної функції $g \in C_{2\pi}$ [4, с.36]. Це доводиться за допомогою інтегрального зображення операторів Джексона через інтеграл Стілт'єса

$$(J_n g)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)K_n(y-x)d\omega_{n+1}(y),$$

де $\omega_{n+1}(y) = kd$, якщо $a_k < y \leq a_{k+1}$, і $d = \frac{2\pi}{n+1}$.

Теорема 7. *а) Оператори Джексона $J_n : C_{2\pi} \to T$ утворюють pu-апроксимуючу послідовність для T.*

б) Для довільного топологічного простору X та кожної функції $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ функції

$$f_n(x, y) = (J_n f^x)(y)$$

є сукупно неперервними і належать до простору $CT(X \times \mathbb{R})$, причому $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.

Доведення. а) Для довільних точок $y_1, \ldots, y_n$ з $\mathbb{R}$ і функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ з простору $C_{2\pi}$ формулою

$$(Ag)(y) = \sum_{k=1}^{n} g(y_k)\varphi_k(y)$$

визначається функція $Ag \in C_{2\pi}$, і ми отримуємо оператор $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, який, очевидно, є лінійним. Для кожного $g \in C_{2\pi}$ маємо

$$\|Ag\| \le \gamma \max_{k=1,\ldots,n} |g(y_k)| = \gamma \max_{k=1,\ldots,n} q_{y_k}(g),$$

де $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|$. Звідси випливає, що оператор A є *pu*-неперервним [5, с.12].

Зрозуміло, що оператори Джексона J_n належать до розглянутого нами типу. Отже, вони – *pu*-неперервні. Оскільки $J_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожного $g \in C_{2\pi}$ і $\mathrm{im} J_n \subseteq T$, то твердження а) доведене.

Твердження б) випливає з твердження а) і теореми 4. □

5 Застосування операторів Бернштейна

У цьому розділі ми побудуємо *pu*-апроксимуючу послідовність операторів $G_n : C_{2\pi} \to T$ для T, виходячи з многочленів Бернштейна $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ (див. п.1). При цьому ми просто перекладемо на операторну мову доведення другої теореми Вейєрштрасса з книги [8, с. 398].

Нехай $P[a,b]$ – простір усіх алгебраїчних поліномів на відрізку $[a,b]$. Оператори B_n діють з $C[0,1]$ в $P[0,1]$ і є *pu*-неперервними. При цьому $B_n f \rightrightarrows f$ на $[0,1]$ для кожного $f \in C[0,1]$.

Для лінійної функції $\varphi : [0,1] \to [-1,1]$, $\varphi(x) = 2x - 1$, розглянемо оператор композиції $U : C[-1,1] \to C[0,1]$, $Uf = f \circ \varphi$. Функція $y = \varphi(x)$ має обернену функцію $x = \varphi^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+1)$, яка теж є лінійною, а тому U має обернений оператор $U^{-1} : C[-1,1] \to C[0,1]$, який діє за правилом $U^{-1}g = g \circ \varphi^{-1}$. Покладемо

$$C_n = U^{-1} B_n U.$$

Оскільки заміна змінних – лінійна, то $U^{-1}(P[0,1]) \subseteq P[-1,1]$, отже, $\mathrm{im}\, C_n \subseteq P[-1,1]$. При цьому оператори U і U^{-1} є одночасно *pp*- і *uu*-неперервними, отже, C_n – це *pu*-неперервні оператори, які діють з $C[-1,1]$ в $P[-1,1]$. Крім того, $C_n f \rightrightarrows U^{-1}Uf = f$ на $[-1,1]$ для кожного $f \in C[-1,1]$, бо оператор U^{-1} є *uu*-неперервним.

