Карпатські математичні публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №.1

УДК 517.5

Скасків О.Б., Куриляк А.О.

ПРЯМІ АНАЛОГИ НЕРІВНОСТІ ВІМАНА ДЛЯ ФУНКЦІЙ АНАЛІТИЧНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ

Скасків О.Б., Куриляк А.О. *Прямі аналоги нерівності Вімана для функцій аналітичних в одиничному крузі* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 109–118.

Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – аналітична функція в $\{z : |z| < 1\}$, $h \in H$ і $\Omega_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Якщо

$$\beta_{fh} = \varliminf_{r\to 1} \frac{\ln\ln \Omega_f(r)}{\ln h(r)} = +\infty,$$

тоді виконується нерівність Вімана $M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r)$ для всіх $r \in (r_0, 1)\backslash E(\delta)$, де $h - \mathrm{meas}\ E < +\infty$.

1 Вступ і формулювання результатів

Відома теорема Вімана-Валірона стверджує, що для кожної цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

і для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто $\int_E d\ln r < +\infty$) така, що $(\forall\ r \in (1, +\infty)\backslash E)$:

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r).$$

У 1929 – 1930 рр. П. Леві довів, що майже напевно у деякому ймовірнісному сенсі показник $1/2$ у цій нерівності можна замінити на $1/4$.

У подальшому, як сама нерівність Вімана, так і ефект виявлений Леві переносились на різні класи аналітичних функцій. Зокрема, Н. М. Сулейманов ([3]) встановлював аналоги нерівності Вімана у класі аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій, а П. В. Філевич ([2]) досліджував у цих випадках наявність ефектів типу Леві.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B20.

Ключові слова і фрази: нерівність Вімана, аналітичні функції.

© Скасків О.Б., Куриляк А.О., 2010

Теорема. *([3]) Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з радіусом збіжності $R(f) = 1$. Якщо $h \in H : \beta_{fh} > 0$, то $(\forall\, \delta > 0)$ $(\exists E(\delta, f, h) = E \subset (0,1))$ $(\exists r_0 \in (0,1))$ $(\forall\, r \in (r_0, 1)\backslash E)$*

$$M_f(r) \le \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\delta}} \ln^{1/2+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-r} \quad \text{та} \quad \int\limits_E \frac{dr}{1-r} < +\infty.$$

Разом з тим, у цих дослідженнях відсутні прямі аналоги нерівності Вімана, тому проведені у статті дослідження покликані заповнити цю прогалину. Отже, метою цієї статті є встановити, за яких умов у класі аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій правильна нерівність Вімана і дослідити наявність у цьому випадку ефекту Леві.

Нехай f – аналітична в одиничному крузі, яку можна подати у вигляді (1) з радіусом збіжності $R(f) = 1$. Припустимо, що f має максимум модуля $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ і максимальний член $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \ge 0\}$. Через H позначимо клас неперервних додатних на $(0,1)$ функцій, таких що $h(1-0) = +\infty$ і для деякого $r_0 \in (0,1)$

$$\int_{r_0}^1 h(r)dr = +\infty.$$

Позначимо

$$\Omega_f(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|r^n, \qquad \beta_{fh} = \varliminf_{r\to 1} \frac{\ln\ln \Omega_f(r)}{\ln h(r)}, \qquad \alpha_{fh} = \varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln\ln \Omega_f(r)}{\ln h(r)}.$$

Теорема 1. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f) = 1$. Якщо $h \in H$: $\beta_{fh} > 0$, то $(\forall\, \delta > 0)$ $(\exists E(\delta, f, h) = E \subset (0,1))$ $(\exists r_0 \in (0,1))$ $(\forall\, r \in (r_0, 1)\backslash E)$*

$$M_f(r) \le h(r)\mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r) \quad \text{та} \quad \int\limits_E h(r)dr < +\infty. \tag{2}$$

Зокрема, якщо $h \in H$ та $\beta_{fh} = +\infty$, то $\ln h(r) = o(\ln\ln \Omega_f(r))$ $(r \to 1)$, тому і у першій нерівності (2) множник $h(r)$ можна опустити. Тобто, правильним буде такий наслідок.

