Карпатські математичні
публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical
Publications. V.1, No.2

УДК 517.98

Соломко А.В.

ОПЕРАТОРНЕ ЗОБРАЖЕННЯ АЛГЕБРИ УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ КЛАСУ ЖЕВРЕ З НОСІЯМИ В ДОДАТНОМУ N-ВИМІРНОМУ КУТІ

Соломко А.В *Операторне зображення алгебри ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному куті // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 197–206.

Для побудованої двоїстості ультрарозподілів Жевре та ультрадиференційовних функцій доведена теорема про зображення згорткової алгебри ультрарозподілів класу Жевре у вигляді комутанта сильно неперервної напівгрупи зсувів в алгебрі лінійних неперервних відображень над простором ультрадиференційовних функцій з носіями в додатному n-вимірному куті.

Основним елементом побудови операторного числення для згорткової алгебри ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному куті, яке розглядається в роботі [1], є розв'язання проблеми зображення згорткової алгебри в просторі лінійних неперервних операторів на мультиплікативній алгебрі ультрадиференційовних функцій. В статті досліджується згорткова алгебра ультрарозподілів Жевре $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ над простором ультрадиференційовних функцій $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ з носіями в додатному n-вимірному куті та доводиться важлива теорема про топологічний ізоморфізм визначеної згорткової алгебри комутанту напівгрупи зсувів. Отримане зображення базується на n-вимірному узагальненні операції крос-кореляції та крос-кореляційного аналогу теореми Шварца, представлених в статті [4], та є їх подальшим нетривіальним узагальненням.

Розглядаємо n-вимірний додатний конус $\mathbb{R}^n_+ = [0, +\infty) \times \cdots \times [0, +\infty)$. Далі позначаємо $\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+ = (0, +\infty) \times \cdots \times (0, +\infty)$. На сукупності векторів $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ задаємо відношення порядків

$$\{\nu \prec \mu : \nu_1 < \mu_1, \dots, \nu_n < \mu_n\}, \qquad \{\nu \preceq \mu : \nu_1 \leq \mu_1, \dots, \nu_n \leq \mu_n\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.
Ключові слова і фрази: ультрадиференційовна функція, ультрарозподіл Жевре, (C_0)-напівгрупа операторів, згорткова алгебра.

Зафіксуємо число $\aleph > 1$. Для довільно вибраних векторів $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ і $1 \preceq \nu$ визначимо простір нескінченно диференційовних функцій з носіями в n-вимірному паралелепіпеді $[a, b] := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ вигляду

$$G_\nu[a,b] = \Big\{\varphi : \ \operatorname{supp}\varphi \subset [a,b], \quad \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} < \infty\Big\},$$

з набором норм

$$\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \sup_{t\in[a,b]} \frac{|\partial^k\varphi(t)|}{\nu^k k^{k\aleph}}. \tag{1}$$

Вище $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, $k^{k\aleph} = k_1^{k_1\aleph} \cdot \ldots \cdot k_n^{k_n\aleph}$, $\nu^k = \nu_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \nu_n^{k_n}$, $\partial^k = \partial_1^{k_1} \ldots \partial_n^{k_n}$, де $\partial_j^{k_j} = \dfrac{(-i)^{k_j}\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$ для всіх $j = 1, \ldots, n$ і supp позначає носій функції. Як легко побачити, для набору векторів $1 \preceq \nu \prec \mu$ і довільного паралелепіпеда $[a, b]$ виконується нерівність

$$\|\varphi\|_{G_\mu[a,b]} \le \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}, \qquad \varphi \in G_\nu[a,b].$$

Оскільки при $1 \preceq \nu \prec \mu$ вкладення $G_\nu[a,b] \subset G_\mu[a,b]$ є неперервними, то можна визначити індуктивну границю

$$G[a,b] := \bigcup_{\nu\succeq 1} G_\nu[a,b] = \liminf_{\nu\succeq 1} G_\nu[a,b] \tag{2}$$

відносно будь-якої послідовності векторів ν, напрямлених відношенням порядку $\prec$. Очевидно, що співвідношення (2) не залежить від вибору цієї послідовності.

З іншої сторони, для монотонно зростаючих паралелепіпедів $[a, b] \subset [a', b']$ і фіксованого $\nu \succeq 1$ маємо $\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} = \|\varphi\|_{G_\nu[a',b']}$, $\varphi \in G_\nu[a,b]$, і вкладення $G_\nu[a,b] \subset G_\nu[a',b']$ при $a' \prec a$ та $b \prec b'$ є неперервними. Тоді природнім чином визначається індуктивна локально опукла границя

$$G_\nu(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{a\prec b} G_\nu[a,b] = \liminf_{a\prec b} G_\nu[a,b] \tag{3}$$

відносно будь-якої послідовності паралелепіпедів $[a, b]$, напрямлених відношенням вкладення. Очевидно також, що співвідношення (3) не залежить від вибору такої послідовності паралелепіпедів.