Позначимо через $C_{2\pi}^{+}$ $\left(C_{2\pi}^{-}\right)$ підпростір всіх парних (непарних) функцій з $C_{2\pi}$. Нехай $\psi(t) = \arccos t$. Відображення $\psi : [-1,1] \to [0,\pi]$ є гомеоморфізмом з оберненим відображенням $\psi^{-1}(x) = \cos x$. Нехай $Vf = f \circ \psi$. Оператор $V : C[0,\pi] \to C[-1,1]$ має обернений. Ним буде оператор $V^{-1}g = g \circ \psi^{-1}$. Обидва оператори V і V^{-1} – *pp*- і *uu*-неперервні. Крім того, якщо $g \in P[-1,1]$ і $f = V^{-1}g$, то $f(x) = g(\cos x)$ при $0 \le x \le \pi$. Звідки легко вивести, що у цьому випадку f – це звуження деякого парного тригонометричного многочлена на відрізку $[0,\pi]$, тобто елемент простору $T^{+}[0,\pi]$, що за означенням складається з усіх звужень функцій з $T \cap C_{2\pi}^{+}$. Розглянемо оператор звуження $R : C_{2\pi} \to C[0,\pi]$, $Rf = f|_{[0,\pi]}$ і оператор продовження $P : C[0,\pi] \to C_{2\pi}$, який ставить у відповідність кожній функції $g \in C[0,\pi]$ ту єдину функцію $f \in C_{2\pi}^{+}$, що $f|_{[0,\pi]} = g$. Обидва оператори R і P є *pp*- і *uu*-неперервними, причому $PRf = f$, якщо $f \in C_{2\pi}^{+}$. Покладемо

$$D_n = PV^{-1}C_nVR.$$

Оператор $D_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ є *pu*-неперервним, бо оператор $VR : C_{2\pi} \to C[-1,1]$ – *pp*-неперервний, оператор $C_n : C[-1,1] \to C[-1,1]$ – *pu*-неперервний і оператор $PV^{-1} : C[-1,1] \to C_{2\pi}$ – *uu*-неперервний. При цьому

$$\operatorname{im} D_n \subseteq PV^{-1}(\operatorname{im} C_n) \subseteq PV^{-1}(P[-1,1]) \subseteq P(T^{+}[0,\pi]) \subseteq T \cap C_{2\pi}^{+}$$

і для кожного $f \in C_{2\pi}^{+}$

$$D_n f \rightrightarrows PV^{-1}VRf = PRf = f \text{ на } \mathbb{R}.$$

Введемо оператори $K : C_{2\pi} \to C_{2\pi}^{+}$ і $L : C_{2\pi} \to C_{2\pi}^{-}$, визначивши

$$(Kf)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{і} \quad (Lf)(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

для довільних $f \in C_{2\pi}$ і $x \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $K + L = I$, де I – тотожний оператор. Оператори K і L є *pp*- і *uu*-неперервними. Нехай $M : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – оператор множення на синус, а $N : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – оператор множення на косинус, тобто

$$(Mf)(x) = f(x)\sin x \quad \text{і} \quad (Nf)(x) = f(x)\cos x$$

для $f \in C_{2\pi}$ і $x \in \mathbb{R}$. Оператори M та N теж одночасно *pp*- і *uu*-неперервні. Зауважимо, що $M(T) \subseteq T$ і $N(T) \subseteq T$, причому $M(C_{2\pi}^{-}) \subseteq C_{2\pi}^{+}$. Покладемо тепер

$$E_n = M^2 D_n K + M D_n M L.$$

Зрозуміло, що $E_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ — це *pu*-неперервний оператор, причому $\operatorname{im} E_n \subseteq T$. Для кожного $f \in C_{2\pi}$ будемо мати, що $Kf \in C_{2\pi}^{+}$ і $MLf \in C_{2\pi}^{+}$. Тому

$$E_n f = M^2 D_n K f + M D_n M L f \rightrightarrows M^2 K f + MMLf = M^2(Kf + Lf) = M^2 f \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Розглянемо оператор $W : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, для якого $Wf = f \circ \sigma$, де $\sigma(x) = x + \frac{\pi}{2}$, і обернений до нього оператор W^{-1}, для якого $W^{-1}g = g \circ \sigma^{-1}$, де $\sigma^{-1}(x) = x - \frac{\pi}{2}$. Зрозуміло, що оператори W і W^{-1} є *pp*- і *uu*-неперервними, причому $W(T) \subseteq T$ і $W^{-1}(T) \subseteq T$. Покладемо

$$F_n = W^{-1} E_n W.$$

Очевидно, що $\operatorname{im} F_n \subseteq W^{-1}(\operatorname{im} E_n) \subseteq W^{-1}(T) \subseteq T$. Оператори F_n є *pu*-неперервними і для кожного $f \in C_{2\pi}$

$$F_n f = W^{-1} E_n W f \rightrightarrows W^{-1} M^2 W f \quad \text{на } \mathbb{R},$$

