Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.98

Дмитришин М.І., Лопушанський О.В.

ПРОСТОРИ ТИПУ ЛОРЕНЦА УЛЬТРАГЛАДКИХ ВЕКТОРІВ ЗАМКНЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. *Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 8–14.

Визначено простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів в банахових просторах. Встановлено інтерполяційні властивості таких просторів та показано їх застосування до розв'язання проблеми наближення елементів банахового простору різними класами гладких векторів замкненого оператора.

Вступ

Простори ультрагладких векторів замкнених операторів над банаховими просторами визначено в роботі [4], де побудовано операторне числення на таких класах векторів. Розв'язанню проблеми наближення елементів банахового простору різними класами гладких векторів замкненого оператора, у тому числі ультрагладкими векторами, присвячено роботи [1, 2]. У цьому зв'язку відзначимо також роботу [3], де введено поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова. У роботі [8] техніку ультрагладких векторів застосовано до побудови спектральних розкладів необмежених операторів в банахових просторах. Там же наведено застосування абстрактних результатів в теорії регулярних еліптичних диференціальних операторів у обмежених областях.

У запропонованій роботі розглянуто класи ультрагладких векторів замкнених операторів, які утворюють інтерполяційні простори типу Лоренца. Досліджено властивості таких просторів (теор. 1), а також, породжених ними, апроксимаційних просторів (теор. 2,3). Оцінки відстані від елементів банахового простору до підпростору ультрагладких векторів представлено у вигляді нерівностей з використанням квазінорм відповідних апроксимаційних просторів.

Надалі використовуємо термінологію і позначення роботи [9].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 47A57, 47A58, 46E35.

1 Простори типу Лоренца ультрагладких векторів

Нехай $\mathfrak{X}$ — банахів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ з нормою $\|.\|$; $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ — необмежений замкнений лінійний оператор із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$. Для будь-якого числа $\nu > 0$ і довільної послідовності додатних чисел $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ розглянемо послідовність $\{\mu_k^{-1}(A/\nu)^k x\}_{k=0}^{\infty}$, $x \in \mathcal{D}(A^\infty) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^k)$. Якщо $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність в просторі $\mathfrak{X}$, яка збігається до нуля, то через $\{x_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ позначимо послідовність, яка складається з тих самих елементів, розміщених в порядку незростання норм $\|x_0^*\| \geq \|x_1^*\| \geq \ldots \geq \|x_k^*\| \geq \ldots$.

Покладемо $x_k \equiv \mu_k^{-1}(A/\nu)^k x$ і для довільних чисел $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ визначимо простори вигляду

$$\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(A) \equiv \Big\{x \in \mathcal{D}(A^\infty) : \|x\|_{\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(A)} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{k-1}^*\|^q k^{\frac{q}{p}-1}\Big)^{1/q} < \infty\Big\},$$
$$\mathcal{E}_{p,\infty}^{\nu}(A) \equiv \Big\{x \in \mathcal{D}(A^\infty) : \|x\|_{\mathcal{E}_{p,\infty}^{\nu}(A)} = \sup_k \|x_{k-1}^*\| k^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\}.$$

Простори $\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(A)$ назвемо *просторами типу Лоренца ультрагладких векторів оператора* A. При $p = q$ отримуємо відомі простори $\mathcal{E}_{p,p}^{\nu}(A) = \mathcal{E}_{p}^{\nu}(A)$ ультрагладких векторів [4]. Якщо $\mu_k \equiv 1$, то $\mathcal{E}_{p}^{\nu}(A)$ — простір векторів експоненціального типу оператора A [5].