Наслідок 1.1. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f) = 1$. Якщо $h \in H$: $\beta_{fh} = +\infty$, то $(\forall\, \delta > 0)$ $(\exists E(\delta, f, h) = E \subset (0,1))$ $(\exists r_0 \in (0,1))$ $(\forall\, r \in (r_0, 1)\backslash E)$*

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r) \quad \text{та} \quad \int\limits_E h(r)dr < +\infty.$$

У випадку, коли $0 \le \alpha_{fh} < +\infty$, будуть справедливими такі твердження.

Теорема 2. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f) = 1$. Якщо $h \in H$: $0 \le \alpha_{fh} < +\infty$, то $(\forall\, \delta > 0)$ $(\exists E(\delta, f, h) = E \subset (0,1))$ $(\exists r_0 \in (0,1))$ $(\forall\, r \in (r_0, 1)\backslash E)$*

$$M_f(r) \le h(r)\mu_f(r)\{\ln h(r) \ln(h(r)\mu_f(r))\}^{1/2+\delta} \quad \text{та} \quad \int\limits_E h(r)dr < +\infty.$$

Через $K(f,Z)$ позначимо клас функцій вигляду

$$f(z,t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z_n(t) z^n, \tag{3}$$

де f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$, і $Z=\{Z_n(t)\}$ – послідовність випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі Штейнгауза (Ω, A, P). Тут $\Omega=[0,1]$, A – σ–алгебра вимірних за Лебегом підмножин Ω, P – міра Лебега на прямій. Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини $Z_n=X_n+iY_n$ обчислюються за формулами

$$MZ_n=\int_\Omega X_n P(dt)+i\int_\Omega Y_n P(dt), \quad DZ_n=M(|Z_n-MZ_n|^2).$$

Відповідно будемо говорити, що деяка властивість виконується *майже напевно в* $K(f,Z)$, якщо Лебегова міра тих $t\in(0,1)$, при яких $f(z,t)$ володіє цією властивістю, дорівнює одиниці.

Послідовність X дійсних випадкових величин називається *мультиплікативною системою (МС)*, якщо $MX_{i_1}X_{i_2}\dots X_{i_k}=0$ для довільних $i_1<i_2<\dots<i_k, k\geq 1$, а послідовність $Z_n=X_n+iY_n$ називається МС, якщо $X=(X_n)$ і $Y=(Y_n)\in$ МС. Позначимо

$$M_f(r,t)=\max\{|f(z,t)|, |z|=r\}.$$

Теорема 3. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$, Z є МС і $|Z_n|\leq 1$ для майже всіх $t\in(0,1)$. Якщо $h\in H:\beta_{fh}>0$, то майже напевно в $K(f,Z)$ $(\forall\ \varepsilon>0)$ $(\exists\ E(\varepsilon,t)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0(t)\in(0,1))$ $(\forall\ r\in(r_0(t),1)\backslash E)$:*

$$M_f(r,t)\leq\sqrt{h(r)}\mu_f(r)\ln^{1/4+\varepsilon}\mu_f(r) \quad \text{та} \quad \int\limits_E h(r)dr<+\infty.$$

Наслідок 1.2. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$, Z є МС і $|Z_n|\leq 1$ для майже всіх $t\in(0,1)$. Якщо $h\in H:\beta_{fh}=+\infty$, то майже напевно в $K(f,Z)$ $(\forall\ \varepsilon>0)$ $(\exists\ E(\varepsilon,t)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0(t)\in(0,1))$ $(\forall\ r\in(r_0(t),1)\backslash E)$:*

$$M_f(r,t)\leq\mu_f(r)\ln^{1/4+\varepsilon}\mu_f(r) \quad \text{та} \quad \int\limits_E h(r)dr<+\infty.$$

Прийнявши в теоремі 3 $h(r)=\ln^\beta\Omega_f(r)$, при $r\geq r_0$, $\beta>0$, отримаємо $\beta_{fh}=1/\beta>0$ та $M_f(r,t)\leq\mu_f(r)\ln^{1/4+\beta/2+\varepsilon}\mu_f(r)$. Отже, ми отримали такий наслідок.

Наслідок 1.3. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$, Z є МС і $|Z_n|\leq 1$ для майже всіх $t\in(0,1)$. Якщо $h\in H:\beta_{fh}\geq 2$, то майже напевно в $K(f,Z)$ $(\forall\ \varepsilon>0)$ $(\exists\ E(\varepsilon,t)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0\in(0,1))$ $(\forall\ r\in(r_0(t),1)\backslash E)$:*

$$M_f(r,t)\leq\mu_f(r)\ln^{1/2+\varepsilon}\mu_f(r) \quad \text{та} \quad \int\limits_E h(r)dr<+\infty.$$

2 Доведення теорем 1 і 2.

