Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.946+511.37

Ільків В.С.

ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ІЗ НЕЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Ільків В.С. *Гладкість розв'язків задач із нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 47–58.

У декартовому добутку часового відрізка та просторового багатовимірного тора для строго гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами досліджено умови розв'язності задачі з багатоточковими нелокальними умовами. За допомогою метричного підходу встановлено існування та єдиність розв'язку у шкалі просторів Соболєва. Доведено теорему про оцінки знизу малих знаменників, які виникають у процесі побудови цього розв'язку. Встановлено залежність між гладкістю розв'язку, гладкістю правих частин задачі та коефіцієнтами крайових умов.

1 Постановка задачі. Позначення

В області $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega^p_{2\pi}$, де $T > 0$, $\Omega^p_{2\pi} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, розглядається багатоточкова задача для строго гіперболічного рівняння

$$L(t, D_t, D)u \equiv D_t^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t, D) D_t^{n-j} u = 0, \qquad D_t = \partial/\partial t, \tag{1}$$

з нелокальними багатоточковими умовами

$$lu \equiv \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} B_{j\alpha}(D) D_t^{n-j} u\big|_{t=t_\alpha} = \varphi, \tag{2}$$

що пов'язують значення невідомої функції $u = u(t,x)$ та її похідних $D_t u, \dots, D_t^{n-1} u$ в різних M точках $t_1, \dots, t_M$, причому $M \geq 2$, $0 \leq t_1 < \dots < t_M \leq T$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Коефіцієнти $A_j(t,D)$ рівняння (1) — диференціальні оператори порядку jl вигляду $A_j(t,D)=\sum\limits_{|s|\le jl} a_{js}(t)D^s$, де $a_{js}(t)$ — неперервно диференційовні на відрізку $[0,T]$ комплекснозначні функції, $D^s=D_1^{s_1}\cdots D_p^{s_p}$, $D_1=-i\partial/\partial x_1,\ldots,D_p=-i\partial/\partial x_p$, $s=(s_1,\ldots,s_p)$, $|s|=s_1+\cdots+s_p$.

Нехай $A_j^0(t,D)$ — головна частина $A_j(t,D)$, тоді $A_j(t,D)=A_j^0(t,D)+A_j^1(t,D)$, де $A_j^0(t,D)=\sum\limits_{|s|=jl} a_{js}(t)D^s$, а $A_j^1(t,D)=\sum\limits_{|s|\le(j-1)l} a_{js}(t)D^s$, тобто припускаємо, що коефіцієнти $a_{js}(t)$ молодшої частини дорівнюють нулеві при $(j-1)l+1<|s|<jl$, $j=1,\ldots,n$.

Із строгої гіперболічності диференціального рівняння (1) випливає, що для всіх векторів $(t,\xi)\in[0,T]\times\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$ корені $\lambda_1(t,\xi),\ldots,\lambda_n(t,\xi)$ алгебричного рівняння

$$\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}A_j^0(t,\xi)\lambda^{n-j}=0 \tag{3}$$

є уявними та різними. Тому ці корені є неперервно диференційовними функціями за змінною t та гладкими за змінною ξ, модуль дискримінанта $\prod\limits_{1\le i<j\le n}\big(\lambda_i(t,\xi)-\lambda_j(t,\xi)\big)^2$ многочлена $\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}A_j^0(t,\xi)\lambda^{n-j}$ є додатною функцією.

Оператори $B_{j\alpha}(D)$ в умовах (2) — це стовпці з n елементів такого вигляду: $B_{j\alpha}(D)=\sum\limits_{|s|\le jl} B_{j\alpha s}D^s$, де $B_{j\alpha s}$ — вектори із $\mathbb{C}^n$. Деякі компоненти (які виберемо далі) векторів $B_{j\alpha s}\in\mathbb{C}^n$ будемо вважати параметрами задачі (1), (2).

Натуральне число l характеризує ріст коренів $\lambda_j(t,\xi)$, а саме: абсолютна величина кореня $\lambda_j(t,\xi)$ при $\xi\to\infty$ росте не швидше, ніж $|\xi|^l$, тобто поліноміально.

Задача (1), (2) розглядалася в роботі [1] для систем неоднорідних безтипних диференціальних рівнянь, а також для випадку двоточкових умов в роботах [3, 2]. Встановлено розв'язність задач у просторах $\mathbf{E}_{h,l}=\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $h,l\in\mathbb{R}$, періодичних вектор-функцій $\psi(x)=\sum\limits_k \widehat{\psi}_k e^{i(k,x)}$, які отримуються у результаті поповнення множини тригонометричних многочленів за нормою

$$\|\psi;\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\exp(2h\widetilde{k}^{\,l})\widehat{\psi}_k^*\widehat{\psi}_k\Big)^{1/2},$$

де $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_{2\pi}^p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$ — цілочисловий вектор, $(k,x)=k_1x_1+\cdots+k_px_p$, $\widetilde{k}=(1+k_1^2+\cdots+k_p^2)^{1/2}$, а символ „*“ позначає операцію ермітового спряження.

Ці простори складаються з функцій, коефіцієнти Фур'є яких мають експоненційну поведінку. Така властивість є характерною ознакою нелокальних задач для безтипних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами.