Твердження 1. *Для довільних функцій $\varphi \in G_\nu[a,b]$ і $\psi \in G_\mu[a',b']$ таких, що $[a,b] \subset [a',b']$, справедлива нерівність*

$$\|\varphi\cdot\psi\|_{G_{\nu+\mu}[a,b]} \le \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} \cdot \|\psi\|_{G_\mu[a',b']}. \tag{4}$$

Доведення. Дійсно, для довільного $t \in \operatorname{supp}(\varphi\cdot\psi) \subset [a,b]$ ми можемо записати

$$\big|\partial^k[\varphi(t)\cdot\psi(t)]\big| \le \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} \cdot \|\psi\|_{G_\mu[a',b']} \sum_{|m|=0}^{|k|} \frac{\nu^m \mu^{k-m} m^{m\aleph} (k-m)^{(k-m)\aleph} k!}{m!(k-m)!} \le$$

$$\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}\sum_{|m|=0}^{|k|}\frac{\nu^m\mu^{k-m}k^{m\aleph}k^{(k-m)\aleph}k!}{m!(k-m)!}\le$$

$$\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}\sum_{|m|=0}^{|k|}\frac{\nu^m\mu^{k-m}k!}{m!(k-m)!}k^{k\aleph}\le\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}(\nu+\mu)^k k^{k\aleph},$$

тобто

$$\frac{|\partial^k[\varphi(t)\psi(t)]|}{(\nu+\mu)^k k^{k\aleph}}\le\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}.$$

Тепер нерівність (4) прямо випливає з означення норми (1). □

Розглянемо локально опуклу індуктивну границю вигляду

$$G(\mathbb{R}^n):=\bigcup_{\nu\succeq1}\bigcup_{b\succ a}G_\nu[a,b]=\liminf_{b\succ a,\,|\nu|\to\infty}G_\nu[a,b] \tag{5}$$

відносно неперервних вкладень $G_\nu[a,b]\subset G_{\nu'}[a',b']$ таких, що $1\preceq\nu\prec\nu'$ і $[a,b]\subset[a',b']$. Неважко перевірити, що простір $G(\mathbb{R}^n)$ є алгеброю відносно операції поточкового множення функцій. Функції з $G(\mathbb{R}^n)$ називаються ультрадиференційовними в сенсі М. Жевре (див. [7]).

Візьмемо тепер простір $G(\mathbb{R})$ ультрадиференційовних функцій класу Жевре від однієї змінно, і визначимо оператор множення довільної функції $\varphi(t)\in G(\mathbb{R})$ на функцію Гевісайда:

$$\Theta: G(\mathbb{R})\ni\varphi(t)\to\varphi(\tau)=\theta(t)\varphi(t), \tag{6}$$

де $\theta(t)=\begin{cases}1 & : & t\ge0,\\ 0 & : & t<0.\end{cases}$ Відображення (6) здійснює гомоморфізм алгебр, при цьому його ядро $\operatorname{Ker}\Theta=\left\{\varphi\in G(\mathbb{R}):\ \operatorname{supp}\varphi\bigcap[0,+\infty)=\varnothing\right\}$ є ідеалом алгебри $G(\mathbb{R})$. Отже, фактор-простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+):=G(\mathbb{R})/\operatorname{Ker}\Theta$ є також алгеброю. Будемо називати функції з цього простору ультрадиференційовними функціями класу Жевре на додатній півосі.

Означення 1. *Простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+):=\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}\,\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)$, де через $\widetilde{\otimes}$ позначено поповнення тензорного добутку в проективній топології, називаємо простором ультрадиференційовних функцій класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному куті $\mathbb{R}^n_+$.*

Якщо позначити $\mathcal{G}_\nu[0,b]:=G_\nu[a,b]\,/\operatorname{Ker}\Theta\bigcap G_\nu[0,b]$, то з неперервності вкладень $\mathcal{G}_\nu[0,b]\subset\mathcal{G}_\mu[0,b']$ при $1\preceq\nu\prec\mu$ і $[0,b]\subset[0,b']$ та елементарних властивостей індуктивних границь негайно випливає справедливість таких топологічних ізоморфізмів:

$$\mathcal{G}[0,b]\simeq\liminf_{|\nu|\to\infty}\mathcal{G}_\nu[0,b],\quad \mathcal{G}_\nu(\mathbb{R}^n_+)\simeq\liminf_{|b|\to\infty}\mathcal{G}_\nu[0,b],\quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)\simeq\liminf_{|\nu|,|b|\to\infty}\mathcal{G}_\nu[0,b].$$

Вище $|\nu|,|b|$ означають евклідові норми векторів.