Нехай $0 < t, \nu < \infty$, $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \leq q, q_0, q_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. Визначимо інтерполяційний простір $\big(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^{\nu}(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^{\nu}(A)\big)_{\theta,q}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^{\nu}(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^{\nu}(A)\right)_{\theta,q}} = \Big(\int_0^\infty \big[t^{-\theta}\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_0,q_0}^{\nu}(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^{\nu}(A))\big]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q},$$

$\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_0,q_0}^{\nu}(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^{\nu}(A)) = \inf\limits_{x=x_0+x_1} \big(\|x_0\|_{\mathcal{E}_{p_0,q_0}^{\nu}(A)} + t\|x_1\|_{\mathcal{E}_{p_1,q_1}^{\nu}(A)}\big)$. При $q = \infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^{\nu}(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^{\nu}(A)\right)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta}\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_0,q_0}^{\nu}(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^{\nu}(A)).$$

Теорема 1. *Нехай* $1 < p_0, p_1 < \infty$, $p_0 \neq p_1$, $1 \leq q, q_0, q_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді справедлива рівність*

$$\big(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^{\nu}(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^{\nu}(A)\big)_{\theta,q} = \mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(A), \quad \text{де} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}. \tag{1}$$

Доведення. Розглянемо наступні банахові простори $\mathcal{E}_{1}^{\nu}(A) \equiv \Big\{x \in \mathcal{D}(A^\infty) : \|x\|_{\mathcal{E}_{1}^{\nu}(A)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \infty\Big\}$, $\mathcal{E}_{\infty}^{\nu}(A) \equiv \Big\{x \in \mathcal{D}(A^\infty) : \|x\|_{\mathcal{E}_{\infty}^{\nu}(A)} = \sup\limits_k \|x_k\| < \infty\Big\}$ і покажемо, що виконується рівність

$$\big(\mathcal{E}_{1}^{\nu}(A), \mathcal{E}_{\infty}^{\nu}(A)\big)_{\theta,q} = \mathcal{E}_{1/(1-\theta),q}^{\nu}(A). \tag{2}$$

При $0 < t \le 1$ маємо $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)) = t\|x_0^*\|$. Нехай $x = x^0 + x^1$, $x^0 \in \mathcal{E}_1^\nu(A)$, $x^1 \in \mathcal{E}_\infty^\nu(A)$. Використовуючи оцінку $\sum\limits_{k=1}^{j-1} \|x_k^*\| \le \|x^0\|_{\mathcal{E}_1^\nu(A)} + j\,\|x^1\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu(A)}$ і розклад

$$\begin{aligned} x_s^{0*} &= x_s^* - \frac{x_s^*}{\|x_s^*\|}\|x_{j-1}^*\| \quad \text{для} \quad s = 0,\dots,j-1,\\ x_s^{0*} &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{для} \quad s \ge j, \end{aligned}$$

отримуємо $\mathcal{K}(j,x;\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)) = \sum\limits_{k=1}^{j-1}\|x_k^*\|$, $j = 1,2,\dots$. Отже, при $q < \infty$

$$\|x\|^q_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,q}} \sim \sum_{j=1}^\infty j^{-\theta q-1}\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\|x_k^*\|\Big)^q \ge \sum_{j=1}^\infty j^{(1-\theta)q-1}\|x_{j-1}^*\|^q.$$

Використовуючи нерівність Гельдера, при $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'} = 1$ і $0 < \varepsilon < \theta$ знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty j^{-\theta q-1}\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\|x_k^*\|\Big)^q &\le \sum_{j=1}^\infty j^{\theta q-1}\sum_{k=1}^{j} k^{(1-\theta)q-1+\varepsilon q}\|x_{k-1}^*\|^q \times \\ \Big(\sum_{k=1}^{j} k^{\theta q'-1-\varepsilon q'}\Big)^{q/q'} &\le c\sum_{k=1}^\infty k^{(1-\theta)q-1}\|x_{k-1}^*\|^q. \end{aligned}$$

При $q = \infty$ маємо $\|x\|_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,\infty}} \sim \sup\limits_j j^{-\theta}\sum\limits_{k=0}^{j-1}\|x_k^*\| \sim \sup\limits_j j^{1-\theta}\|x_{j-1}^*\|$ і рівність (2) встановлено.