Для рівнянь зі сталими коефіцієнтами задачі типу (1), (2) мають розв'язки [4, 5] у шкалі просторів Соболєва $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}$, де простір $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, є поповненням множини тригонометричних многочленів за нормою

$$\|\psi;\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\|=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2q}\widehat{\psi}_k^*\widehat{\psi}_k\Big)^{1/2}.$$

У роботах [6, 7, 8] встановлено, що розв'язки нелокальних задач для рівнянь зі змінними коефіцієнтами гіперболічного типу (строго гіперболічних) другого порядку за змінною t, також належать шкалі просторів Соболєва, якщо цій шкалі належать праві частини задач.

Нелокальні задачі для гіперболічних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами, факторизованих та деяких інших рівнянь вивчалися, зокрема, у роботах [9, 10, 11, 12]

Розглядувані задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають в рядах Фур'є, що зображають формальні розв'язки. Для отримання оцінок знизу малих знаменників використовується метричний підхід [13, 14].

Існування розв'язку встановлюється для всіх задач за винятком множини задач малої міри в просторі коефіцієнтів крайових умов.

В даній роботі, яка є продовженням роботи [8] на випадок змінних коефіцієнтів в головній частині рівняння, показано, що майже всі задачі (1), (2) розв'язні в просторах Соболєва, подібно до нелокальних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Встановлено гладкість їх розв'язків та залежність гладкості від коефіцієнтів нелокальних умов.

Розв'язком задачі (1), (2) у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\}_{q\in\mathbb{R}}$ називаємо n разів неперервно диференційовну на відрізку $[0,T]$ функцію $u=u(t,x)$ таку, що для кожного $t\in[0,T]$ елементи $u(t,\cdot), D_t u(t,\cdot),\dots,D_t^{n-1}u(t,\cdot)$ належать до цієї шкали, і u задовольняє рівняння (1) та умови (2) у слабкому сенсі:

$$\int_{\Omega^p_{2\pi}} L(t,D_t,D)u(t,\cdot)w\,dt=0,\quad \int_{\Omega^p_{2\pi}}(lu-\varphi)w\,dt=0$$

для всіх $t\in[0,T]$ та для всіх тригонометричних многочленів $w=w(x)$.

Розв'язок шукаємо в банаховому просторі $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, де $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, $l,q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, — простір функцій $u=u(t,x)$ таких, що $D_t^j u\in\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_{q-lj}(\Omega^p_{2\pi})\big)$ для кожного значення $j=0,1,\dots,n$; норму в просторі $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ визначимо формулою

$$\|u;\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\|=\Big(\sum_{j=0}^{n}\|D_t^j u;\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_{q-lj}(\Omega^p_{2\pi})\big)\|^2\Big)^{1/2}.$$

Якщо $U^j\in\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\big)$ для $j=1,\dots,n$, то вважаємо, що вектор-функція $U=\mathrm{col}(U^1,\dots,U^n)$ належить до $\mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)$ і $\|U;\mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)\|^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\|U^j;\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\|^2$.

Для довільної послідовності комплексних чисел $F(k)$ введемо псевдодиференціальний оператор $F(D)$, який діє у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\}$ за формулою

$$F(D)\psi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}F(k)\widehat{\psi}_k e^{ikx},$$

де $\psi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{\psi}_k e^{ikx}$. Якщо послідовність $|F(k)|$ обмежена зверху, то оператор $F(D)$ є обмеженим оператором у цій шкалі, якщо — знизу, то обмеженим є оператор $F^{-1}(D)$; всякий обмежений оператор відображає простір $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ в себе.

Послідовність $\widetilde{k}$, що використовується в означенні норми $\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\|$, визначає оператор $\widetilde{D}$, який для всіх $q_1\in\mathbb{R}$ справджує формулу $\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\|=\|\widetilde{D}^{q_1}\varphi;\mathbf{H}_{q-q_1}(\Omega^p_{2\pi})\|$ для довільної функції φ з простору $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$, зокрема $\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\|=\|\widetilde{D}^q\varphi;\mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})\|$.

2 Побудова розв'язку та умови існування у просторах Соболєва

Нехай $\lambda_j(t,k) = i\widetilde{k}^{\,l}\mu_j(t,k)$ при $j = 1,\dots,n$, а функція $U_k(t)$ визначається формулою

$$U_k(t) = \operatorname{col}\left(U_k^1(t),\dots,U_k^n(t)\right) = \operatorname{col}\left(\widetilde{k}^{\,nl}u_k(t), \widetilde{k}^{\,(n-1)l}u_k'(t),\dots,\widetilde{k}^{\,l}u_k^{(n-1)}(t)\right), \tag{4}$$

де $u_k(t)$ — коефіцієнти Фур'є розв'язку u задачі (1), (2). Якщо $U \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, то із заміни (4) випливає, що $D_t^j u \in \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega_{2\pi}^p)\big)$ при $j = 0,1,\dots,n$, тобто $u \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$.