Твердження 2. *Для довільних векторів $\nu\succeq1$ та $b\in\mathbb{R}^n$, що задовольняють умову $b\succ2\nu$, існує функція вигляду $\varrho(\tau)=\varrho_1(\tau_1)\cdot\ldots\cdot\varrho_n(\tau_n)$ така, що для всіх $j=1,\ldots,n$ виконуються співвідношення*

$$0\le\varrho_j\le1,\qquad \varrho_j\in\mathcal{G}_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[0,b_j+\nu_j],\qquad \varrho_j|_{[0,b_j]}\equiv1,$$

де $\zeta(\aleph) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\aleph}$ – *функція Рімана.*

Доведення. В силу теореми Карлемана-Данжуа [5, теор. 1.3.5] для числа $\aleph > 1$ існує функція $\psi \geq 0$ така, що

$$|\partial^k \psi(t)| \leq 2[2\zeta(\aleph)]^k k^{k\aleph}, \quad |\operatorname{supp}\psi| \leq 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 1, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Для довільного числа $\gamma > 0$ через $\chi_\gamma(t)$ позначимо характеристичну функцію інтервалу $[-\gamma, \gamma]$ і утворимо згортку вигляду

$$\psi_\gamma(s) := (\chi_\gamma * \psi)(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_\gamma(t)\psi(s-t)dt = \int\limits_{s-\gamma}^{s+\gamma} \psi(t)dt.$$

З того, що $\operatorname{supp}\psi_\gamma \subset \operatorname{supp}\psi + \operatorname{supp}\chi_\gamma \subset [-\gamma-1, \gamma+1]$ і $\partial^k\psi_\gamma = \chi_\gamma * \partial^k\psi$, отримаємо

$$|\partial^k \psi_\gamma(s)| \leq \int\limits_{-\gamma-1}^{\gamma+1} |\chi_\gamma(s-t)\partial^k\psi(t)|dt \leq 4(\gamma+1)[2\zeta(\aleph)]^k k^{k\aleph}. \tag{7}$$

Для довільного $\gamma \geq 2$ маємо, що

$$\psi_\gamma(s) = \begin{cases} 0, & |s| \geq \gamma+1, \\ 1, & |s| < \gamma, \end{cases} \tag{8}$$

звідки $\psi_\gamma(s) \in G_{2\zeta(\aleph)}[-\gamma-1, \gamma+1]$.

У рівностях (7) та (8) зробимо заміну s на $t = s\mu$, де $\mu > 0$. Тоді для функції $\widetilde{\psi}_\gamma(t) := \psi_\gamma(s\mu)$ отримаємо

$$|\partial^k \widetilde{\psi}_\gamma(t)| \leq 4(\gamma+1)[2\mu\zeta(\aleph)]^k k^{k\aleph}, \qquad \widetilde{\psi}_\gamma(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \mu\gamma+\mu, \\ 1, & |t| < \mu\gamma. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $\widetilde{\psi}_\gamma(t) \in G_{2\mu\zeta(\aleph)}[-\mu\gamma-\mu, \mu\gamma+\mu]$ і $\widetilde{\psi}_\gamma|_{[-\mu\gamma,\mu\gamma]} \equiv 1$. Тоді для $\gamma = \dfrac{b_j}{\nu_j}$, згідно умов $\dfrac{b_j}{\nu_j} \geq 2$ та $\mu = \nu_j$, маємо

$$\widetilde{\psi}_\gamma(t) \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j-\nu_j, b_j+\nu_j], \quad \widetilde{\psi}_\gamma|_{[-b_j,b_j]} \equiv 1. \tag{9}$$

Оскільки в загальному випадку $\mathcal{G}_{\nu_j}[0, b_j] := G_{\nu_j}[a_j, b_j]/\operatorname{Ker}\Theta|_{G_{\nu_j}[a_j,b_j]}$, то потрібні функції ϱ_j ми одержимо, помноживши функцію із співвідношень (9) на характеристичну функцію θ_j, тобто $\varrho_j = \theta_j\widetilde{\psi}_\gamma$, $j = 1, \ldots, n$. $\square$

Твердження 3. *Простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ – ядерний, рефлексивний та бочковий.*