Доведення теореми 1. Нехай $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{nx}, x < 0$, і ξ – випадкова величина з розподілом
$$P(\xi = n) = \frac{1}{g(x)} |a_n| e^{nx}.$$
Тоді $M\xi = g_1'(x)$ і $D\xi = g_1''(x)$, де $g_1(x) = \ln g(x)$.

За нерівністю Чебишова отримуємо $P(|\xi - g_1'(x)| < \sqrt{2g_1''(x)}\ ) \geq 1/2$, тобто
$$g(x) \leq 2 \sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} |a_n| e^{xn}. \tag{4}$$

Приймемо $x = \ln r < 0$ у нерівності (4) і отримаємо
$$g(x) \leq 2\mu_f(r) \sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} 1.$$

Оскільки $g_1'(x) - \sqrt{2g_1''(x)} < n < g_1'(x) + \sqrt{2g_1''(x)}$, то
$$\sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} 1 = [g_1'(x) + \sqrt{2g_1''(x)}] - [g_1'(x) - \sqrt{2g_1''(x)}] \leq 2\sqrt{2g_1''(x)} + 1.$$

Отже,
$$g(x) \leq 2\mu_f(r)(2\sqrt{2g_1{}''(x)} + 1). \tag{5}$$

Нехай $\forall\ \varepsilon_1 > 0, \forall\ \varepsilon_2 > 0$
$$E_1 = \{x < 0 : g_1''(x) > h(e^x) g_1{}'(x)(\ln g_1'(x))^{1+\varepsilon_1},\ g_1'(x) \geq 2\},$$
$$E_2 = \{x < 0 : g_1'(x) > h(e^x)(g_1(x))^{1+\varepsilon_2},\ g_1(x) \geq 1\},$$
$$\int_{E_1} h(e^x)\ dx \leq \int_{E_1} \frac{g_1''(x)}{g_1'(x)(\ln g_1'(x))^{1+\varepsilon_1}}\ dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^{1+\varepsilon_1}} < +\infty,$$
$$\int_{E_2} h(e^x) dx \leq \int_{E_2} \frac{g_1{}'(x)}{(g_1(x))^{1+\varepsilon_2}} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon_2}} < +\infty.$$

Тоді,
$$\int_{E_1 \bigcup E_2} h(e^x) dx = \int_E \frac{h(r)}{r} dr < +\infty,$$
де $E-$ образ множини $E_1 \bigcup E_2$ при відображенні $r = e^x$. Очевидно, що $h - \mathrm{meas} E = = \int_E h(r) dr < +\infty$.

Тоді з (5) при $r \notin E$ отримаємо
$$g(\ln r) \leq 2\mu_f(r)(2\sqrt{2g_1''(x)} + 1) \leq 2\mu_f(r)(2\sqrt{2}\sqrt{h(e^x) g_1'(x) \ln^{1+\varepsilon_1} g_1'(x)} + 1)$$
$$\leq 4\mu_f(r) \left(\sqrt{2h^2(e^x) g_1^{1+\varepsilon_2}(x)} \ln^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}} (h(e^x) g_1^{1+\varepsilon_2}(x)) + 1 \right)$$

$$= 4\mu_f(r)\left(h(r)\sqrt{2g_1^{1+\varepsilon_2}(x)}\ln^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}(h(r)g_1^{1+\varepsilon_2}(x))+1\right)$$

$$\leq 16\mu_f(r)h(r)g_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2}}(x)\left(\ln h(r)+(1+\varepsilon_2)\ln g_1(x)\right)^{\frac{1+2\varepsilon_1}{2}}. \tag{6}$$

