Карпатські математичні
публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical
Publications. V.1, No.2

УДК 517.98

Чернега І.В.

СИМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Чернега І.В. *Симетричні поліноми на банахових просторах // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 214–233.

В роботі наводиться огляд основних результатів про симетричні поліноми на банахових просторах та переставно-інваріантних просторах функцій. Наведено застосування до банахових алгебр та доведено деякі нові результати в цьому напрямку.

Вступ

Симетричні поліноми та симетричні функції мають широке застосування в математиці та математичній фізиці. Так, вони присутні в елементарній математиці (теорема Вієта), в теорії представлень симетричних груп і повних лінійних груп над полем комплексних чисел або скінченними полями. Вони також є важливими об'єктами в алгебраїчній комбінаториці.

Симетричні поліноми на скінченновимірних просторах є об'єктом класичної алгебри. Поняття про симетричні поліноми на гільбертових просторах і, більш загально, на просторах ℓ_p і $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, вперше було введено А.С. Немировським та С.М. Семеновим [17]. Ними було, зокрема, доведено теореми про те, що кожен симетричний поліном на гільбертовому просторі, просторах ℓ_p і $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, виражається через елементарні симетричні поліноми на цих просторах.

В роботі [9] М. Гонзалесом, Р. Гонзало і Х. Харамілло ці результати узагальнено на дійсні банахові простори з деякою симетричною структурою, так звані переставно-інваріантні простори функцій.

Субсиметричні поліноми були введені в [17] на просторах ℓ_p, згодом досліджувалися в статтях [11], [10]. Так, в [10] Р. Гонзало досліджує цей вид поліномів на банахових просторах з субсиметричним базисом. Зокрема, нею описано лінійний базис у скінченновимірному просторі n-однорідних субсиметричних поліномів.

В [1] автором отримано результати, які стосуються симетричних поліномів на просторі ℓ_p. А саме, використовуючи введений в даній роботі оператор симетричного зсуву,

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46-02, 46E30, 46J20.
Ключові слова і фрази: симетричні поліноми на банахових просторах, симетричні аналітичні функції, банахова алгебра.

встановлено аналоги формули Мартіна та поляризаційної формули для симетричних поліномів і описано деякі диференціювання на алгебрі симетричних поліномів.

Результати, пов'язані з симетричними поліномами та аналітичними відображеннями, мають застосування і в інших напрямках функціонального аналізу. Так, в роботі [2] Р. Аленкар, Р. Арон, П. Галіндо і А. Загороднюк, використовуючи результати, отримані в [9], дослідили спектр алгебри симетричних рівномірно неперервних аналітичних функцій на одиничній кулі простору ℓ_p. Також у статті [6] досліджується спектр алгебри симетричних аналітичних функцій на одиничній кулі простору $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, та у [5] — алгебри симетричних та субсиметричних аналітичних функцій на просторі ℓ_p, $1 \le p < \infty$.

Стаття містить широкий огляд з даної тематики та всі необхідні попередні відомості. Детальнішу інформацію про поліноми та аналітичні функції на банахових просторах можна знайти в монографіях [7], [8], [16].

1 Попередні відомості

Нехай X, Y — банахові простори над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел. Відображення $P : X \to Y$ називається *n-однорідним поліномом*, якщо існує симетричне n-лінійне відображення $A : X^n \to Y$ таке, що для всіх $x \in X$, $P(x) = A(x, \ldots, x)$.

Поліном степеня n на X є скінченною сумою k-однорідних поліномів, $k = 0, \ldots, n$. Через $\mathcal{P}(^n X, Y)$ будемо позначати простір n-однорідних неперервних поліномів з X в Y і через $\mathcal{P}(X, Y)$ — простір всіх неперервних поліномів.

Добре відомо ([12], XI §52), що для $n < \infty$ кожен симетричний поліном на просторі $\mathbb{C}^n$ можна подати як поліном від елементарних симетричних поліномів $(R_i)_{i=1}^n$, $R_i(x) = \sum_{k_1 < \cdots < k_i} x_{k_1} \ldots x_{k_i}$ єдиним чином.