Доведення. Відомо [6, лема 1], що простір $G(\mathbb{R})$ – бочковий, тому $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)$ буде бочковим як фактор-простір бочкового простору [2, гл.4, п.2]. Отже, $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ – бочковий як проективний тензорний добуток бочкових просторів. Доведемо, що в індуктивній границі $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \simeq \liminf\limits_{|\nu|,|b|\to\infty} \mathcal{G}_\nu[0,b]$ вкладення $\Omega : \mathcal{G}_\nu[0,b] \subset \mathcal{G}_\mu[0,b']$ при $1 \preceq \nu \prec \mu$, $[0,b] \subset [0,b']$, є компактними. Нехай B – одинична куля в $\mathcal{G}_\nu[0,b]$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ виберемо m настільки велике, що $\left(\dfrac{\nu}{\mu}\right)^m < \dfrac{\varepsilon}{2}$. За теоремою Арцела-Асколі існує скінченна кількість функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in B$ така, що для кожної функції $\varphi \in B$ знайдеться φ_j, $j = 1, \dots, n$, для якої $\|\partial^k(\varphi - \varphi_j)\|_{C[0,b]} \le \varepsilon \mu^k k^{k\aleph}$, де $|k| \le m$ і $C[0,b]$ – простір неперервних на відрізку $[0,b]$ функцій. Тоді послідовність $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ утворює ε-сітку для B в $\mathcal{G}_\mu[0,b']$. Отже, відображення Ω є компактним. Звідси випливає, що послідовність просторів $\big\{\mathcal{G}_\nu[0,b]\big\}_{\nu\succeq 1,\, b\in\mathbb{R}^n_+}$ є регулярною. Отже, простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ є (LN^*)-простором в сенсі Сілви [3, ст. 67, озн. 3]. Оскільки кожний простір типу (LN^*) є рефлексивним [3, ст. 71, теор. 3], то простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ також є рефлексивним. Нарешті, як відомо [6, ст. 168, лема 1], простір ультрадиференційовних функцій $G(\mathbb{R})$ є ядерним. Ядро $\operatorname{Ker}\Theta$ є замкненою множиною, а фактор-простір ядерного простору по замкненій множині знову є ядерним. Звідси висновок, що $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)$ – ядерний, а тоді з означення випливає ядерність простору $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$. □

Нехай $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$ – алгебра лінійних неперервних відображень з топологією рівномірної збіжності на опуклих компактах. Множення в цій алгебрі будемо позначати через "$\circ$", а одиницю – через $I^n_{\mathcal{G}} = I_{\mathcal{G}} \otimes \dots \otimes I_{\mathcal{G}}$, де $I_{\mathcal{G}}$ – одиниця на $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)]$.

Теорема 1. *Для кожного $j = 1, \dots, n$ сім'я операторів*

$$U_{\sigma_j} : \varphi(\tau) \longrightarrow U_{\sigma_j}\varphi(\tau) := \theta(s_j)\varphi(\tau_1, \dots, \tau_j + s_j, \dots, \tau_n),$$

де $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ і $\sigma_j := \theta(s_j)s_j$, є одностайно неперервною (C_0)-напівгрупою в алгебрі $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$. Генератором цієї напівгрупи є оператор $i\partial_j$ правосторонньої частинної похідної по змінній $\tau_j \in [0, +\infty)$. Генератор $i\partial_j$ належить алгебрі $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$.

Доведення. З означення простору $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ випливає, що для довільної функції $\varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ існують вектори $\nu \succeq 1$ і $b \in \mathbb{R}^n_+$ такі, що

$$\varphi(\tau) = \sum_m \varphi_{1_m}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_m}(\tau_n),$$

де $\varphi_{j_m}(\tau_j) := \theta(t_j)\psi_{j_m}(t_j) \in \mathcal{G}_{\nu_j}[0, b_j]$ і $\psi_{j_m} \in G_{\nu_j}[-b_j, b_j]$.

Визначимо напівгрупу U_{σ_j} на множині функцій вигляду

$$\varphi_{1_m}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_m}(\tau_n) \in \mathcal{G}_{\nu_1}[0, b_1] \widetilde{\otimes} \cdots \widetilde{\otimes} \mathcal{G}_{\nu_n}[0, b_n].$$

Умова $\tau_j \in \operatorname{supp}\varphi_j$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\tau_j - \sigma_j \in \operatorname{supp}(U_{\sigma_j}\varphi_j)$, тобто

$$\operatorname{supp}(U_{\sigma_j}\varphi_j) = (\operatorname{supp}\varphi_j - \sigma_j) \bigcap [0, \infty), \quad \sigma_j \ge 0.$$