Вектор-функція $U = \operatorname{col}(U^1,\dots,U^n) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} U_k(t)e^{ikx}$ задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$D_tU = i\widetilde{D}^l A(t,D)U, \qquad A(t,D) = A^0(t,D) + A^1(t,D), \tag{5}$$

де $A^0(t,D)$ і $A^1(t,D)$ оператор-матриці порядку n з елементами $A_{ij}^0(t,D)$ та $A_{ij}^1(t,D)$, причому $A^0(t,0) = 0$, $A_{i,i+1}^1(t,0) = 1$, $A_{i,i+1}^0(t,k) = 1$ при $k \neq 0$, $i = 1,\dots,n-1$, $A_{nj}^0(t,k) = -i^{-j}A_j^0(t,k/\widetilde{k}^{\,l})$, $A_{nj}^1(t,k) = -(i\widetilde{k}^{\,l})^{-j}A_j^1(t,k)$, всі інші елементи $A_{ij}^0(t,k)$ та $A_{ij}^1(t,k)$ є нулями. Оператори $A^0(t,D)$ та $i\widetilde{D}^l A^1(t,D)$ — обмежені для всіх $t \in [0,T]$.

Числа $\mu_j(t,k)$ дорівнюють нулеві при $k = 0$, а при $k \neq 0$ є простими коренями многочлена

$$L^0(\mu,t,k) = \mu^n + \sum_{j=1}^n A_{nj}^0(t,k)\mu^{n-j} = \prod_{j=1}^n \big(\mu - \mu_j(k)\big) \tag{6}$$

з обмеженими на $[0,T] \times \mathbb{Z}^p$ коефіцієнтами $A_{nj}^0(t,k)$, $j = 1,\dots,n$, тому вони також обмежені зверху:

$$\sup_{j,t,k} |\mu_j(t,k)| \le \widetilde{\mu}, \tag{7}$$

де $\widetilde{\mu}$ залежить лише від $|a_{js}|$, $|s| = jl$, $j = 1,\dots,n$, а похідна $\dot{L}^0(\mu,t,k)$, $k \neq 0$, за змінною μ многочлена (6) на його коренях внаслідок строгої гіперболічності обмежена знизу, тому

$$\sup_{j,t,k} |\dot{L}^0(\mu_j(k),t,k)| = \sup_{j,t,k} \prod_{j=1,j\neq\alpha}^n \big|\mu_j(t,k) - \mu_\alpha(t,k)\big| \ge d. \tag{8}$$

Введемо нові невідомі вектори $Z_k(t) = \operatorname{col}\left(Z_k^1(t),\dots,Z_k^n(t)\right)$ за формулою

$$U_k(t) = R(t,k)G(t,k)Z_k(t), \tag{9}$$

де $R(t,0)$, $G(t,0)$ — одиничні матриці, $R(t,k) = \left(\mu_j^{\alpha-1}(t,k)\right)_{\alpha,j=1}^n$ — матриця Вандермонда, $G(t,k) = \operatorname{diag}\left(\exp(i\widetilde{k}^{\,l}\int_0^t \mu_j(\tau,k)\,d\tau)\right)_{j=1}^n$ — діагональна матриця, тому для $k \neq 0$ маємо $U_k^\alpha(t) = \sum\limits_{j=1}^n \mu_j^{\alpha-1}(t,k)\exp\left(i\widetilde{k}^{\,l}\int_0^t \mu_j(\tau,k)\,d\tau\right)Z_k^j(t)$, а також $U_0^\alpha(t) = Z_0^\alpha(t)$ для $k = 0$.

Оскільки $G'(t,k) = i\widetilde{D}^l \operatorname{diag}(\mu_j(t,k))_{j=1}^n \cdot G(t,k)$, то функція $Z = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} Z_k(t)e^{ikx}$, задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$D_tZ = G^{-1}(t,D)R^{-1}(t,D)\Big(i\widetilde{D}^l A^1(t,D)R(t,D)G(t,D) - D_tR(t,D)G(t,D)\Big)Z. \tag{10}$$

Елементи $i\widetilde{D}^l A^1_{ij}(t,D)$ матриці $i\widetilde{D}^l A^1(t,D)$ є обмеженими операторами, як і елементи матриць $R(t,D)$ та $G(t,D)$, для всіх $t\in[0,T]$. Обернені матриці $R^{-1}(t,D)$ та $G^{-1}(t,D)$ мають обмежені елементи, оскільки [15, 16, с. 428]

$$R^{-1}(t,k)=\operatorname{diag}\left(\left(\dot{L}^0(\mu_j(t,k),t,k)\right)^{-1}\right)_{j=1}^n\cdot\left(A^0_{n,n-i-j+1}(t,k)\right)_{i,j=1}^n\cdot R(t,k),$$

$$G^{-1}(t,k)=\operatorname{diag}\left(\exp(-i\widetilde{k}^{\,l}\int_0^t\mu_j(\tau,k)\,d\tau)\right)_{j=1}^n,$$

де $A^0_{n,0}(t,k)$ — одинична, а $A^0_{n,j}(t,k)$ — нульова матриці при $j<0$ та $k\neq 0$; елементи $(\alpha-1)D_t\mu_j(t,k)\mu_j^{\alpha-2}(t,k)$ матриці $D_tR(t,D)$ також є обмеженими операторами.

