Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 512.538

Заторський Р.А., Малярчук О.Р.

ФАКТОРІАЛЬНІ СТЕПЕНІ ТА ТРИКУТНІ МАТРИЦІ

Заторський Р.А., Малярчук О.Р *Факторіальні степені та трикутні матриці // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 161–171.

В роботі узагальнюються поняття спадного і зростаючого факторіального степенів та тотожності Нерлунда та Вандермонда. При допомозі факторіальних степенів з кроком, виділено клас, так званих, факторіальних числових трикутників, елементи яких задовольняють деяке рекурентне співвідношення.

Вступ

Спадні та зростаючі факторіальні степені, на відміну від біноміальних коефіцієнтів та інших комбінаторних формул, допускають узагальнення не тільки на множину всіх цілих, але й дійсних чи, навіть, комплексних чисел. Тому їх подальші узагальнення завжди корисні. Вони дозволяють уніфікувати дослідження в деяких напрямках комбінаторного аналізу, виділити клас факторіальних числових трикутників, до якого належать трикутники Паскаля, Стірлінга першого і другого роду, трикутник Ла та багато інших нових числових трикутників, що очікують своїх комбінаторних інтерпретацій. При цьому виявляються загальні закономірності, властиві всім числовим трикутникам цього класу.

Введення поняття факторіального степеня з деяким кроком дозволяє двоїсті тотожності чи формули для спадних та зростаючих факторіальних степенів замінити однією загальною тотожністю чи формулою. Зокрема, такий підхід дозволяє узагальнити тотожності Вандермонда та Нерлунда.

1 Факторіальні числові трикутники та тотожності

Означення 1.1. *Для довільних дійсного числа x і натурального числа n* ***факторіальним степенем*** *n з кроком k, де k належить множині раціональних чисел, назвемо вираз вигляду*

$$x^{n\{k\}} = x(x+k)(x+2k)\cdot\ldots\cdot(x+(n-1)k).$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.
Ключові слова і фрази: трикутна матриця, факторіальний степінь.

Зручно вважати, що

$$x^{0\{k\}} = 1. \tag{1}$$

Зауважимо, що найчастіше зустрічаються зростаючі та спадні факторіали степеня n з кроками $1, -1, 0$, які, в існуючій літературі, позначаються відповідно через:

$$[x]^n = x^{\overline{n}} = x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1),$$

$$[x]_n = x^{\underline{n}} = x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n+1),$$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n}.$$

Отже,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n^{n\{-1\}} = 1^{n\{1\}},$$

причому, згідно з домовленістю (1), маємо $0! = 1$.

Теорема 1. *Для довільних параметрів x і y та довільного k виконується тотожність:*

$$(x+y)^{n\{k\}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i\{k\}} y^{n-i\{k\}}. \tag{2}$$

Доведення. При $n = 1$ тотожність (2) очевидно справедлива. Справедливість індукційного кроку випливає із наступних рівностей

$$(x+y)^{n+1\{k\}} = (x+y)^{n\{k\}}(x+y+nk) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i\{k\}} y^{n-i\{k\}}((x+ik)+(y+(n-i)k)) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i+1\{k\}} y^{n-i\{k\}} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i\{k\}} y^{n-i+1\{k\}} =$$

$$\binom{n}{0} x^{0\{k\}} y^{n+1\{k\}} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \right) x^{i+1\{k\}} y^{n-i\{k\}} + \binom{n}{n} x^{n+1\{k\}} y^{0\{k\}} =$$

$$\binom{n+1}{0} x^{0\{k\}} y^{n+1\{k\}} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i+1} x^{i+1\{k\}} y^{n-i\{k\}} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1\{k\}} y^{0\{k\}} =$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{i\{k\}} y^{n-i+1\{k\}}.$$

□

Якщо у тотожності (2) теореми 1 замість k підставити -1, 1, 0, то вони отримають вигляд тотожностей Вандермонда[1], Нерлунда[2] та біноміальної відповідно:

$$(x+y)^{n\{-1\}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k\{-1\}} y^{n-k\{-1\}},$$

А. Вандермонд (1735-1796) — французький математик і політичний діяч.
Н.Е. Нерлунд (1885-1981) — данський математик.

$$(x+y)^{n\{1\}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k\{1\}} y^{n-k\{1\}}\,,$$

$$(x+y)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}\,.$$

Важливу роль в різних областях математики відіграють спеціальні комбінаторні числа та многочлени. Згадаймо лише біноміальні многочлени та їх коефіцієнти, числа Стірлінга першого і другого роду, числа та многочлени Ойлера, ортогональні многочлени тощо. Проте, найбільш відомі многочлени своєю популярністю завдячують лише своїм коефіцієнтам.