Врахувавши, що $\exists\varepsilon_0>0:\ln h(r)<(\beta_{fh}-\varepsilon_0)^{-1}\ln g_1(x)$, отримаємо

$$g(x)\leq C(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\beta_{fh})h(r)\mu_f(r)g_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}(x)(\ln g_1(x))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\leq C_1h(r)\mu_f(r)g_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon_3}(x), \tag{7}$$

$$g_1(x)=\ln g(x)\leq \ln C_1+\ln\mu_f(r)+\ln h(r)+(0{,}5+\varepsilon)\ln g_1(x)$$

$$\leq \ln C_1+\ln\mu_f(r)+C_2\ln g_1(x).$$

Отже, $g_1(x)-\ln C_1-C_2\ln g_1(x)\leq\ln\mu_f(r),\ g_1(x)\leq 2\ln\mu_f(r),\ r\to 1$.
Тоді з (7) отримаємо

$$g(x)\leq C_1h(r)\mu_f(r)(2\ln\mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_3}\leq h(r)\mu_f(r)\ln^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\mu_f(r).$$

Оскільки $M_f(r)\leq g(\ln r)$, то

$$M_f(r)\leq h(r)\mu_f(r)\ln^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\mu_f(r).$$

$\square$

Доведення теореми 2. Аналогічно, як і у доведенні теореми 1, при $r\notin E$ отримуємо нерівність

$$g(\ln r)\leq 16\mu_f(r)h(r)g_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2}}(x)\left(\ln h(r)+(1+\varepsilon_2)\ln g_1(x)\right)^{\frac{1+2\varepsilon_1}{2}}.$$

Враховуючи, що $\exists\varepsilon_0>0:\ln g_1(x)<(\alpha_{fh}+\varepsilon_0)\ln h(r)$, отримаємо

$$g(x)\leq C(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\alpha_{fh})h(r)\mu_f(r)g_1^{\frac{1+\varepsilon}{2}}(x)(\ln h(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\leq Ch(r)(\ln h(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\mu_f(r)g_1^{\frac{1+\varepsilon}{2}}(x).$$

$$g_1(x)=\ln g(x)\leq\ln C+\ln\mu_f(r)+(1+\varepsilon_0)\ln h(r)+0{,}5(1+\varepsilon)\ln g_1(x).$$

Отже,

$$g_1(x)-\ln C-(0{,}5+\varepsilon)\ln g_1(x)\leq\ln\mu_f(r)+(1+\varepsilon_0)\ln h(r),$$

$$g_1(x)\leq 2(\ln\mu_f(r)+\ln h(r))=2\ln(h(r)\mu_f(r)),\quad r\to 1.$$

$$g(x)\leq Ch(r)(\ln h(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\mu_f(r)(2\ln(h(r)\mu_f(r)))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\leq h(r)\mu_f(r)\{\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\}^{1/2+\delta}.$$

Тому

$$M_f(r)\leq h(r)\mu_f(r)\{\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\}^{1/2+\delta}.$$

$\square$

3 Допоміжні результати

Лема 3.1. *Нехай $g_0(s)$ – додатна, диференційовна, неспадна на $(s_0, 0)$ функція, а $\varphi(x)$ – додатна, неперервна, зростаюча на $[0, +\infty)$ функція, така що $\int_o^{+\infty} \frac{dx}{\varphi(x)} < +\infty$. Якщо $h \in H$, то $(\exists E \subset (0,1))$ $(\forall\ r \in (e^{s_0}, 1) \backslash E)$*

$$g_0'(\ln r) \le h(r)\varphi(g_0(\ln r)) \quad \text{та} \quad \int\limits_E h(r)dr < +\infty.$$

Доведення. Нехай $E \subset (0,1)$ – множина, на якій

$$g_0'(\ln r) > h(r)\varphi(g_0(\ln r)).$$

Позначимо $F = \{r \in E : r \ge e^{s_0}\}, \quad H = \{x : e^x \in F\}$. Тоді

$$h - \text{meas} E = \int\limits_E h(r)dr \le C + \int\limits_F h(r)dr \le C + \int\limits_F \frac{g_0'(\ln r)dr}{\varphi(g_0(\ln r))r}$$

$$= C + \int\limits_H \frac{g_0'(x)dx}{\varphi(g_0(x))} = C + \int\limits_{g_0(H)} \frac{dx}{\varphi(x)} < +\infty.$$

□

Позначимо $g_1(x) = \ln \Omega_f(e^x)$.