Теорема 1. *Якщо вектор-функція Z задовольняє систему рівнянь (10) і $Z\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$, $q_1\in\mathbb{R}$, то вектор-функція $U=R(t,D)G(t,D)Z$ задовольняє систему рівнянь (5) і належить до простору $\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$. Якщо фундаментальна*[1] *матриця $\Phi_j(t,D)$ системи (10) нормована рівністю $\Phi_j(t_j,D)=G^{-1}(t_j,D)R^{-1}(t_j,D)$, де $j=1,\dots,n$, то*

$$U=R(t,D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p),\qquad U(t_j,\cdot)=C,\tag{11}$$

для довільної вектор-функції $C\in\mathbf{H}_{q_1}(\Omega^p_{2\pi})$.

Доведення. Оскільки стовпці матриці $R(t,D)$ і числа $\mu_j(t,D)$ є відповідно власними векторами та власними значеннями матриці $A^0(t,D)$, а значить

$$R(t,D)D_tG(t,D)=i\widetilde{D}^lR(t,D)\operatorname{diag}\left(\mu_j(t,D)\right)_{j=1}^nG(t,D)=i\widetilde{D}^lA^0(t,D)R(t,D)G(t,D),$$

і $G^{-1}(t,D)R^{-1}(t,D)D_tZ=i\widetilde{D}^lA^1(t,D)R(t,D)G(t,D)-D_tR(t,D)G(t,D)Z$, останнє випливає з рівності (10), то

$$\begin{aligned}D_tU&=R(t,D)D_tG(t,D)Z+D_tR(t,D)G(t,D)Z+R(t,D)G(t,D)D_tZ=\\&=i\widetilde{D}^lA^0(t,D)R(t,D)G(t,D)Z+i\tilde{\ }D^lA^1(t,D)R(t,D)G(t,D)Z,\end{aligned}$$

тобто $D_tU=i\widetilde{D}^lA(t,D)U$. Внаслідок обмеженості операторів $R(t,D)$ і $G(t,D)$ та із умови $Z\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$ випливає включення $U\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$.

Загальний розв'язок рівняння $Z'_k=A^2(t,k)Z_k$, де

$$A^2(t,k)=G^{-1}(t,k)R^{-1}(t,k)\Big(i\widetilde{k}^{\,l}A^1(t,k)R(t,k)G(t,k)-R'(t,k)G(t,k)\Big),$$

визначається формулою $Z_k=\Phi_j(t,k)C_k$, де $C_k\in\mathbb{C}^{\,n}$, тому

$$Z=\Phi_j(t,D)C,\qquad U=R(t,D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C$$

для $C=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}C_ke^{ikx}$, а також $U(t_j,\cdot)=R(t_j,D)G(t_j,D)\Phi_j(t_j,D)C=C$.

---

[1] Під фундаментальною матрицею $\Phi(t,D)$ системи (10) розуміємо матрицю, що породжена послідовністю матриць $\{\Phi(t,k)\}_{k\in\mathbb{Z}^p}$, де $\Phi(t,k)$ — фундаментальна матриця системи звичайних диференціальних рівнянь, яка отримується із системи (10) заміною оператора D на вектор $k\in\mathbb{Z}^p$.

Оскільки для сліду $\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big)$ справджується формула

$$\Big(\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\Big)' = \operatorname{tr}\big(\Phi_j^{*\prime}(t,k)\Phi_j(t,k) + \Phi_j^*(t,k)\Phi_j'(t,k)\big) = \\ = \operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\big(A^{2*}(t,k) + A^2(t,k)\big)\Phi_j(t,k)\big),$$

то із нерівностей для слідів

$$\beta_1 \operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big) \le \operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\big(A^{2*}(t,k) + A^2(t,k)\big)\Phi_j(t,k)\big) \le \\ \le \beta_2 \operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big)$$

де β_1 і β_1 — незалежні від t та k сталі, отримуємо нерівності для похідних

$$\Big(e^{-\beta_1 t}\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\Big)' \ge 0, \qquad \Big(e^{-\beta_2 t}\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\Big)' \le 0.$$

Інтегруючи ці нерівності на відрізку $[t_j, t]$, отримуємо відповідно при $t < t_j$ та при $t \ge t_j$ оцінки

$$\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big) \le e^{\beta_1(t-t_j)}\operatorname{tr}\big(R^{*-1}(k)R^{-1}(k)\big),$$
$$\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big) \le e^{\beta_2(t-t_j)}\operatorname{tr}\big(R^{*-1}(k)R^{-1}(k)\big).$$

Отже, оператор $\Phi_j(t,D)$, а разом з ним і оператор $R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)$ є обмеженим. Звідси маємо, що $U \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$, якщо $C \in \mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)$. $\square$

Введемо матриці $B_\alpha(D)$, $\alpha = 1,\dots,M$, які є обмеженими операторами, за допомогою формули

$$B_\alpha(D) = \big(\widetilde{D}^{-nl}B_{n\alpha}(D), \widetilde{D}^{-(n-1)l}B_{n-1,\alpha}(D), \dots, \widetilde{D}^{-l}B_{1\alpha}(D)\big),$$

тоді з врахуванням (4) умови (2) перетворяться до вигляду

$$\sum_{\alpha=1}^{M} B_\alpha(D)U|_{t=t_\alpha} = \varphi. \tag{12}$$

Використовуючи (11), отримаємо систему рівнянь для визначення вектор-функції C:

$$\Delta_j(D)C = \varphi, \tag{13}$$

де

$$\Delta_j(D) = B_j(D) + \sum_{\alpha=1,\alpha\ne j}^{M} B_\alpha(D)R(D)G(t,D)\Phi_j(t_\alpha,D), \quad j = 1,\dots,n. \tag{14}$$