Нехай $1 \le q \le \tilde q \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Тоді справедливі вкладення

$$\big(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\big)_{\theta,q} \subset \big(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\big)_{\theta,\tilde q}. \tag{3}$$

Дійсно, при $1 \le q \le \tilde q < \infty$

$$\begin{aligned} \|x\|_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,\tilde q}} &\le \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A))^q\frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde q} \times \\ \left(\sup_{t>0} t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A))\right)^{(1-q/\tilde q)} &\le c\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,q}}, \end{aligned}$$

звідки отримуємо (3). Вкладення $\big(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\big)_{\theta,q} \subset \big(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\big)_{\theta,\infty}$ випливає з нерівності $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)) \le c\,t^\theta\|x\|_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,q}}$.

Застосовуючи теорему про реітерацію [6, теор. 3.11.5], в силу рівності (2), маємо

$$\big(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A),\mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)\big)_{\theta,q} = \big(\mathcal{E}_1^\nu(A),\mathcal{E}_\infty^\nu(A)\big)_{\lambda,q} = \mathcal{E}_{1/(1-\lambda),q}^\nu(A), \tag{4}$$

де $p_0 = 1/(1-\theta_0)$, $p_1 = 1/(1-\theta_1)$, $\lambda = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$, $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le 1$. При $p = 1/(1-\lambda)$ із рівності (4) отримуємо (1). $\square$

Наслідок 1.1. *В умовах теореми 1 існують такі додатні числа* $c_1 = c_1(\theta, q)$ *і* $c_2 = c_2(\theta, q)$, *що виконуються нерівності*

$$\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)) \le c_1 t^{\theta} \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A), \tag{5}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)} \le c_2 \|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A)} \|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A) \bigcap \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A). \tag{6}$$

При $1 \le q \le \tilde{q} \le \infty$ *справедливі вкладення*

$$\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A) \subset \mathcal{E}^{\nu}_{p,\tilde{q}}(A). \tag{7}$$

Крім цього, якщо $\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A) \subset \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)$ *і* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, *то*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta_0,q} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta_1,\tilde{q}}. \tag{8}$$

Доведення. Нерівності (5) і (6) випливають із (1) та [6, теор. 3.11.2]. Вкладення (7) отримуємо з (3).

Із нерівності $\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)) \le t\, \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A))}$, $x \in \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)$, маємо

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta_1,1}} = \int_0^1 t^{-\theta_1} \mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)) \frac{dt}{t} +$$
$$\int_1^{\infty} t^{-\theta_1} \mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)) \frac{dt}{t} \le c\, \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)} +$$
$$\sup_{t>0} t^{-\theta_0} \mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)) \int_1^{\infty} z^{-(\theta_1-\theta_0)} \frac{dz}{z} \le$$
$$c_1\, \|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta_0,\infty}},$$

звідки випливає вкладення $\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta_0,\infty} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta_1,1}$. Звідси і з (7) отримуємо (8). □

Відзначимо, що простори $\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)$ банахові, оскільки є інтерполяційними просторами. Із (1) також випливає, що $\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)}$ — квазінорма, однак, взагалі кажучи, не норма.

2 Апроксимаційні простори

Нехай $0 < \nu, \alpha < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \tau \le \infty$. Визначимо апроксимаційні простори вигляду

$$\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A) \equiv \left\{ x \in \mathfrak{X} : \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)} = \left(\int_0^{\infty} t^{\alpha\tau} E(t,x)^{\tau} \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau} < \infty \right\},$$
$$\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\infty}(A) \equiv \left\{ x \in \mathfrak{X} : \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\infty}(A)} = \sup_{t>0} t^{\alpha} E(t,x) < \infty \right\},$$

де $E(t,x) = \inf_{\|x_0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)} \le t} \|x - x_0\|$, $x_0 \in \mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)$, $0 < t < \infty$.