Лема 3.2. *Нехай $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – додатні, неперервні, зростаючі функції на $[0, +\infty)$: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\varphi_i(x)} < +\infty$, $h \in H$. Тоді $(\exists E \subset (0,1))$ $(\exists r_0 \in (0,1))(\forall\ r \in (r_0, 1) \backslash E)$*

$$g_1''(\ln r) \le h(r)\varphi_2(h(r)\varphi_1(g_1(\ln r))) \quad \text{та} \quad \int\limits_E h(r)dr < +\infty.$$

Доведення. Очевидно, що функції $g_1(\ln r)$ і $g_1'(\ln r)$ задовольняють умови леми 3.1, тому

$$\forall\ r \in (r_0, 1) \backslash E_1 : \int\limits_{E_1} h(r)dr < +\infty \qquad g_1'(\ln r) \le h(r)\varphi(g_1(\ln r)),$$

$$\forall\ r \in (r_0, 1) \backslash E_2 : \int\limits_{E_2} h(r)dr < +\infty \qquad g_1''(\ln r) \le h(r)\varphi(g_1'(\ln r)).$$

Отже, для $r \notin E_1 \bigcup E_2 : h - \text{meas } E_1 \bigcup E_2 < +\infty$ отримаємо

$$g_1''(\ln r) \le h(r)\varphi_2(h(r)\varphi_1(g_1(\ln r))).$$

□

Позначимо $g_1(x) = \ln \Omega_f(e^x)$,

$$A(r) = g_1'(\ln r) = \frac{d \ln \Omega_f(r)}{d \ln r} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n|a_n|r^n}{\Omega_f(r)}, \quad B^2(r) = g_1''(\ln r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2|a_n|r^n}{\Omega_f(r)} - A^2(r).$$

Лема 3.3. $(\forall\ \varepsilon>0)$ $(\exists E\subset(0,1))$ $(\exists r_0\in(0,1))(\forall\ r\in(r_0,1)\backslash E)$

$$A(r)\le h(r)\ln\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon},$$

$$B^2(r)\le h^2(r)\ln\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{2+\varepsilon}\ \text{ та }\ \int_E h(r)dr<+\infty,$$

як тільки виконується умова $\beta_{fh}>0$.

Доведення. Виберемо в лемі 3.1 $\varphi(x)=(x+2)\ln^{1+\varepsilon_0}(2+x)$ і при $r\ge r_0$ отримаємо

$$g_1'(\ln r)=A(r)\le h(r)\varphi(g_1(\ln r))\le h(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_1}g_1(\ln r),$$

$$A(r)\le h(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_1}g_1(\ln r). \tag{8}$$

Тепер виберемо в лемі 3.2 $\varphi_1(x)=(x+2)\ln^{1+\varepsilon_{02}}(2+x)$ та $\varphi_2(x)=(x+2)\ln^{1+\varepsilon_{03}}(2+x)$, і при $r\ge r_0$ отримаємо

$$\begin{gathered}B^2(r)\le h(r)\varphi_2(h(r)\varphi_1(g_1(\ln r)))\le h^2(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_2}g_1(\ln r)\\ \times\{\ln(h(r)g_1(\ln r)(g_1(\ln r))^{1+\varepsilon_2})\}^{1+\varepsilon_3}\le h^2(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_2}g_1(\ln r)\\ \times(\max\{\ln h(r),2\ln g_1(\ln r)\})^{1+\varepsilon_4}.\end{gathered} \tag{9}$$

Тепер, використавши теорему 1, маємо

$$\begin{gathered}g_1(\ln r)=\ln\Omega_f(r)\le\ln h(r)+\ln\mu_f(r)+(0,5+\varepsilon)\ln\ln\mu_f(r)\\ \le C\ln\ln\Omega_f(r)+(1+o(1))\ln\mu_f(r),\ \text{при } r\to 1-0.\end{gathered}$$

$$\ln\Omega_f(r)\le C_1\ln\mu_f(r)\Rightarrow g_1(\ln r)\le C_1\ln\mu_f(r),\ \ln\ln\Omega_f(r)<C_2\ln\ln\mu_f(r). \tag{10}$$