В усіх перелічених випадках послідовність многочленів

$$\begin{array}{l}
a_{00}, \\
a_{10}+a_{11}t, \\
a_{20}+a_{21}t+a_{22}t^2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n0}+a_{n1}t+a_{n2}t^2+\ldots+a_{nn}t^n,\ n\in\mathbb{N},
\end{array}$$

де $a_{ii}\neq 0,\ i=0,1,\ldots,$ задається трикутною таблицею їх коефіцієнтів

$$\begin{array}{ccccc}
a_{00} & & & & \\
a_{10} & a_{11} & & & \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & & \\
\vdots & \dots & \dots & \ddots & \\
a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{array}\,.$$

Цікавим виявляється і наступний загальний підхід до вивчення властивостей числових трикутників.

Позаяк многочлени

$$(x+r)^{i\{s\}},\ i=0,1,\ldots,n,$$

за змінною x утворюють базис у просторі многочленів степеня не вищого за n, то многочлени

$$(x+t)^{i\{k\}},\ i=0,1,\ldots,n,$$

можна подати у вигляді їх лінійної комбінації. При цьому отримаємо наступні тотожності:

$$\begin{array}{rcl}
(x+t)^{0\{k\}} & = & a_{00}(x+r)^{0\{s\}}, \\
(x+t)^{1\{k\}} & = & a_{10}(x+r)^{0\{s\}}+a_{11}(x+r)^{1\{s\}}, \\
(x+t)^{2\{k\}} & = & a_{20}(x+r)^{0\{s\}}+a_{21}(x+r)^{1\{s\}}+a_{22}(x+r)^{2\{s\}}, \\
(x+t)^{3\{k\}} & = & a_{30}(x+r)^{0\{s\}}+a_{31}(x+r)^{1\{s\}}+a_{32}(x+r)^{2\{s\}}+a_{33}(x+r)^{3\{s\}}, \\
\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(x+t)^{n\{k\}} & = & a_{n0}(x+r)^{0\{s\}}+a_{n1}(x+r)^{1\{s\}}+a_{n2}(x+r)^{2\{s\}}+\ldots+a_{nn}(x+r)^{n\{s\}},.
\end{array}$$

Таким чином, ми приходимо до класу числових трикутників

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{00} & & & & & & \\
a_{10} & a_{11} & & & & & \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & & & & \\
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\
a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn}
\end{array},$$

які назвемо *факторіальними числовими трикутниками.*

Теорема 2. *Коефіцієнти тотожностей*

$$(x+t)^{i\{k\}} = \sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}},\ i = 0, 1, 2, \dots,$$

задовольняють рекурентне рівняння

$$a_{ij} = a_{i-1,j-1} + (t - r + (i-1)k - js)a_{i-1,j}, \tag{3}$$

де $a_{ii} = 1, a_{i,-1} = 0,\ i = 0, 1, \dots, n.$

Доведення. При $i = 0$ маємо справедливу тотожність:

$$(x+t)^{0\{k\}} = a_{00}(x+r)^{0\{s\}}.$$

Доведемо справедливість індукційного кроку.

$$\sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}} = \sum_{j=0}^{i}(a_{i-1,j-1} + (t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j})(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{i-1,j-1}(x+r)^{j\{s\}} + \sum_{i=0}^{i-1}(t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}.$$

Нехай у першій сумі $j = j' + 1$, тоді її можна подати у вигляді

$$\sum_{j'=0}^{i-1} a_{i-1,j'}(x+r)^{j'+1\{s\}} = \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}(x+r+js).$$