Для $0 < r \le \infty$, $0 < \theta < 1$ розглянемо інтерполяційний простір $\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A), \mathfrak{X}\right)_{\theta,r}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A), \mathfrak{X}\right)_{\theta,r}} = \left(\int_0^{\infty} \left[t^{-\theta} \mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A), \mathfrak{X})\right]^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r},$$

де $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X})=\inf\limits_{x=x_0+x_1}\big(\|x_0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)}+t\|x_1\|\big)$. При $r=\infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,\infty}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}).$$

Нехай $\left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)\right]^{\theta}$, $0<\theta<1$ — простір $\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)$ з квазінормою $\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}$. Згідно з [6, теор. 7.1.7] при $\theta=1/(\alpha+1)$ і $\tau=\theta r$ справедлива рівність

$$\left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)\right]^{\theta}=\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,r}. \tag{9}$$

Таким чином, $\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)$ можна розглядати як інтерполяційний простір між $\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)$ і $\mathfrak{X}$.

Теорема 2. *Існують такі додатні числа $c_1=c_1(\theta,\tau)$, $c_2=c_2(\theta,\tau)$, що виконуються нерівності*

$$E(t,x)\le c_1t^{-\alpha}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)},\quad x\in\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A), \tag{10}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}\le c_2\|x\|^{\alpha}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)}\|x\|,\quad x\in\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A). \tag{11}$$

Доведення. Згідно з [6, теор. 3.11.4(b)], для деякого додатного числа c маємо

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,r}}\le c\,\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)}\|x\|^{\theta},\ x\in\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A).$$

Звідси і з рівності (9) при $\alpha=(1-\theta)/\theta$ випливає існування такої сталої $c_1>0$, що виконується нерівність (11).

Згідно з [6, теор. 3.11.4(a)], для деякого числа $c>0$ маємо $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X})\le ct^{\theta}\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,r}}$, $x\in\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,r}$. З цієї нерівності та (9) випливає існування такої сталої $c_0>0$, що $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X})\le c_0t^{\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}$, $x\in\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)$. Покладемо $\mathcal{K}_{\infty}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X})=\inf\limits_{x=x_0+x_1}\max\left\{\|x_0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)},t\|x_1\|\right\}$. Оскільки виконується нерівність $\mathcal{K}_{\infty}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X})\le\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X})$, то

$$\mathcal{K}_{\infty}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X})\le c_0t^{\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)},\quad x\in\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A). \tag{12}$$

Згідно з [6, лема 7.1.2], для кожного $t>0$ існує таке $s>0$, що $\mathcal{K}_{\infty}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X})=s$ і $E(s+0,x)\le s/t$. Звідси та з нерівності (12) маємо $s^{1-\theta}E^{\theta}(s,x)\le c_0^{1/\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}$, $x\in\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)$.При $\alpha=(1-\theta)/\theta$ отримуємо

$$s^{\alpha}E(s,x)\le c_0^{1/\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)},\quad x\in\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A).$$

Поклавши $c_1=c_0^{1/\theta}$, приходимо до (10). □

Із результатів [7] випливає, що у випадку оператора A з точковим спектром при $\mu_k\equiv1$ нерівність (10) дає оцінку відстані від вектора $x\in\mathfrak{X}$ до підпростору $\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)$, елементами якого є кореневі вектори оператора A.

Нехай $0<\alpha_0,\alpha_1<\infty$, $1<p<\infty$, $1\le q\le\infty$, $0<\tau,\tau_0,\tau_1\le\infty$. Визначимо інтерполяційний простір $\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau}}=\left(\int_0^{\infty}\left[t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A))\right]^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau},$$

$$\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A))=\inf_{x=x_0+x_1}\left(\|x_0\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A)}+t\|x_1\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)}\right).$$

Теорема 3. *При* $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ *і* $\alpha_0 \neq \alpha_1$ *виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A), \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau} = \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A). \tag{13}$$

Доведення. Згідно з теоремою про реітерацію при $\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$, $\theta_0 = 1/(\alpha_0+1)$, $\theta_1 = 1/(\alpha_1+1)$ і $\tau = \theta r$ маємо

$$\left(\left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A)\right]^{\theta_0},\ \left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right]^{\theta_1}\right)_{\lambda,r} = \left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)\right]^{\theta}. \tag{14}$$