Підставивши (10) в (8), отримаємо першу нерівність леми. З (9), врахувавши (10), одержимо

$$B^2(r)\le C_3h^2(r)\ln\mu_f(r)\ (\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon_2}(\max\{C_4\ln\ln\Omega_f(r),2\ln\ln\mu_f(r)\})^{1+\varepsilon_4},$$

$$B^2(r)\le h^2(r)\ln\mu_f(r)\ (\ln\ln\mu_f(r))^{2+\varepsilon}.$$

□

Лема 3.4. *([1]) X є МС, яка рівномірно обмежена числом 1. Тоді* $\forall\ \{b_k\}\subset\mathbb{Z}$ *і* $\forall\ \beta>0$

$$P\left(\max_{0\le\psi\le2\pi}\left|\sum_{k=0}^N b_ke^{ik\psi}X_k(t)\right|\ge A_\beta S_N\ln^{1/2}N\right)\le\frac{1}{N^\beta},\ N\ge2,$$

A_β *– стала, залежна від* β, $\quad S_N^2=\sum_{k=0}^N|b_k|^2$.

Лема 3.5. *([2]) Нехай* $l(r)$ *– неперервна, зростаюча до* $+\infty$ *на* $(0,1)$ *функція, а відкрита множина* $E\subset(0,1)$ *така, що існує* $0<p_1\le...\le p_n\to1$ $(n\to+\infty)$ *зовні* E. *Тоді існує нескінченна послідовність* $0<r_1\le...\le r_n\to1$ $(n\to+\infty)$:

(1) $(\forall n\in\mathbb{N})$: $r_n\notin E$;

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}):\ \ln l(r_n) \geq \frac{n}{2}$;

(3) $(r_n; r_{n+1}) \cap E \neq (r_n, r_{n+1})$, $l(r_{n+1}) \leq el(r_n)$.

Лема 3.6. $\forall\ r \in (0,1) \qquad \Omega_f(r) \leq (3\sqrt{3}B(r) + 3/2)\mu_f(r)$.

Доведення. За нерівністю Чебишова для деякого $C > 0$ отримаємо

$$\Omega_f(r) \leq \frac{C}{C-1} \sum_{|n-A(r)| \leq \sqrt{CB^2(r)}} |a_n|r^n \leq \frac{C}{C-1}\mu_f(r)([A(r)+\sqrt{CB^2(r)}]-[A(r)+\sqrt{CB^2(r)}]+1),$$

тобто

$$\Omega_f(r) \leq \frac{C}{C-1}(2\sqrt{C}B(r)+1)\mu_f(r).$$

Залишається вибрати в останній нерівності $C = 3$. □

4 Доведення теореми 3

Доведення теореми 3. Розглянемо випадкову величину ξ з розподілом ймовірностей $P(\xi = n) = |a_n|r^n/\Omega_f(r)$. Легко перевірити, що математичне сподівання $M\xi = A(r)$, а дисперсія $D\xi = B^2(r)$. Нехай $C(r) = A(r)h(r)\ln\mu_f(r)$. За нерівністю Маркова

$$\sum_{n \geq C(r)} \frac{|a_n|r^n}{\Omega_f(r)} = P\{\xi \geq C(r)\} \leq \frac{M\xi}{C(r)} = \frac{A(r)}{C(r)} = \frac{1}{h(r)\ln\mu_f(r)}. \tag{11}$$

Нехай множина E – множина, зовні якої виконуються нерівності з вище наведених лем і нерівність теореми 1. За лемою 3.3 $B^2(r) \leq h^2(r)(\ln\mu_f(r))^{5/4}$, тому за лемою 3.6 маємо

$$\sum_{n \geq C(r)} |a_n|r^n \leq \frac{\Omega_f(r)}{h(r)\ln\mu_f(r)} \leq \frac{(3\sqrt{3}B(r)+3/2)\mu_f(r)}{h(r)\ln\mu_f(r)} \leq \frac{C\mu_f(r)}{\ln^{3/8}\mu_f(r)} \leq C_1\mu_f(r).$$

За лемою 3.3 при $r \to 1$ ($r \notin E$)

$$C(r) = h(r)A(r)\ln\mu_f(r) \leq h^2(r)\ln^2\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon} \leq h^2(r)\ln^{2+\varepsilon}\mu_f(r) \stackrel{def}{=} C_1(r),$$

де $\varepsilon > 0$. Прийнявши $\tilde{C}_1(r) = \max\{C_1(r), \ln^3\mu_f(r) + \ln^2 h(r)\}$, отримаємо

$$\sum_{n \geq \tilde{C}_1(r)} |a_n|r^n \leq \sum_{n \geq C(r)} |a_n|r^n \leq C\mu_f(r).$$