Для кожної функції $\varphi_j \in \mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]$ виконується рівність $\partial_j^{k_j} U_{\sigma_j}\varphi_j = U_{\sigma_j}\partial_j^{k_j}\varphi_j$, для $j=1,\ldots,n$. Звідси, якщо $t_j \in (0,b_j)$, то $\partial_j^{k_j}\varphi_j(t_j) = \partial_j^{k_j}\psi_j(t_j)$. Тому

$$\|U_{\sigma_j}\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]} = \begin{cases} 0, & \sigma_j \geq b_j, \\ \sup\limits_{k_j\geq 0}\ \sup\limits_{0\leq \tau_j+\sigma_j\leq b_j} \frac{|U_{\sigma_j}\partial_j^{k_j}\varphi_j(\tau_j)|}{\nu_j^{k_j} k_j^{k_j\aleph}}, & \sigma_j < b_j, \end{cases}$$

і

$$\|U_{\sigma_j}\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]} \leq \sup_{k_j\geq 0}\ \sup_{0\leq\tau_j\leq b_j} \frac{|\partial_j^{k_j}\varphi_j(\tau_j)|}{\nu_j^{k_j} k_j^{k_j\aleph}} = \|\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]},\ \sigma_j \geq 0.$$

Звідси отримуємо $U_{\sigma_j} \in L[\mathcal{G}_{\nu_1}[0,b_1]\widetilde{\otimes}\cdots\widetilde{\otimes}\mathcal{G}_{\nu_n}[0,b_n]]$. Тоді за означенням 1 маємо, що $U_{\sigma_j} \in L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$. Далі, для кожної функції $\psi_j \in G_{\nu_j}[-b_j,b_j]$ одержуємо, що

$$U_{\sigma_j}\varphi_j(\tau_j) = \theta(s_j)\theta(t_j)\psi(t_j+s_j), \quad \varphi_j = \theta\psi_j, \quad \sigma_j = s_j\theta(s_j), \quad \tau_j = t_j\theta(t_j).$$

За твердженням 2 існує функція $\varrho \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j-\nu_j, b_j+\nu_j]$ така, що $\varrho|_{[-b_j,b_j]} \equiv 1$. Тоді для чисел $|s_j| < \nu_j$ маємо $\operatorname{supp}[\varrho(t_j)\psi_j(t_j+s_j)] \subset [-b_j,b_j]$. З нерівності (4) випливає, що $\varrho(t_j)\psi_j(t_j+s_j) \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j,b_j]$ для $|s_j| < \nu_j$. Зрозуміло, що функція

$$(-\nu_j,\nu_j) \ni s_j \to \varrho(t_j)\psi_j(t_j+s_j) \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j,b_j], \quad t_j \in [-b_j,b_j],$$

є нескінченно диференційовною, бо $\psi_j(t_j+s_j) \in C^\infty$. Тому з розкладу функції $\psi(t_j+s_j)$ в ряд Тейлора випливає, що

$$\varrho(t_j)\psi(t_j+s_j) - \psi(t_j) - i\partial_j\psi(t_j)s_j = \frac{s_j^2}{2}\partial_j^2\psi(t_j+\lambda s_j) \longrightarrow 0,$$

якщо $s_j \to 0$ і $0<\lambda<1$. Для чисел $|s_j| < \nu_j$ одержимо, що $\varrho(t_j)\psi(t_j+s_j) = \psi(t_j+s_j)$, тобто відображення

$$G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j,b_j] \ni \psi_j(t_j+s_j) \longrightarrow \theta(s_j)\theta(t_j)\psi(t_j+s_j) \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[0,b_j]$$

є неперервним. А отже, напівгрупа належить класу (C_0) і на просторі $\mathcal{G}_\nu[0,b_j]$ має генератор $i\partial_j$. Отже, U_{σ_j} належить до класу (C_0) і має генератор $i\partial_j$ на $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$. З нерівності $(k_j+1)^{(k_j+1)\aleph} \leq 2^{(k_j+1)\aleph}k_j^{k_j\aleph}$ отримуємо

$$\|\partial_j\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]} \leq \nu_j \sup_{k_j\in\mathbb{Z}_+}\ \sup_{\tau_j\in[0,b_j]} 2^{(k_j+1)\aleph}\frac{|\partial_j^{k_j+1}\varphi_j(\tau_j)|}{\nu_j^{k_j+1}(k_j+1)^{(k_j+1)\aleph}} \leq$$

$$\nu_j \sup_{k_j\in\mathbb{Z}_+}\ \sup_{\tau_j\in[0,b_j]} \frac{|\partial_j^{k_j+1}\varphi_j(\tau_j)|}{(2^{-\aleph}\nu_j)^{k_j+1}(k_j+1)^{(k_j+1)\aleph}} \leq \nu_j\|\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\mu_j}[0,b_j]},$$