Теорема 2. *Якщо для деякого j, $1 \le j \le n$, існує оператор $\Delta_j^{-1}(D)$, то задача (5), (12) має не більше одного розв'язку. При виконанні для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ сильнішої умови, а саме, нерівності*

$$\widehat{\varphi}_k^*\Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k \le \beta_3\widetilde{k}^{\,2r}, \qquad \beta_3 > 0, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

де $\widehat{\varphi}_k$ — коефіцієнти Фур'є вектор-функції φ, розв'язок U існує, належить до простору $\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, де $q < nl - r - p/2$, і визначається формулою

$$U = R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)\Delta_j^{-1}(D)\varphi. \tag{16}$$

При цьому існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2), а саме $u = \widetilde{D}^{-nl}U^1 \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$.

Доведення. Якщо $\widetilde{U}$ та $\widetilde{\widetilde{U}}$ різні розв'язки задачі (5), (12), то $U^0 = \widetilde{U} - \widetilde{\widetilde{U}}$ — ненульовий розв'язок однорідної ($\varphi = 0$) задачі (5), (12), тому

$$U^0 = R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C,$$

як у формулі (11), і $\Delta_j(D)C = 0$, де $C = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} C_k e^{ikx}$, причому $C \neq 0$.

Тоді існує $\bar{k} \in \mathbb{Z}^p$ таке, що $C_{\bar{k}} \neq 0$. Оскільки $C_{\bar{k}}$ визначається із системи лінійних однорідних алгебричних рівнянь $\Delta_j(\bar{k})C_{\bar{k}} = 0$, то матриця $\Delta_j(\bar{k})$ є виродженою, $\det\Delta_j(\bar{k}) = 0$. Отже, матриця $\Delta_j^{-1}(\bar{k})$ не існує, як і оператор $\Delta_j^{-1}(D)$, що суперечить припущенню теореми. Єдиність розв'язку U доведено.

З теореми 1 для деякої додатної сталої β_4 випливає, що

$$\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \beta_4\|\Delta_j^{-1}(D)\varphi;\mathbf{H}_{q-nl}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = \beta_4\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2(q-nl)}\widehat{\varphi}_k^*\Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k. \quad (17)$$

Використовуючи умову (15) та рівність (17), маємо при $q < nl - r - p/2$ включення $U \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, оскільки $\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \beta_3\beta_4\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2(q-nl+r)} < \infty$.

За формулою (4) отримуємо, що $u = \widetilde{D}^{-nl}U^1$ і $\|u;\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)\| = \|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|$. □

За єдиності розв'язку задачі (5), (12), умова (15) виконується для всіх скінченних вектор-сум φ, причому стала β_3 залежить від функції φ.

Ця умова може виконуватися для якоїсь функції із простору $\mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)$ і не виконуватися для іншої функції із цього ж простору. Щоб усунути таку залежність, перетворимо ліву частину формули (15).

Нехай φ — довільна функція із простору $\mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)$, тоді із обмеженості елементів матриці $\Delta_j(D)$ випливає нерівність

$$\widehat{\varphi}_k^*\Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k \leq \beta_5\widehat{\varphi}_k^*\widehat{\varphi}_k/|\det\Delta_j(k)|^2, \quad (18)$$

де стала β_5 не залежить від k та від φ.

Теорема 3. *Якщо для деякої послідовності* $\{j(k)\}$, *де* $1 \leq j(k) \leq n$, *виконується умова*

$$|\det\Delta_{j(k)}(k)| \geq \beta_6\widetilde{k}^{\,r}, \qquad \beta_6 > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (19)$$

то задача (1), (2) *має єдиний розв'язок* $u \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$ *для довільної функції* φ *із простору* $\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega_{2\pi}^p)$.

Доведення. Згідно з формулою (16) розв'язок задачі (5), (12) має вигляд

$$U(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} R(k)G(t,k)\Phi_j(t,k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k e^{ikx},$$

причому індекс j може залежати від вектора k, тобто $j = j(k)$. Тому з нерівностей (17) та (18) випливає оцінка

$$\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \beta_4\beta_5\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2(q-nl)}\widehat{\varphi}_k^*\widehat{\varphi}_k/|\Delta_{j(k)}^{-1}(k)|^2.$$

Тепер із умови (19) і теореми 2 випливає, що $u \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$, оскільки

$$\|u;\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \beta_4\beta_5\beta_6^{-2}\|\varphi;\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2.$$

□

3 Оцінки малих знаменників

Вирази $\Delta_{j(k)}(k)$ є полілінійними функціями елементів матриць $B_1(k), \dots, B_n(k)$ і нелінійно залежать від елементів матриці $A^0(k)$ та матриці $A^1(t,k)$. Вони, взагалі, є малими знаменниками задачі (1), (2), які можуть також обертатися в нуль для деяких значень її коефіцієнтів.

Будемо використовувати метричний підхід для отримання оцінок знизу знаменників $|\Delta_{j(k)}(k)|$, вважаючи фіксованим рівняння (1). Елементи векторів $B_{j\alpha s}$ із умови (2) належать одиничному кругу $\mathcal{O}$ з центром у початку координат комплексної площини, тобто $B_{j\alpha s} \in \mathcal{O}^n$. Це не обмежує загальності і отримується нормуванням умови (2).