Як було відзначено, вивчення симетричних поліномів на гільбертових просторах та просторах ℓ_p і $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, розпочалося з роботи Немировського та Семенова [17]. Гонзалесом, Гонзало та Харамілло [9] ці результати узагальнено на дійсні банахові простори з деякою симетричною структурою, так звані переставно-інваріантні простори функцій, на вимірному просторі (I, μ) [13]. З точністю до деяких несуттєвих нормалізацій, вивчення переставно-інваріантних просторів функцій зводиться до наступних трьох випадків:

1. $I = \mathbb{N}$ і маса кожної точки — одиниця;
2. $I = [0,1]$ зі звичайною мірою Лебега;
3. $I = [0, \infty)$ зі звичайною мірою Лебега.

Кажемо, що σ є автоморфізмом I, якщо σ є біекцією I, σ і σ^{-1} є вимірними і зберігають міру. Позначимо через $\mathcal{G}(I)$ групу всіх автоморфізмів I. Якщо $X(I)$ є переставно-інваріантним простором функцій на I та $f \in X(I)$, то f є дійснозначною вимірною функцією на I та $f \circ \sigma \in X(I)$ для всіх $\sigma \in X(I)$. Також

$$\|f \circ \sigma\| = \|f\|$$

для всіх $\sigma \in \mathcal{G}(I)$ і всіх $f \in X(I)$. Ми завжди будемо розглядати простір $X(I)$, наділений цією нормою.

Слідом за [17] будемо казати, що поліном P на $X(I)$ є симетричним, якщо

$$P(f \circ \sigma) = P(f)$$

для всіх $\sigma \in \mathcal{G}(I)$ і всіх $f \in X(I)$.

Також, якщо $\mathcal{G}_0$ є підгрупою $\mathcal{G}(I)$, то поліном P називається $\mathcal{G}_0$-інваріантним, коли $P(f) = P(f \circ \sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathcal{G}_0$ і всіх $f \in X(I)$.

Нехай $X(I)$ — переставно-інваріантний простір функцій на I. Розглянемо множину

$$\mathcal{J}(X) = \{r \in \mathbb{N} : X(I) \subset L_r(I)\}.$$

Якщо $\mathcal{J}(X) \neq \emptyset$, то для кожного $r \in \mathcal{J}(X)$ можна розглянути поліноми

$$P_r(f) = \int_I f^r.$$

Ці поліноми називають елементарними симетричними поліномами на $X(I)$.

Симетричні поліноми на просторах з симетричним базисом .

Нехай $X = X(\mathbb{N})$ — банаховий простір з симетричним базисом $\{e_n\}$. Поліном P на X є симетричним, якщо для кожної перестановки $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{N})$

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\sigma(i)}\Big).$$

Розглянемо скінченну групу $\mathcal{G}_n(\mathbb{N})$ перестановок на множині $\{1, \ldots, n\}$ і σ-скінченну групу $\mathcal{G}_0(\mathbb{N}) = \cup_n \mathcal{G}_n(\mathbb{N})$, як підгрупу $\mathcal{G}(\mathbb{N})$. За неперервністю, поліном f є симетричним тоді і тільки тоді, якщо він є $\mathcal{G}_0(\mathbb{N})$-інваріантним. Справді, якщо P є $\mathcal{G}_0(\mathbb{N})$-інваріантним і $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{N})$, то

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_{\sigma(i)}\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\sigma(i)}\Big).$$

Кажемо, що послідовність $\{x_n\}$ має *нижню p-оцінку* для деякого $p \geq 1$, якщо існує константа $C > 0$ така, що

$$C\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big\|$$

для всіх $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що $X \subset \ell_r$ тоді і тільки тоді, коли базис має нижню r-оцінку і тому, в цьому випадку, маємо:

$$\mathcal{J}(X) = \{r \in \mathbb{N} : \{e_n\} \text{ має нижню r-оцінку}\}.$$

Позначимо тепер $n_0(X) = \inf \mathcal{J}(X)$ (інфімум порожньої множини є ∞). Тоді елементарні симетричні поліноми мають вигляд:

$$P_r\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^r,$$

де $r \geq n_0(X)$.