де покладено $\mu_j = \nu_j 2^{-\aleph}$. Отже, $\|\partial_j\varphi\|_{\mathcal{G}_{\nu_1}[0,b_1]\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}\mathcal{G}_{\nu_n}[0,b_n]} \leq \nu_j\|\varphi\|_{\mathcal{G}_{\mu_1}[0,b_1]\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}\mathcal{G}_{\mu_n}[0,b_n]}$, звідки маємо, що $\partial_j \in L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$. Далі, з регулярності індуктивної границі

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) = \lim_{\nu\succeq 1, b\succ 0}\operatorname{ind}\mathcal{G}_{\nu_1}[0,b_1]\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}\mathcal{G}_{\nu_n}[0,b_n]$$

випливає, що набір $\{U_{\sigma_j} : \sigma_j \geq 0\}$ є одностайно обмеженою (C_0)-напівгрупою над простором $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$. Нарешті, оскільки $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ – рефлексивний та бочковий (твердження 3), то за теоремою Банаха-Штейнгауза сім'я операторів $\{U_{\sigma_j} : \sigma_j \geq 0\}$ є одностайно неперервною. Теорему доведено. □

Тензорний добуток (C_0)-напівгруп операторів зсуву U_{σ_j} з генераторами $i\partial_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ надалі ми будемо позначати через $U_\sigma := U_{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes U_{\sigma_n}$. Зрозуміло, цей тензорний добуток є n-параметричною (C_0)-напівгрупою.

Визначимо спряжений простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$, який будемо позначати за аналогією до розподілів Шварца через $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$. Ці функціонали звичайно називають ультрарозподілами класу Жевре в куті $\mathbb{R}^n_+$. Очевидно, що виконується вкладення $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \subset \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$. Білінійна форма вигляду

$$\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \times \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \ni (f, \varphi) \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$$

породжує двоїстість $\langle \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+), \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \rangle$.

Надалі на просторі $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ сильну топологію відносно цієї двоїстості $\langle \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+), \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \rangle$ позначаємо через $\beta(\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+), \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+))$, а слабку – через $\sigma(\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+), \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+))$.

Твердження 4. *Простір $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ – бочковий, рефлексивний і ядерний в сильній топології $\beta(\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+), \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+))$ відносно двоїстості $\langle \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+), \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \rangle$.*

Доведення. Твердження безпосередньо випливає з відомого факту, що названі властивості справедливі для сильно спряжених просторів, як тільки ними володіють їх передспряжені. □

Твердження 5. *Існує неперервна функція $\omega_\varepsilon \in \mathcal{G}_{2\zeta(\aleph)/\varepsilon}[0, \varepsilon]$ така, що*

$$\omega_\varepsilon \overset{\sigma(\mathcal{G}', \mathcal{G})}{\longrightarrow} \delta, \quad \varepsilon \to 0^+,$$

де $\delta = \delta_1 \otimes \ldots \otimes \delta_n \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ і $\delta_i \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}_+)$ $(i = 1, \ldots, n)$ є функціями Дірака одного аргументу. Для довільної функції $\varphi(\tau) = \varphi_1(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(\tau_n) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ виконується рівність

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \langle \delta_1, \varphi_1 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \delta_n, \varphi_n \rangle = \varphi_1(0) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(0). \tag{10}$$

Доведення. З теореми Карлемана-Данжуа [5, гл.I, теор.1.3.8] випливає, що для довільного $k^\aleph$ $(k \in \mathbb{Z}^n_+)$ існують функції ψ_j $(j = 1, \ldots, n)$ такі, що

$$|\partial_j^{k_j} \psi_j| \leq 2[2\zeta(\aleph)]^{k_j} k_j^{k_j \aleph}, \quad |\operatorname{supp} \psi_j| \leq 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(t_j) dt_j = 1, \quad \psi_j \in G_{2\zeta(\aleph)}[-1, 1].$$

Тоді функція $\omega(\tau) = \omega_1(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \omega_n(\tau_n)$, де $\omega_j = \theta_j \psi_j$, для довільного $k \in \mathbb{Z}^n_+$ задовольняє співвідношення

$$|\partial^k \omega| \leq 2^n [2\zeta(\aleph)]^{|k|} k^{k\aleph}, \quad \operatorname{supp} \omega \subset [0, 1], \quad \int_{\mathbb{R}^n_+} \omega(\tau) d\tau = \frac{1}{2^n}.$$