Позначимо через $\delta(k)$ матрицю $\Delta_{j(k)}(k)$. Послідовність $j(k)$ виберемо далі. Нехай перші n коефіцієнтів мають вигляд

$$b^1 = B^{\zeta^1}_{1\alpha_1 s^1}, \qquad b^2 = B^{\zeta^2}_{2\alpha_1 s^2}, \qquad \dots, \qquad b^n = B^{\zeta^n}_{n\alpha_1 s^n},$$

де $s^j = (\theta^j, 0, \dots, 0)$, $0 \le \theta^j \le jl$, $j = 1, \dots, n$, другі n коефіцієнтів —

$$b^{n+1} = B^{\zeta^{n+1}}_{1\alpha_2 s^{n+1}}, \qquad b^{n+2} = B^{\zeta^{n+2}}_{2\alpha_2 s^{n+2}}, \qquad \dots, \qquad b^{2n} = B^{\zeta^{2n}}_{n\alpha_2 s^{2n}},$$

де $s^j = (0, \theta^j, 0, \dots, 0)$, $0 \le \theta^j \le (j-n)l$, $j = n+1, \dots, 2n$, останні n коефіцієнтів вибираємо так:

$$b^{(p-1)n+1} = B^{\zeta^{(p-1)n+1}}_{1\alpha_p s^{(p-1)n+1}}, \quad b^{(p-1)n+2} = B^{\zeta^{(p-1)n+2}}_{2\alpha_p s^{(p-1)n+2}}, \quad \dots, \quad b^{pn} = B^{\zeta^{pn}}_{n\alpha_p s^{pn}},$$

де $s^j = (0, \dots, 0, \theta^j,)$, $0 \le \theta^j \le (j-(p-1)n)l$, $j = (p-1)n+1, \dots, pn$, причому $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \in \{1, \dots, M\}^p$,

$$\{\zeta^1, \dots, \zeta^n\} = \{\zeta^{n+1}, \dots, \zeta^{2n}\} = \dots = \{\zeta^{(p-1)n+1}, \dots, \zeta^{pn}\} = \{1, \dots, n\}.$$

Визначимо число θ і вектор b формулами

$$\theta = \min_{j=1,\dots,p} \sum_{\sigma=1}^{n} \theta^{(j-1)p+\sigma}, \qquad b = \mathrm{col}(b^1, \dots, b^{pn}). \tag{20}$$

Вважаємо, що елементи матриці $\delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, залежать лише від компонент $b^1, \dots, b^{pn}$ вектора $b \in \mathcal{O}^{pn}$; інші компоненти векторів $B_{j\alpha s}$ фіксуємо.

При цьому матриця $\delta(0)$, де $\delta(0) = \Delta_1(0)$, не залежить від $b^1, \dots, b^{pn}$, тому $\det \delta(0)$ є сталою стосовно цих коефіцієнтів. Фіксовані коефіцієнти вибираємо так, щоб ця матриця була невиродженою ($\det \delta(0) \ne 0$).

Лема. *Для довільних чисел r та ε, і для всіх векторів $b \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$, де $0 < \varepsilon < 1$, $r < \theta - n(p+nl+l)/2$, $\mathrm{meas}\, B_\varepsilon \le \varepsilon$, виконується нерівність (19), причому стала $\beta_6 = \beta_6(\varepsilon)$ та множина B_ε залежать від r і*

$$\beta_6 = \varepsilon^{n/2} \min\Big\{ |\det \delta(0)|/\varepsilon^{n/2}, n^{-n/2} \pi^{-n^2 p/2} \Big(\sum_{k \ne 0} \widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l} \Big)^{-n/2} \Big\} > 0. \tag{21}$$

Доведення. Нехай $k=0$, тоді $|\det\delta(0)|\geq\beta_6$ і нерівність (19) виконується.

Позначимо Ω_k, $k\neq 0$, підмножину тих векторів b із множини $\mathcal{O}^{pn}$, для яких не виконується нерівність (19) для фіксованого значення k. Очевидними є такі рівності: $\bigcup\limits_{k\neq 0}\Omega_k=B_\varepsilon$ і $\operatorname{meas}B_\varepsilon\leq\sum\limits_{k\neq 0}\operatorname{meas}\Omega_k$.

Якщо $k\neq 0$ і $|k_1|=\max\{|k_1|,\ldots,|k_1|\}$, то для $j(k)=\alpha^1$ розкладемо визначник $\det\delta(k)$ за останнім його стовпцем

$$|\det\delta(k)|=\frac{|k_1|^{\theta^1}}{\widetilde{k}^{\,l}}\big|\det\delta_1(k)b^1-\check{\delta}_1(k)\big|\geq\frac{\widetilde{k}^{\,\theta^1-l}}{\sqrt{p+1}}\big|\det\delta_1(k)\big|\Big|b^1-\frac{\check{\delta}_1(k)}{\det\delta_1(k)}\Big|,\tag{22}$$

де матриця $\delta_1(k)$ і функція $\check{\delta}_1(k)$ не залежать від b^1, а залежать від $b^2,\ldots,b^{pn}$, причому $\delta_1(k)$ отримується із $\delta(k)$ викреслюванням останнього стовпця і рядка з номером ζ^1.