Застосовуючи теорему про степені [6, теор. 3.11.6], отримуємо

$$\left(\left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A)\right]^{\theta_0},\ \left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right]^{\theta_1}\right)_{\lambda,r} = \left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\ \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)^{\theta}_{\rho,\tau}, \tag{15}$$

де $\rho = \lambda\theta_1/\theta$. З рівностей (14) і (15) при $\alpha = (1-\rho)\alpha_0 + \rho\alpha_1$ маємо

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\ \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\rho,\tau} = \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A),$$

звідки приходимо до (13). □

Наслідок 2.1. *Нехай* $0<\theta<1$ *і* $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ *при* $\alpha_0 \neq \alpha_1$. *Існують такі додатні числа* $c_1 = c_1(\theta,\tau)$ *і* $c_2 = c_2(\theta,\tau)$, *що виконуються нерівності*

$$\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A), \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)) \le c_1 t^{\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A), \tag{16}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)} \le c_2 \|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A)} \|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)},\ x \in \mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A) \cap \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A). \tag{17}$$

При $0 < \tau \le \tilde\tau \le \infty$ *справедливі вкладення*

$$\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A) \subset \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tilde\tau}(A). \tag{18}$$

Крім цього, якщо $\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A) \subset \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)$ *і* $0<\theta_0<\theta_1<1$, *то*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A), \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta_0,\tau} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A), \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta_1,\tilde\tau}. \tag{19}$$

Доведення. Нерівності (16) і (17) випливають із (13) та [6, теор. 3.11.2]. При $0 < \tau \le \tilde\tau < \infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tilde\tau}} \le \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde\tau} \times$$

$$\left(\sup_{t>0} t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A))\right)^{(1-\tau/\tilde\tau)} \le c\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau}},$$

звідки отримуємо (18). Із нерівності (16) безпосередньо випливає вкладення

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A), \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A), \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\infty}.$$

Вкладення (19) можна показати подібно до (8). □

Література

1. Горбачук М.Л., Горбачук В.І. *Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу* // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, №5. — С. 616–628.

2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Операторный подход к вопросам аппроксимации* // Алгебра и анализ. — 1997. — Т.9, №6. — С. 90–108.

3. Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. *Абстрактні простори Бєсова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах.* // Доп. НАН України. — 2007. — №12. — С. 16–22.

4. Лопушанський О.В. *Операторне числення на ультрагладких векторах.* // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, №4. — С. 502-513.

5. Радыно Я.В. *Пространство векторов экспоненциального типа.* // Докл. АН БССР. — 1983. — Т. 27, №9. — С. 791–793.

6. Bergh J., Löfström J. Interpolation spaces. An introduction, Springer, Berlin, 1976, 247 p.

7. Lopushansky O., Dmytryshyn M.*Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum*, Chapter 12 in book *"General Topology in Banach Spaces"*. Nova Sci. Publ., Huntington, New York, 2001, P. 137–145.

8. Lopushansky O., Dmytryshyn M. *Interpolated subspaces of exponential vectors of the unbounded operators in Banach spaces* , Demonstratio Mathematica, **37**, 1 (2004), 149–158.

9. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators, Springer, Berlin, 1995, 664 p.

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна.

Інститут математики Жешівського університету,

Жешів, Польща.

Надійшло 3.11.2008

Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. *Lorentz type spaces of ultrasmooth vectors of closed operators*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 8–14.

Lorentz type spaces of ultrasmooth vectors of closed operators in Banach spaces are defined. Interpolation properties of such spaces are established and their application to the decision of problem of approaching of elements of Banach space is shown different classes of smooth vectors of the closed operator.

Дмитришин М.И., Лопушанский О.В. *Пространства типа Лоренца ультрагладких векторов замкнутых операторов // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 8–14.

Определены пространства типа Лоренца ультрагладких векторов замкнутых операторов в банаховых пространствах. Установлены интерполяционные свойства таких пространств и показано их применение к решению проблемы приближения элементов банахова пространства разными классами гладких векторов замкнутого оператора.