Отже, для функції $\omega_\varepsilon(\tau) = \varepsilon^{-n}\omega(\tau/\varepsilon)$ отримаємо

$$|\partial^k \omega_\varepsilon| \le \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \left(\frac{2\zeta(\aleph)}{\varepsilon}\right)^{|k|} k^{k\aleph}, \quad \operatorname{supp}\omega_\varepsilon \subset [0,\varepsilon], \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \omega_\varepsilon(\tau)d\tau = \frac{1}{2^n}.$$

Для довільної функції $\varphi(\tau) = \varphi_1(\tau_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(\tau_n) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \omega_\varepsilon(\tau)\varphi(\tau)d\tau - \varphi(0)\right| \le \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\omega_\varepsilon(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))|d\tau \le$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\max_{\tau\in[0,\varepsilon]}|\varphi(\tau)-\varphi(0)|\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\omega_\varepsilon(\tau)d\tau = \lim_{\tau_1\to 0^+}\frac{\varphi_1(\tau_1)-\varphi_1(0)}{2}\cdot\ldots\cdot\lim_{\tau_n\to 0^+}\frac{\varphi_n(\tau_n)-\varphi_n(0)}{2} = 0,$$

звідки і буде випливати справедливість рівності (10). □

Встановимо тепер важливу теорему про зображення простору ультрарозподілів $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ в алгебрі лінійних операторів над $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$.

Теорема 2. *Відображення*

$$T : \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \ni f \longrightarrow T_f \in L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)], \tag{11}$$

визначене співвідношенням $(T_f\varphi)(\tau) = \langle f(\sigma), U_\sigma\varphi(\tau)\rangle,\ \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$, здійснює лінійний топологічний ізоморфізм на комутант (C_0)-напівгрупи операторів $[U_\sigma]^c$ в алгебрі $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$.

Обернене відображення $T^{-1}\colon [U_\sigma]^c \longrightarrow \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ однозначно визначає згортку ультрарозподілів

$$\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)\times\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \ni (f,g) \to f * g \equiv T^{-1}(T_f\circ T_g) \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+), \tag{12}$$

відносно якої $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ є алгеброю з одиницею δ. При цьому одиничному оператору при відображенні T^{-1} відповідає δ-функція.

Доведення. Очевидно, що ядро $\operatorname{Ker} T$ є тривіальним і відображення (11) є лінійним. Для спряженої (C_0)-напівгрупи операторів U'_σ відносно двоїстості $\langle\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+),\,\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)\rangle$ з рівності $\partial^k(T_f\varphi) = T_f\partial^k\varphi$ та з неперервності функціоналу f отримуємо

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n_+}\sup_{\tau\in[0,b]}\frac{|\partial^k(T_f\varphi)(\tau)|}{\nu^k k^{k\aleph}} \le \|U'_\sigma f\|_{\mathcal{G}'_\nu[0,b]}\sup_{k\in\mathbb{Z}^n_+}\sup_{\tau\in[0,b]}\frac{|\partial^k\varphi(\tau)|}{\nu^k k^{k\aleph}}, \qquad \varphi\in\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+).$$

Оскільки $(T_f\varphi)(\tau) = \langle f(\sigma),\,\theta(t)\varphi(t+\sigma)\rangle$ для $\tau = \theta(t)t$ та $\sigma\in\mathbb{R}^n_+$, а також $U_\rho\varphi_\tau = \theta(r)\varphi(\tau+r)$ для $\rho = \theta(r)r$ та $r\in\mathbb{R}^n$, то маємо

$$U_\rho\circ T_f\varphi(\tau) = \langle f(\sigma),\,\theta(r)\theta(t)\varphi(\sigma+r+t)\rangle = \langle f(\sigma),\,\theta(t)U_\rho\varphi(\sigma+t)\rangle = T_f\circ U_\rho\varphi(\tau).$$

Нехай тепер $T_0 \in L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$ є довільний оператор такий, що $T_0\circ U_\sigma = U_\sigma\circ T_0$. Для довільної функції $\varphi\in\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ лінійний неперервний функціонал $g:\varphi\longrightarrow T_0\varphi(0)$ визначає розподіл $g\in\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$, тобто $\langle g,\,\varphi\rangle = T_0\varphi(0)$. Замінюючи в цій рівності функцію φ на $U_\sigma\varphi$, отримуємо $\langle g,\,U_\sigma\varphi\rangle = T_0\circ U_\sigma\varphi(0)$. Тому

$$T_\sigma\varphi(\tau) = \langle g(\sigma),\,U_\sigma\varphi(\tau)\rangle = \langle g(\sigma),\,U_\tau\varphi(\sigma)\rangle = T_0\circ U_\tau\varphi(0) = U_\tau\circ T_0\varphi(0) = T_0\varphi(\tau).$$

Отже, $T_0 = T_\sigma$ і відображення (11) здійснює алгебраїчний сюр'єктивний ізоморфізм на комутант $[U_\sigma]^c$.