Теорема 1. *[9] Нехай X — банахів простір з симетричним базисом e_n, P — симетричний поліном на X, позначимо $k = \deg P$ і $N = n_0(X)$. Тоді*

1. Якщо $k < N$, то $P = 0$.

2. Якщо $k \geq N$, тоді існує дійсний поліном q від декількох дійсних змінних такий, що

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = q\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^N, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k\Big)$$

для кожного $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X$.

Симетричні поліноми на $X[0,1]$ та $X[0,\infty)$.

Розглянемо $X[0,1]$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій на $[0,1]$. Зауважимо, що множина $\mathcal{J}(X)$ ніколи не є порожньою, оскільки завжди маємо, що $X[0,1] \subset L_1[0,1]$.

Введемо величину

$$n_\infty(X) = \sup\{r \in \mathbb{N} : X[0,1] \subset L_r[0,1]\}.$$

Отже, елементарні симетричні поліноми на $X[0,1]$ мають вигляд

$$P_r(f) = \int_0^1 f^r$$

для кожного цілого $r \leq n_\infty(X)$.

Теорема 2. *[9] Нехай $X[0,1]$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій на $[0,1]$ і розглянемо індекс $n_\infty(X)$, визначений вище. Нехай P — $\mathcal{G}_0[0,1]$-інваріантний поліном на $X[0,1]$ і нехай $k = \deg P$. Тоді існує дійсний поліном q декількох дійсних змінних такий, що*

$$P(f) = q\Big(\int_0^1 f, \dots, \int_0^1 f^m\Big)$$

для всіх $f \in X$, де $m = \min\{n_\infty(X), k\}$.

Для сепарабельного переставно-інваріантного простору функцій $X[0,\infty)$ ми розглянемо наступні асоційовані простори:

$$X[0,1] = \{f \cdot \chi_{[0,1]} : f \in X[0,\infty)\}$$

і

$$X(\mathbb{N}) = \overline{[\chi_{[n,n+1]}]}.$$

Зауважимо, що простір $X[0,1]$ є сепарабельним переставно-інваріантним простором функцій на $[0,1]$ і $X(\mathbb{N})$ є банаховим простором з симетричним базизом.

Для того, щоб описати множину $\mathcal{J}(X[0,\infty))$, нам потрібна наступна лема.

Лема 1.1. *[9] Нехай $X[0,\infty)$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій, $X[0,1]$ і $X(\mathbb{N})$ — визначені вище. Розглянемо $n_0 = n_0(X(\mathbb{N}))$ і $n_\infty = n_\infty(X[0,1])$. Тоді:*

1. Якщо $n_0 > n_\infty$, то $\mathcal{J}(X[0,\infty)) = \varnothing$.

2. Якщо $n_0 \leq n_\infty$, то $\mathcal{J}(X[0,\infty)) = \{n \in \mathbb{N} : n_0 \leq n \leq n_\infty\}$.

Теорема 3. *[9] Нехай $X[0,\infty)$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій, P — $\mathcal{G}_0$-інваріантний поліном на $X[0,\infty)$, $k = \deg P$, n_0 і n_∞ — визначені вище. Тоді*

1. Якщо або $n_0 > n_\infty$, або $k < n_0 \leq \infty$, то $P = 0$.

2. Якщо $n_0 \leq n_\infty$ і $n_0 \leq k$, тоді існує дійсний поліном q декількох дійсних змінних, такий що

$$P(f) = q\Big(\int_0^\infty f^{n_0}, \dots, \int_0^\infty f^m\Big),$$

де $m = \min\{n_\infty, k\}$.

Субсиметричні поліноми

Нехай тепер X — банаховий простір з субсиметричним базисом $\{e_n\}$. Під субсиметричним базисом ми розуміємо безумовний базис на X, який є еквівалентним до кожної своєї підпослідовності.

n-однорідний поліном P на X називається *субсиметричним поліномом,* якщо для всіх $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, де $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, і всіх цілих n виконується наступне:

$$P\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_{k_i}\Big),$$

де $k_1 < \ldots < k_n$.