Таким чином, маємо

$$\sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}} = \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}(x+r+js) + \sum_{i=0}^{i-1}(t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$(x+t+(i-1)k)\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}} = (x+t+(i-1)k)(x+t)^{i-1\{k\}} = (x+t)^{i\{k\}}.$$

□

Рекурентне рівняння (3) є загальним рекурентним рівнянням для всіх факторіальних числових трикутників. Підставляючи замість t, k, r, s числа із множини $\{-1, 0, 1\}$, отримаємо мультимножину потужності $3^4 = 81$ числових трикутників:

№	t	k	r	s	Перетворення	№t	Короткий коментар
1	-1	-1	-1	-1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{n\{-1\}}$		тривіальний
2	-1	-1	-1	0	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t10$
3	-1	-1	-1	1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t11$
4	-1	-1	0	-1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t12$
5	-1	-1	0	0	$(x-1)^{n\{-1\}} \to x^{j}$		$\equiv t13$
6	-1	-1	0	1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t14$
7	-1	-1	1	-1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t1	$\circlearrowleft t28, \lvert t1\rvert \equiv t42$
8	-1	-1	1	0	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j}$	t2	$\circlearrowleft t34, \lvert t2\rvert \equiv t41$
9	-1	-1	1	1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t3	$\circlearrowleft t40, \lvert t3\rvert \equiv t40$
10	-1	0	-1	-1	$(x-1)^{n} \to (x-1)^{j}\{-1\}$		$\equiv t15$
11	-1	0	-1	0	$(x-1)^{n} \to (x-1)^{n}$		тривіальний
12	-1	0	-1	1	$(x-1)^{n} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t16$
13	-1	0	0	-1	$(x-1)^{n} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t17$
14	-1	0	0	0	$(x-1)^{n} \to x^{j}$		$\equiv t18$
15	-1	0	0	1	$(x-1)^{n} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t19$
16	-1	0	1	-1	$(x-1)^{n} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t4	$\circlearrowleft t29,\ \lvert t4\rvert \equiv \lvert t36\rvert$
17	-1	0	1	0	$(x-1)^{n} \to (x+1)^{j}$	t5	$\circlearrowleft t35,\ \lvert t5\rvert \equiv t35$
18	-1	0	1	1	$(x-1)^{n} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t6	$\circlearrowleft t41,\ \lvert t6\rvert \equiv t34$
19	-1	1	-1	-1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t23$
20	-1	1	-1	0	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t24$
21	-1	1	-1	1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$		тривіальний
22	-1	1	0	-1	$(x-1)^{n\{1\}} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t25$
23	-1	1	0	0	$(x-1)^{n\{1\}} \to x^{j}$		$\equiv t26$
24	-1	1	0	1	$(x-1)^{n\{1\}} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t27$
25	-1	1	1	-1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t7	$\circlearrowleft t30,\ t7 \equiv \lvert t30\rvert$
26	-1	1	1	0	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j}$	t8	$\circlearrowleft t36,\ \lvert t8\rvert \equiv \lvert t29\rvert$
27	-1	1	1	1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t9	$\circlearrowleft t42,\ \lvert t9\rvert \equiv t28$
28	0	-1	-1	-1	$x^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t31$
29	0	-1	-1	0	$x^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t32$
30	0	-1	-1	1	$x^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t33$
31	0	-1	0	-1	$x^{n\{-1\}} \to x^{j\{-1\}}$		тривіальний
32	0	-1	0	0	$x^{n\{-1\}} \to x^{j}$	t10	тр. Стірлінга I роду
33	0	-1	0	1	$x^{n\{-1\}} \to x^{j\{1\}}$	t11	$\circlearrowleft t23,\ \lvert t11\rvert \equiv t23$
34	0	-1	1	-1	$x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t12	$\circlearrowleft t31,\ \lvert t12\rvert \equiv t22$
35	0	-1	1	0	$x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j}$	t13	$\circlearrowleft t37,\ \lvert t13\rvert \equiv t21$
36	0	-1	1	1	$x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t14	$\circlearrowleft t20,\ \lvert t14\rvert \equiv t20$
37	0	0	-1	-1	$x^{n} \to (x-1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t37$
38	0	0	-1	0	$x^{n} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t38$
39	0	0	-1	1	$x^{n} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t39$
40	0	0	0	-1	$x^{n} \to x^{j\{-1\}}$	t15	тр. Стірлінга II роду
41	0	0	0	0	$x^{n} \to x^{j}$		тривіальний