Оскільки простори $\mathcal{G}_\nu[0,b]$ є інваріантними відносно дії операторів T алгебри $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$, то комутант $[U_\sigma]^c$ всіх таких операторів в алгебрі $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$ належить проективній границі $\lim\limits_{\nu,b\succ 0}\operatorname{pr} L[\mathcal{G}_\nu[0,b]]$, де в просторах $L[\mathcal{G}_\nu[0,b]]$ задано топології рівномірної збіжності на опуклих компактах. Проективна границя ізоморфно вкладається в $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$, тому до T можна застосувати теорему про відкрите відображення, в силу якої отримуємо, що T реалізує топологічний ізоморфізм $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \simeq [U_\sigma]^c$.

Доведемо другу частину теореми. Для довільних ультрарозподілів $f, g \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ маємо $T_f \circ T_g \in [U_\sigma]^c$, і комутант $[U_\sigma]^c$ є підалгеброю в $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$ з одиницею $I^n_{\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)}$. Тоді $f * g = T^{-1}(T_f \circ T_g) \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$, зокрема для δ-функції $T_\delta\varphi(\tau) = \langle\delta(\sigma), U_\sigma\varphi(\tau)\rangle = \varphi(\tau)$ і $\delta * f = T^{-1}(T_f \circ T_\delta) = T^{-1}T_f = f$. Тобто відображення (12) визначає згортку ультрарозподілів з $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$, і відносно цієї згортки простір $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ є алгеброю. Теорему доведено.□

Твердження 6. *Для довільного ультрарозподілу $f \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ в слабкій топології $\sigma(\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+), \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+))$ виконується збіжність*

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \ni f_\varepsilon \equiv T_f\omega_\varepsilon \to f, \quad \varepsilon \to 0^+,$$

тобто в загальному випадку $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \equiv \overline{\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)}$ в слабкій топології простору $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$.

Доведення. Для довільної функції $\varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ та спряженого оператора $T'_f \in L[\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)]$ справедливі рівності

$$\langle T'_f\omega_\varepsilon, \varphi\rangle = \langle\omega_\varepsilon, T_f\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \omega_\varepsilon(\tau)\langle f(\sigma), U_\sigma\varphi(\tau)\rangle d\tau =$$

$$\left\langle f(\sigma), U_\sigma \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \omega_\varepsilon(\tau)\varphi(\tau)d\tau \right\rangle \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \langle f(\sigma), U_\sigma\varphi(0)\rangle = \langle f, \varphi\rangle,$$

де ω_ε – регулярний ультрарозподіл в просторі $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$. □

Література

1. Лопушанський О.В., Соломко А.В. Операторне числення для генераторів сильно неперервних операторних напівгруп в алгебрі ультрарозподілів класу Жевре (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача). – Львів, 2007. – 22 с.

2. Робертсон А., Робертсон. В. Топологические векторные пространства: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 257 с.

3. Себаштьян-и-Силва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // Сб. Математика. – 1957. – Т.1, №1. – С. 60-77.

4. Соломко А.В., Шарин С.В. *Функціональне числення над банаховими просторами в конусі* $\mathbb{R}^n_+$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т.47, №4. – С. 51-56.

5. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Теория распределений и анализ Фурье.* – Т.1. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

6. Grasela K. *Generalized derivations and Fourier transform of polinomial ultradistributions* // Matematychni Studii, **20**, 2 (2003), 167-178.

7. Komatsu H. *Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization* // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math., 20 (1973), 25-105.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 7.09.2009

Solomko A.V *Operator representation of Gevrey ultradistributions algebra with supports on positive n-dimensional angle*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 197–206.

The representation of convolution Gevrey algebra of ultradistributions as commutant of the n-parametric strongly continuous semigroup of shifts in algebra of linear and continuous mappings over the space of ultradifferentiable Gevrey functions with supports on positive n-dimensional angle is proved.

Соломко А.В *Операторное изображение алгебры ультрараспределений Жевре с носителями в положительном n-измеримом угле // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 197–206.

Для построенной двойственности ультрараспределений Жевре и ультрадифференцируемых функций доказана теорема об изображении сверточной алгебры ультрараспределений типа Жевре в виде коммутанта сильно непрерывной полугруппы сдвигов в алгебре линейных непрерывных отображений над пространством ультрадифференцируемых функций с носителями в положительном n-измеримом угле.