Зауважимо, що дане означення, яке було введене в роботі [10], співпадає з означенням стандартних поліномів, що були представлені Немировським і Семеновим в [17].

Позначимо через $n_0(X) = \min \mathcal{J}(X)$. Має місце наступна теорема.

Теорема 4. *[10] Нехай X — банахів простір з субсиметричним базисом e_n і $N = n_0(X)$.*

Якщо $n \geq N$, тоді кожен n-однорідний субсиметричний поліном може бути представлений як лінійна комбінація елементарних n-однорідних субсиметричних поліномів

$$P_{i_1,\dots,i_s}\Big(\sum_{n=1}^\infty x_n e_n\Big) = \sum_{n_1<\dots<n_s} x_{n_1}^{i_1}\cdots x_{n_s}^{i_s}, \tag{1}$$

де $i_1 + \dots + i_s = n$ і кожне $i_j \geq N$.

Якщо $n < N$, тоді на X не існує нетривіальних n-однорідних субсиметричних поліномів.

2 Оператор зсуву у просторі симетричних аналітичних функцій на ℓ_p

У даному розділі наведені результати, що стосуються симетричних поліномів на просторі ℓ_p, які отримані за допомогою введеного в роботі [1] оператора симетричного зсуву.

Легко бачити, що для симетричної функції $f(x)$ на ℓ_p функція $f(x+y)$ для деякого фіксованого $y \in \ell_p$ не є, взагалі кажучи, симетричною, тобто простір симетричних функцій не є інваріантним відносно звичайного оператора зсуву $f(x) \mapsto f(x+y)$. У

[1] запропоновано інший зсув на ℓ_p, який зберігає простір симетричних аналітичних функцій.

Нехай $x, y \in \ell_p$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Визначимо симетричний зсув $x \bullet y \in \ell_p$ формулою

$$x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots).$$

Відзначимо основні властивості симетричного зсуву.

1. Якщо $x = \sigma_1(u)$ і $y = \sigma_2(v)$ для деяких підстановок σ_1, σ_2, то $x \bullet y = \sigma(u \bullet v)$ для деякої підстановки σ на $\mathbb{N}$.

2. $\|x \bullet y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$.

3. $F_n(x \bullet y) = F_n(x) + F_n(y)$ для довільного натурального $n \geq p$, де $\{F_k\}$ є алгебраїчним базисом в просторі симетричних поліномів на ℓ_p, $F_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^k$.

Позначимо через T_y^s оператор симетричного зсуву $f(x) \mapsto f(x \bullet y)$, через $H_b(\ell_p)$ будемо позначати алгебру всіх цілих функцій обмеженого типу на ℓ_p (тобто цілих функцій, які є обмеженими на обмежених множинах), через $H_{bs}(\ell_p)$ — алгебру всіх симетричних цілих функцій обмеженого типу на ℓ_p.

Твердження 2.1. *T_y^s є неперервним гомоморфізмом алгебри $H_{bs}(\ell_p)$ в себе.*

Доведення. Спочатку покажемо, що якщо $f(x) \in H_{bs}(\ell_p)$, то і $f(x \bullet y) \in H_{bs}(\ell_p)$ для кожного фіксованого $y \in \ell_p$. Дійсно, симетричний зсув $x \bullet y$ можемо записати у вигляді $x \bullet y = x \bullet 0 + 0 \bullet y$. Відображення $x \mapsto x \bullet 0$ є лінійною сюр'єкцією на підпростір Z простору ℓ_p, який є замкненою лінійною оболонкою $\{e_1, e_3, \ldots, e_{2n+1}, \ldots\}$. Згідно з [3], $f(x + y) \in H_b(\ell_p)$ для кожного фіксованого y, і тому $f(x + 0 \bullet y) \in H_b(\ell_p)$ для кожного фіксованого y. Зокрема, звуження $f(x + 0 \bullet y)$ на Z належить до $H_b(Z)$. Таким чином, $f(x \bullet y) = f(x \bullet 0 + 0 \bullet y) \in H_b(\ell_p)$ для кожного y. З іншого боку, очевидно, що $f(x \bullet y)$ — симетрична функція, отже, $f(x \bullet y)$ належить простору $H_{bs}(\ell_p)$.