№	t	k	r	s	Перетворення	№t	Короткий коментар
42	0	0	0	1	$x^n \to x^{j\{1\}}$	t16	$\circlearrowleft t24$, $\|t16\| \equiv t15$
43	0	0	1	-1	$x^n \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t17	$\circlearrowleft t32$, $t17 \to t15$
44	0	0	1	0	$x^n \to (x+1)^j$	t18	$\circlearrowleft t38$, $\|t18\| \equiv t38$
45	0	0	1	1	$x^n \to (x+1)^{j\{1\}}$	t19	$\circlearrowleft t21$, $\|t19\| \equiv t37$
46	0	1	-1	-1	$x^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t20	$\circlearrowleft t14$, $t20 \equiv \|t14\|$
47	0	1	-1	0	$x^{n\{1\}} \to (x-1)^j$	t21	$\circlearrowleft t19$
48	0	1	-1	1	$x^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t22	$\circlearrowleft t27$
49	0	1	0	-1	$x^{n\{1\}} \to x^{j\{-1\}}$	t23	тр. Ла, $\circlearrowleft t11$
50	0	1	0	0	$x^{n\{1\}} \to x^j$	t24	$\circlearrowleft t16$
51	0	1	0	1	$x^{n\{1\}} \to x^{j\{1\}}$		тривіальний
52	0	1	1	-1	$x^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t25	$\circlearrowleft t33$, $t25 \equiv \|t33\|$
53	0	1	1	0	$x^{n\{1\}} \to (x+1)^j$	t26	$\circlearrowleft t39$, $t26 \to t24$
54	0	1	1	1	$x^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t27	$\circlearrowleft t22$, $\|t27\| \equiv t31$
55	1	-1	-1	-1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t28	$\circlearrowleft t1$
56	1	-1	-1	0	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^j$	t29	$\circlearrowleft t4$
57	1	-1	-1	1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t30	$\circlearrowleft t7$, $t30 \to t11$
58	1	-1	0	-1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{-1\}}$	t31	$\circlearrowleft t12$
59	1	-1	0	0	$(x+1)^{n\{-1\}} \to x^j$	t32	$\circlearrowleft t17$, $t32 \to t10$
60	1	-1	0	1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{1\}}$	t33	$\circlearrowleft t25$
61	1	-1	1	-1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$		тривіальний
62	1	-1	1	0	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^j$		$\equiv t10$
63	1	-1	1	1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$		$\equiv t11$
64	1	0	-1	-1	$(x+1)^n \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t34	$\circlearrowleft t2$
65	1	0	-1	0	$(x+1)^n \to (x-1)^j$	t35	$\circlearrowleft t5$
66	1	0	-1	1	$(x+1)^n \to (x-1)^{j\{1\}}$	t36	$\circlearrowleft t8$
67	1	0	0	-1	$(x+1)^n \to x^{j\{-1\}}$	t37	$\circlearrowleft t13$
68	1	0	0	0	$(x+1)^n \to x^j$	t38	$\circlearrowleft t18$, тр. Паскаля
69	1	0	0	1	$(x+1)^n \to x^{j\{1\}}$	t39	$\circlearrowleft t26$, $t39 \to t16$
70	1	0	1	-1	$(x+1)^n \to (x+1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t15$
71	1	0	1	0	$(x+1)^n \to (x+1)^j$		тривіальний
72	1	0	1	1	$(x+1)^n \to (x+1)^{j\{1\}}$		$\equiv t16$
73	1	1	-1	-1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t40	$\circlearrowleft t3$
74	1	1	-1	0	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^j$	t41	$\circlearrowleft t6$
75	1	1	-1	1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t42	$\circlearrowleft t9$
76	1	1	0	-1	$(x+1)^{n\{1\}} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t20$
77	1	1	0	0	$(x+1)^{n\{1\}} \to x^j$		$\equiv t21$
78	1	1	0	1	$(x+1)^{n\{1\}} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t22$
79	1	1	1	-1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t23$
80	1	1	1	0	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x+1)^j$		$\equiv t24$
81	1	1	1	1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$		тривіальний