Для матриці $\delta_1(k)$, яка має порядок $n-1$ формула (22) має вигляд

$$|\det\delta_1(k)|\geq\frac{\widetilde{k}^{\,\theta^2-2l}}{\sqrt{p+1}}\big|\det\delta_2(k)\big|\Big|b^2-\frac{\check{\delta}_2(k)}{\det\delta_2(k)}\Big|,$$

а матриця $\delta_2(k)$ має порядок $n-2$, не залежить від b^1 та b^2 і отримується з матриці $\delta(k)$ викреслюванням двох останніх стовпців і двох рядків з номерами ζ^1 і ζ^2. Таким способом отримуємо послідовність матриць $\delta_1(k),\ldots,\delta_n(k)$ і нерівностей

$$|\det\delta_{m-1}(k)|\geq\frac{\widetilde{k}^{\,\theta^m-ml}}{\sqrt{p+1}}\big|\det\delta_m(k)\big|\Big|b^m-\frac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)}\Big|,$$

де $m=2,\ldots,n$, $\det\delta_n(k)=1$.

Об'єднуємо ці нерівності з нерівністю (22) в одну нерівність

$$|\det\delta(k)|\geq\frac{\widetilde{k}^{\,\theta^1+\cdots+\theta^n-n(n+1)l/2}}{(p+1)^{n/2}}\prod_{m=1}^{n}\Big|b^m-\frac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)}\Big|.\tag{23}$$

Формула (23) справджується для тих векторів $b\in\mathcal{O}^{pn}$, для яких виконується нерівність $\det\delta_1(k)\cdots\det\delta_{n-1}(k)=\prod\limits_{m=2}^{n}\Big|b^m-\dfrac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)}\Big|\neq 0$.

Множник $b^m-\dfrac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)}$, $m=1,\ldots,n$, лінійно залежить від b^m, тому

$$\Big|b^m-\frac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)}\Big|\geq\beta_6^{1/n}\widetilde{k}^{\,(r-\theta)/n+(n+1)l/2}\tag{24}$$

для всіх $b^m\in\mathcal{O}\setminus\check{\Omega}_k^m(b^1,\ldots,b^{m-1},b^{m+1},\ldots,b^{pn})$, де $\check{\Omega}_k^m(b^1,\ldots,b^{m-1},b^{m+1},\ldots,b^{pn})$ є проекцією на m-ту координату множини векторів $\Omega_k^m(b^1,\ldots,b^{m-1},b^{m+1},\ldots,b^{pn})$. Остання є підмножиною векторів з фіксованими компонентами $b^1,\ldots,b^{m-1},b^{m+1},\ldots,b^{pn}$ множини Ω_k^m векторів b, для яких не виконується нерівність (24).

Множина $\check{\Omega}_k^m(b^1,\ldots,b^{m-1},b^{m+1},\ldots,b^{pn})$ — підмножина множини, що є перетином множини $\mathcal{O}$ та круга радіуса $\beta_6^{1/n}\widetilde{k}^{\,(r-\theta)/n+(n+1)l/2}$ з центром у точці $\check{\delta}_m(k)/\det\delta_m(k)$, тому

$$\operatorname{meas}\check{\Omega}_k^m(b^1,\ldots,b^{m-1},b^{m+1},\ldots,b^{pn})\leq\pi\beta_6^{2/n}\widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l}.$$

Інтегруючи останню нерівність за змінними $b^1, \dots, b^{m-1}, b^{m+1}, \dots, b^{pn}$ в області $\mathcal{O}^{pn-1}$ маємо

$$\operatorname{meas} \Omega_k^m \leq \pi^{pn} \beta_6^{2/n} \widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l}.$$

На множині $\mathcal{O}^{pn} \setminus \Big(\bigcup\limits_{m=1}^{n} \Omega_k^m \Big)$ нерівність (24) виконується для всіх $m = 1, \dots, n$, отже $\Omega_k \subset \bigcup\limits_{m=1}^{n} \Omega_k^m$ і

$$\operatorname{meas} \Omega_k \leq n\pi^{pn} \beta_6^{2/n} \widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l}. \tag{25}$$

Для векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k_1| < |k_2| = \max\{|k_1|, \dots, |k_p|\}$ також виконується оцінка (25). ЇЇ отримуємо встановлюючи оцінку (23) для вектора $b^{n+1}, \dots, b^{2n}$ та приймаючи $j(k) = \alpha_2$.

Аналогічно встановлюється оцінка (25) для всіх інших векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Підставляючи нерівність (24) у (24) і враховуючи (20) отримуємо шукану нерівність (19). Із нерівності (25) випливає нерівність для міри множини B_ε:

$$\operatorname{meas} B_\varepsilon \leq \sum_{k \neq 0} \operatorname{meas} \Omega_k \leq n\pi^{pn} \beta_6^{2/n} \sum_{k \neq 0} \widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l} = \varepsilon.$$

□

Теорема 4. *Якщо виконуються нерівності*

$$0 < \varepsilon < \min\Big\{1, \big(n^{n/2}\pi^{n^2p/2} |\det \delta(0)| / \big(\sum_{k \neq 0} \widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l}\big)^{-n/2}\big)^{2/n}\Big\},\ r < \theta - n(p + nl + l)/2,$$