Виберемо тепер у лемі 3.5

$$l(r) = \mu_f(r)\sqrt{h(r)}\ln^{\frac{1}{4}+\frac{6}{7}\varepsilon}\mu_f(r).$$

Якщо (r_k) – послідовність з леми 3.5, то нехай F_k – множина тих $t \in [0;1]$, для яких

$$\max\left\{\Big|\sum_{n \leq [\tilde{C}_1(r_k)]} a_n r^n e^{in\psi}X_n(t)\Big| :\ 0 \leq \psi \leq 2\pi\right\} \geq A_\beta S_{[\tilde{C}_1(r_k)]}(r_k)\ln^{1/2}[\tilde{C}_1(r_k)].$$

Зауважимо тепер, що $\ln l(r) \leq \ln^{3/2}\mu_f(r) + \ln h(r)$ для всіх $r > r_1$, тому $\tilde{C}_1(r) \geq \ln^3\mu_f(r) + \ln^2 h(r)$ і $\tilde{C}_1(r_k) \geq 0{,}5\ln^2 l(r_k) \geq 0{,}5(k/2)^2$ для всіх $k > k_0$. Тоді за лемою 3.4 при $\beta = 1$, отримаємо

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} P(F_k) \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{1}{[\tilde{C}_1(r_k)]} \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{2}{([k/2])^2} < +\infty.$$

Звідси, за лемою Бореля-Кантелі серед подій F_k з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна кількість подій. Нехай F – подія, яка полягає в тому що, серед подій F_k відбувається нескінченна кількість подій. Тоді $F = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} F_k$, і за лемою Бореля-Кантелі $P(\overline{F}) = 1$. Зауважимо, що $\overline{F} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} F_k$ і $P\big([0;1] \setminus \overline{F}\big) = 0$, тобто для майже всіх $t \in [0;1]$ маємо $t \in \overline{F}$. Тому існує таке $k_0(t)$, що $t \in \bigcap_{k=k_0(t)}^{+\infty} \overline{F_k}$, звідки, для всіх $k \geq k_0(t)$ отримаємо $t \in \overline{F_k}$. Отже для майже всіх $t \in [0;1]$ при $k \geq k_0(t)$

$$W(r_k) \stackrel{\text{def}}{=} \max\bigg\{\Big|\sum_{n \leq [\tilde{C}_1(r_k)]} a_n r^n e^{in\psi} X_n(t)\Big| : \ 0 \leq \psi \leq 2\pi\bigg\}$$
$$\leq A_1 S_{[\tilde{C}_1(r_k)]}(r_k) \ln^{1/2}[\tilde{C}_1(r_k)].$$

Оскільки

$$S_N^2(r) = \sum_{k=0}^{N} |a_k|^2 r^{2k} \leq \mu_f(r) \sum_{k=0}^{N} |a_k| r^k \leq \mu_f(r)\Omega_f(r),$$

то, враховуючи нерівність (3), отримуємо

$$W(r_k) \leq A_1\big(\mu_f(r_k)\Omega_f(r_k)\big)^{1/2} \ln^{1/2}\widetilde{C_1}(r_k) \leq A_1\mu_f(r_k)\sqrt{h(r_k)}\ln^{1/4+\varepsilon/2}\mu_f(r_k)\ln^{1/2}\widetilde{C_1}(r_k).$$

Зауважимо, що для довільного досить малого $\delta > 0$

$$\ln\widetilde{C_1}(r) = \max\{2\ln h(r) + (2+\varepsilon)\ln\ln\mu_f(r), \ln(\ln^3\mu_f(r) + \ln^2 h(r))\}$$
$$\leq 2\ln h(r) + 3\ln\ln\mu_f(r) \leq C\ln\ln\Omega_f(r) + 3\ln\ln\mu_f(r) \leq \ln^{2\delta}\mu_f(r) \quad (r \to 1).$$

Вибираючи $\delta < \frac{\varepsilon}{6}$, при $k \to +\infty$ отримаємо

$$W(r_k) \leq A_1\mu_f(r_k)\sqrt{h(r_k)}\ln^{\frac{1}{4}+\frac{2\varepsilon}{3}}\mu_f(r_k).$$