Кожному рядку наведеної вище таблиці відповідає деякий числовий трикутник. Запис $\equiv t10$ в останньому стовпці другого рядка означає, що числовий трикутник, який відповідає другому рядку, тотожний числовому трикутнику 32−го рядка; записи у сьомому рядку таблиці означають, що йому відповідає трикутник $t1$, який є оберненим числовим трикутником ($\circlearrowleft t28$) до числового трикутника 55−го рядка, причому модулі всіх елементів цього трикутника ($|t1| \equiv t42$) утворюють трикутник $t42$; записи із 43−го рядка означають, що йому відповідає числовий трикутник $t17$, який є оберненим до числового трикутника 59 рядка, причому, викреслюючи в ньому перший стовпець, можна отримати ($t17 \to t15$) числовий трикутник $t15$.

Таким чином, можна побудувати 42 різні числові трикутники $t1, t2, \ldots, t42$.

Цікаво було б знайти деякі комбінаторні інтерпретації елементів нових числових трикутників.

2 Факторіальні числові трикутники та парафункції трикутних матриць

Наведемо приклади, в яких зустрічаються факторіальні числові трикутники.

1. При $x_0 = 1$, $x_i = x$, $i = 1, 2, \ldots, n$, маємо тотожності:

$$pperZ(x, x, \ldots, x) = \left[\begin{array}{lllll} x & & & & \\ 1 & x & & & \\ 1 & 1 & x & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & x \end{array}\right]_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \tag{4}$$

$$\sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} = x(x+1)^{n-1},$$

$$ddetZ(x, x, \ldots, x) = \left\langle\begin{array}{lllll} x & & & & \\ 1 & x & & & \\ 1 & 1 & x & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & x \end{array}\right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \tag{5}$$

$$\sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} =$$

$$x(x-1)^{n-1}.$$

Ліві частини формул (4), (5) є відповідно параперманентом та парадетермінантом трикутної матриці [2]. Таким чином, коефіцієнти многочленів

$$\mathrm{pper} Z_i(x, x, \ldots, x), \ \ \mathrm{ddet} Z_i(x, x, \ldots, x), \ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

утворюють трикутник Паскаля ($t38$) без знаків та трикутник Паскаля із знаками ($t18$) відповідно, причому справедлива рівність:

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} = \binom{n-1}{m}.$$

2. Для параперманента матриці Белла [3],

$$B(x_1,x_2,\ldots,x_n) = pper\begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{1}{1}\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{x_3}{x_2} & \frac{2}{1}\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{1}{n-1}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{2}{n-2}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{n-1}{1}\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix} =$$

$$pper\left(\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n},$$

справедлива тотожність:

$$B(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Якщо зробити підстановку $x_i = x$, $i = 1,2,\ldots,n$, то отримаємо многочлени Стірлінга II роду:

$$B(x,x\ldots,x) = \begin{bmatrix} x & & & & \\ \frac{1}{1} & x & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & x & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{1}{n-1} & \frac{2}{n-2} & \frac{3}{n-3} & \ldots & x \end{bmatrix}_n =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot x^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} =$$

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot x^m,$$

де

$$S(n,m) = \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}$$

— числа Стірлінга другого роду (див. [4], стор. 191), та трикутник Стірліга ($t15$).

3. Якщо у многочлені Белла зробити підстановку $x_i = i!x$, то він перепишеться у вигляді многочленів Ла [1]:

$$B\left(\frac{x}{1!},\frac{x}{2!},\ldots,\frac{x}{n!}\right) = \left[\frac{j\cdot(i-j+1)}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot x^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

з відповідним числовим трикутником Ла ($t23$).