а також умова $\varphi \in \mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega_{2\pi}^p)$, то для всіх векторів $b \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$, де B_ε, $\operatorname{meas} B_\varepsilon \leq \varepsilon$, множина із леми, існує єдиний розв'язок u, $u \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$, задачі (1), (2) та виконується нерівність

$$\|u; \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \varepsilon^{-n} \beta_4 \beta_5 n^n \pi^{n^2 p} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+(n+1)l} \Big)^n \|\varphi; \mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2. \tag{26}$$

Доведення. Якщо $b \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$, то за лемою виконується нерівність (19) зі сталою β_6, яка визначається формулою $\beta_6 = \varepsilon^{n/2} n^{-n/2} \pi^{-n^2p/2} \big(\sum\limits_{k \neq 0} \widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+(n+1)l} \big)^{-n/2}$ згідно із (21), а, отже, існує єдиний розв'язок задачі (1), (2). Нерівність (26) безпосередньо випливає із формул (17) та (18). □

Із теореми 4 випливає, що розв'язок існує в просторі $\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$ для більшості задач (1), (2), якщо $\varphi \in \mathbf{H}_\psi(\Omega_{2\pi}^p)$ та $\psi > q + n(p + nl + l)/2 - nl - \theta$. В залежності від вигляду вектора b стала θ змінюється від максимального значення $n(nl + l)/2$ до мінімального значення 0, тобто діапазон граничних значень гладкості вектор-функції φ — це інтервал $(q + np/2 - nl,\ q + np/2 - nl + n(nl + l)/2)$.

4 Висновки

Задача із загальними багатоточковими нелокальними умовами для строго гіперболічних рівнянь високого порядку з неперервними за t коефіцієнтами є розв'язною у шкалі просторів Соболєва періодичних за змінною x функцій, причому гладкість правої частини задачі (із достатніх умов існування розв'язку) залежить від вибору коефіцієнтів крайових умов в якості змінних параметрів.

Отримані результати можна поширити на випадок систем гіперболічних рівнянь високого порядку.

Література

1. *Ільків В. С.* Багатоточкова нелокальна неоднорідна задача для систем рівнянь з частинними похідними зі змінними за t коефіцієнтами // Мат. вісник НТШ. — 2004. — **1**. — С. 47-58.
2. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для неоднорідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними та змінними коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2000. — Вип. 58. — С. 139-143.
3. *Ільків В. С.* Двоточкова нелокальна крайова задача для системи неоднорідних рівнянь із частинними похідними// Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2002. — **45**, № 4. — С. 87-94.
4. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1999. — Вип. 54. — С. 84-95.
5. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. — 2001. — № 11. — С. 57-64.
6. *Ільків В. С.* Крайова задача з нелокальними двоточковими умовами для гіперболічного рівняння другого порядку // Вісник нац. ун-ту. „Львівська політехніка“. Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 566. — С. 41-51.
7. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Нелокальна двототочкова задача для строго гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку // Мат. вісник НТШ. — 2006. — **3**. — С. 69-83.
8. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Задача з нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь високого порядку // Мат. вісник НТШ. — 2007. — **4**. — С. 107-115.
9. *Гой Т. П.* Нелокальна крайова задача для слабко нелінійного гіперболічного рівняння // VI-а Міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука: Матеріали конф. — Київ. — 1997. — С. 108.
10. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. — К.: Ин-т мат. НАН Украины. — 1996. — С. 74-76.
11. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 2. — С. 186-195.
12. *Полищук В. Н.* Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. — К.: Наук. думка. — 1979. — С. 54-65.
13. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К.: Наук.думка, 1984. — 264 с.
14. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — К.: Наук. думка, 2002. — 416 с.

15. *Ильків В. С.* Компактное обращение обобщенной матрицы Вандермонда. — Деп. в НИИЭИР. Сб. реф. деп. рук. ВИМИ, 1991. — Вып. 5, № 3-8836. — 10 с.

16. *Higham N. J.* Accuracy and stability of numerical algorithms. — SIAM, 1996. — 688 p.

Національний університет "Львівська політехніка",
Львів, Україна.

Надійшло 10.03.2009

Il'kiv V.S. *The smoothness of solutions of the problems with nonlocal multi-point conditions for strictly hyperbolic equations*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 47–58.

We consider the problem with nonlocal multi-point boundary conditions for high order in time strictly hyperbolic equation with variable coefficients in Cartesian product of the time interval and the spatial multidimensional torus. We establish the solvability of this problem in the Sobolev spaces scale for almost all (except for the set of a given small measure) vectors of coefficients in the nonlocal conditions. We prove the metric theorem of the lower estimation of small (nonlinear) denominators of the problem.

Ильків В.С. *Гладкость решений задач с нелокальными многоточечными условиями для строго гиперболических уравнений // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 47–58.

В декартовом произведении часового отрезка и пространственного многомерного тора для строго гиперболического уравнения с переменными коэффициентами исследованы условия разрешимості задачи с многоточечными нелокальными условиями. С помощью метричного подходу встановлено существование и единственность решения в шкале пространств Соболева. Доказано теорему об оценках снизу малых знаменателей, которые возникают в процессе построения этого решения. Установлена зависимость между гладкостью решения, гладкостью правых частей задачи и коэффициентами граничных условий.