але

$$W^{-1} M^2 W f(x) = W^{-1} M^2 f(x + \frac{\pi}{2}) = W^{-1}[f(x + \frac{\pi}{2}) \sin^2 x]$$
$$= f(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \sin^2(x - \frac{\pi}{2}) = f(x) \cos^2 x = N^2 f(x).$$

Отже,

$$F_n f \rightrightarrows N^2 f \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Нарешті покладемо

$$G_n = E_n + F_n.$$

Оператор G_n є *pu*-неперервним, бо E_n і F_n є такими. Зрозуміло, що $\operatorname{im} G_n \subseteq T$, бо $\operatorname{im} E_n \subseteq T$ та $\operatorname{im} F_n \subseteq T$.

Далі, для кожного $f \in C_{2\pi}$

$$G_n f = E_n f + F_n f \rightrightarrows M^2 f + N^2 f = (M^2 + N^2) f = f \quad \text{на } \mathbb{R},$$

бо $M^2 + N^2 = I$, адже $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Таким чином, ми встановили такий результат.

Теорема 8. *Оператори $G_n : C_{2\pi} \to T$ утворюють pu-апроксимуючу послідовність для T.*

Цікаво виписати явну формулу, яка виражає оператори G_n через оператори Бернштейна B_n. Маємо:

$$G_n = E_n + F_n$$
$$= M^2 D_n K + M D_n M L + W^{-1} M^2 D_n K W + W^{-1} M D_n M L W$$
$$= M^2 P V^{-1} C_n V R K + M P V^{-1} C_n V R M L + W^{-1} M^2 P V^{-1} C_n V R K W$$
$$+ W^{-1} M P V^{-1} C_n V R M L W = M^2 P V^{-1} U^{-1} B_n U V R K$$
$$+ M P V^{-1} U^{-1} B_n U V R M L + W^{-1} M^2 P V^{-1} U^{-1} B_n U V R K W$$
$$+ W^{-1} M P V^{-1} U^{-1} B_n U V R M L W.$$

При цьому

$$E_n = M^2 P V^{-1} U^{-1} B_n U V R K + M P V^{-1} U^{-1} B_n U V R M L$$

і

$$G_n = E_n + W^{-1} E_n W.$$

Зауважимо, що в [7, с.698] наведено інше доведення теореми Вейєрштрасса про наближення функцій з $C_{2\pi}$ тригонометричними поліномами, що використовує ознаку Діріхле-Жордана рівномірної збіжності рядів Фур'є, але його не вдається пристосувати до доведення існування *pu*-апроксимуючої послідовності операторів $A_n : C_{2\pi} \to T$.

Література

1. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 336-337. – С. 52-59.
2. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *Наближення нарізно і сукупно неперервних функцій* // Всеукр. наук. семінар “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей. – Івано-Франківськ. – 2010. – С. 2-3.
3. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної* // Всеукр. наук. семінар “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей. – Івано-Франківськ. – 2010. – С. 27-28.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.2. – М.: Мир, 1965. – 538 с.
5. Маслюченко В.К. Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.
6. Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення і простори Кете* // Дис. докт. фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 1999. – 345 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.III. – М.-Л.: Гос. изд-во тех.-теор. л-ры, 1949. – 783 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т 2. – С.-Петербург-Москва-Краснодар: Лань, 2005. – 464 с.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна

Надійшло 7.04.2010

Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *On approximation of the separately continuous functions 2π-periodical in relation to the second variable*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 4–14.

Using Jackson's and Bernstein's operators we prove that for every topological space X and an arbitrary separately continuous function $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodical in relation to the second variable, there exists such sequence of jointly continuous functions $f_n : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that functions $f_n^x = f_n(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are trigonometric polynomials and $f_n^x \rightrightarrows f^x$ on $\mathbb{R}$ for every $x \in X$.

Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *О приближении раздельно непрерывных функций, 2π-периодических относительно второй переменной* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 4–14.

С помощью операторов Джексона и Бернштейна мы доказываем, что для каждого топологического пространства X и произвольной раздельно непрерывной функции $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-периодической относительно второй переменной, существует такая последовательность совокупно непрерывных функций $f_n : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой функции $f_n^x = f_n(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – это тригонометрические полиномы и $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для каждого $x \in X$.