Оскільки $M_f(r,t) \leq W(r) + \sum_{n \geq \tilde{C}_1(r)} |a_n| r^n$, то для майже всіх $t \in [0;1]$ і для всіх $k \geq k(t)$

$$M_f(r_k,t) \leq A_1\sqrt{h(r_k)}\mu_f(r_k)\ln^{\frac{1}{4}+\frac{2\varepsilon}{3}}\mu_f(r_k) + C\mu_f(r_k)$$
$$\leq \sqrt{h(r_k)}\mu_f(r_k)\ln^{\frac{1}{4}+\frac{6\varepsilon}{7}}\mu_f(r_k).$$

Нехай тепер $r \geq r_{k(t)}$, $r_i \notin E$. Тоді існує p, для якого $r \in (r_p, r_{p+1})$. Врахувавши, що $(r_p, r_{p+1}) \cap E \neq (r_p, r_{p+1})$, то за лемою маємо, 3.5 $l(r_{p+1}) \leq el(r_p) \leq el(r)$. Оскільки, $l(r) = \sqrt{h(r)}\mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/4+6/7\varepsilon}$, при $r \to 1$ ($r \in (r_p, r_{p+1})$) отримуємо

$$M_f(r,t) \leq M_f(r_{p+1}, f) \leq l(r_{p+1}) \leq el(r)$$
$$= e\sqrt{h(r)}\mu_f(r)\ln^{1/4+6/7\varepsilon}\mu_f(r) \leq \sqrt{h(r)}\mu_f(r)\ln^{1/4+\varepsilon}\mu_f(r).$$

Теорему 3 доведено. □

Література

1. Кахан Ж.– П. Случайные функциональные ряды. – М: Мир, 1973. – 302с.
2. Скасків О.Б., Зрум О.В. *Про виняткову множину у нерівностях типу Вімана для цілих функцій* // Матем. Студії. – 2004. – Т.21, №1. – С.15–24.
3. Скасків О.Б. *Про класичну нерівність Вімана для цілих рядів Діріхле* // Вісн. Львів. ун–ту, сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.180–182.
4. Скасків О.Б., Філевич П.В.*Про величину виняткової множини у теоремі Вімана* // Матем. Студії. – 1999. – Т.12, №1. – С.31–36.
5. Сулейманов Н.В. *Оценка типу Вимана–Валирона для степенних рядов с конечным радиусом сходимости и их точность* // ДАН СССР.– 1980. – Т.253, №4. – С.822–824.
6. Філевич П.В. *Випадкові цілі функції* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Київ: Інст. мат. – 1996. – Вип. 12. – С.199–208.
7. Філевич П.В. *Оцінки типу Вімана-Валірона для випадкових аналітичних у крузі функцій* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Київ: Інст. мат. – 1997. – Вип.15. – С.227–238.
8. Філевич П.В. *Співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом для випадкових цілих функцій* // Матем. Студії. – 1997. – Т.7, №2. – С.165–174.
9. Jakubovski J., Kwapien S. *On multiplicative system of functions*, Bull. L'Acad. Polon. Sci, **27** (1979), 689–694.
10. Rosenbloom P.C. *Probability and entire functions*, Stud. Math. Anal. and Related Topics, Stanford: Calif. Univ. Press, (1962), 325–332.

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, Україна

Надійшло 05.07.2010

Skaskiv O.B., Kuryliak A.O. *Direct analogues of Wiman's inequality for analytic functions in the unit disc*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 109–118.

Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be an analytic function on $\{z : |z| < 1\}$, $h \in H$ and $\Omega_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. If

$$\beta_{fh} = \varliminf_{r\to 1} \frac{\ln\ln \Omega_f(r)}{\ln h(r)} = +\infty,$$

then Wiman's inequality $M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r)$ is true for all $r \in (r_0, 1)\backslash E(\delta)$, where $h-\text{meas } E < +\infty$.

Скаскив О.Б., Куриляк А.О. *Прямые аналоги неравенства Вимана для функций аналитических в единичном круге* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 109–118.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ аналитическая функция в $\{z : |z| < 1\}$, $h \in H$ и $\Omega_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Если

$$\beta_{fh} = \varliminf_{r\to 1} \frac{\ln\ln \Omega_f(r)}{\ln h(r)} = +\infty,$$

тогда имеет место неравенство Вимана $M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r)$ для всех $r \in (r_0, 1)\backslash E(\delta)$, где $h-\text{meas } E < +\infty$.