Зауважимо, що із многочленів

$$\left\langle \frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right\rangle_{1\le j\le i\le n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}\cdot\frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}$$

при підстановці $x_i = i!x$, $i=1,2,\ldots,n$ можна отримати трикутник чисел Ла із знаками ($t11$).

4. Розглянемо ще один параперманент трикутної матриці похилої структури:

$$C_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left[(j-(j-1)\cdot\delta_{ij})\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right]_{1\le j\le i\le n} =$$

$$\left[\begin{array}{lllll} x_1 \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 \\ \frac{x_3}{x_2} & 2\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 \\ \frac{x_4}{x_3} & 2\cdot\frac{x_3}{x_2} & 3\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 \\ \multicolumn{5}{l}{\dotfill} \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & 2\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & (n-1)\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array}\right]_n, \tag{6}$$

що співпадає із цикловим індикатором симетричної групи

$$C_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Якщо в тотожності (6) $x_1=\ldots=x_n=x$, то вона прийме вигляд

$$\left[\begin{array}{lllll} x \\ 1 & x \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 3 & x \\ \multicolumn{5}{l}{\dotfill} \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1) & x \end{array}\right]_{1\le j\le i\le n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}\cdot x^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}, \tag{7}$$

але параперманент лівої частини рівності (2) дорівнює $x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)$, і ми отримуємо відому ([4], стор. 181) тотожність

$$C_n(\underbrace{x,\ldots,x}_{n}) = x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1).$$

Розкриваючи дужки у її правій частині, ми прийдемо до многочленів

$$C(x), C(x,x), \ldots, C_n(\underbrace{x,\ldots,x}_{n}),$$

коефіцієнти яких утворюють трикутник чисел Стірлінга першого роду без знаків ($t24$).

Для парадетермінанта матриці

$$\left((j-(j-1)\cdot\delta_{ij})\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n}$$

виконується рівність

$$\left\langle (j-(j-1)\cdot\delta_{ij})\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right\rangle_{1\le j\le i\le n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}\frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}. \tag{8}$$

Враховуючи те, що виконується рівність (див. [4], стор. 191)

$$s(n,k) = \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}}(-1)^{n-k}\cdot\frac{n!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!\cdot 1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}},$$

де $s(n,k)$ – числа Стірлінга першого роду, із рівності (8) при

$$x_1 = \ldots = x_n = x$$

можна отримати послідовність многочленів, коефіцієнти яких утворюють трикутник чисел Стірлінга I роду ($t10$).

Зауважимо також, що многочлени $B_n(x_1,\ldots,x_n)$ та $C_n(x_1,\ldots,x_n)$ пов'язані між собою рівністю

$$B_n(0!x_1,\ldots,(n-1)!x_n) = C_n(x_1,\ldots,x_n).$$

Тому, підставивши у многочлени $B_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ та $C_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ замість x_i вирази $i!x$ та ix відповідно, отримаємо однакові многочлени, які приводять до трикутника Ла ($t23$).

Література

1. Айгнер М. Комбинаторная теория: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 558 с.

2. Заторський Р.А. *Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць* // Математичні студії. – 2002. – Т.17, №1. – С. 3-17.

3. Заторський Р.А. *Скалярний добуток вектора на парадетермінант трикутної матриці та його застосування*//Прикарпатський вісник НТШ. – 2008. – Т.1 №1 – С. 22-30.

4. Риордан Дж. Комбинаторные тождества: пер. с англ.– М.: Наука, 1982. – 255 с.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 21.09.2009

Zatorsky R.A., Malarchuk A.R *Factorial degrees and triangular matrices*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 161–171.

Increasing and decreasing factorial degrees as well as identities of Nørlund and Vandermonde are generalized in the article. By means of factorial degrees with a step it is selected so called class of factorial numerical triangles, elements of which satisfy some recurrent relation.

Заторский Р.А., Малярчук А.Р *Факториальные степени и треугольные матрицы // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 161–171.

В работе обобщаются понятия убывающего и возрастающего факториальных степеней и тождества Нерлунда и Вандермонда. При помощи факториальных степеней с шагом, выделено класс, так называемых, факториальных числовых треугольников, элементы которых удовлетворяют некоторому рекуррентному соотношению.