Нехай $f(x), g(x) \in H_{bs}(\ell_p)$. Оператор T_y^s є лінійним і мультиплікативним, оскільки

$$T_y^s(f(x) + g(x)) = f(x \bullet y) + g(x \bullet y) = T_y^s(f(x)) + T_y^s(g(x)),$$

$$T_y^s(f(x)g(x)) = f(x \bullet y)g(x \bullet y) = T_y^s(f(x))T_y^s(g(x)).$$

Нехай $x, y \in \ell_p$ і $\|x\| \leq \|y\| \leq r$. Тоді $\|x \bullet y\| \leq 2r$ і

$$|T_y^s f(x)| \leq \sup_{\|z\| \leq 2r} |f(z)| = \|f\|_{2r}.$$

Отже, T_y^s є неперервним оператором. $\square$

Нехай

$$x^{\bullet m} := \underbrace{x \bullet \cdots \bullet x}_{m} \quad \text{i} \quad \mathop{\bullet}_{i=1}^{m} x_i := x_1 \bullet \cdots \bullet x_m.$$

З властивості 3 випливає, що $F_k(x^{\bullet m}) = mF_k(x)$ і $F_k\Big(\overset{m}{\underset{i=1}{\bullet}} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} F_k(x_i)$ для довільного натурального m і $k \geq p$.

Зауважимо, що в означенні симетричного зсуву суттєвим є те, що простір нескінченновимірний. Надалі ми завжди вважатимемо, що симетричні поліноми визначені на нескінченновимірному ℓ_p.

2.1 Аналог формули Мартіна для симетричних поліномів.

Нехай $P(x) = P_n(x) + \cdots + P_0$ — розклад деякого полінома P на однорідні доданки. Нагадаймо, що згідно з формулою Мартіна [14], для будь-яких попарно різних чисел $b_0, \ldots, b_n$ існує квадратна невироджена матриця $A(n, \overrightarrow{b})$, $(n+1) \times (n+1)$, яка залежить тільки від $\overrightarrow{b} = (b_0, \ldots, b_n)$ така, що

$$\begin{pmatrix} P_n(x) \\ \vdots \\ P_0 \end{pmatrix} = A(n, \overrightarrow{b}) \begin{pmatrix} P(b_n x) \\ \vdots \\ P(b_0 x) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким чином, за допомогою формули Мартіна можна обчислити однорідну компоненту P_k, $k = 0, \ldots, n$, довільного неоднорідного полінома P степеня n.

Нехай тепер P — симетричний поліном степеня $n \geq p$ на ℓ_p. Як було зауважено вище, існує поліном $Q(u_{\lceil p \rceil}, \ldots, u_n)$ від $n - \lceil p \rceil + 1$ змінних, такий що

$$P(x) = Q(F_{\lceil p \rceil}(x), \ldots, F_n(x)),$$

де $\lceil p \rceil$ — найменше ціле число, яке є більшим або дорівнює p.

Скажемо, що симетричний поліном P є цілком однорідним поліномом степеня (n, m), якщо P — n-однорідний і відповідний йому поліном Q — m-однорідний. Наприклад, $F_1F_3 + F_2^2$ буде цілком однорідним поліномом степеня $(4, 2)$, а $F_1^2 + F_2$ — однорідним степеня 2, але не цілком однорідним. Очевидно, що кожен симетричний поліном можна подати (єдиним чином) у вигляді скінченної суми цілком однорідних. У [1] отримано спосіб знаходження такого розкладу, використовуючи симетричний зсув та формулу Мартіна.

Поліном Q, взагалі кажучи, неоднорідний і $\deg Q \leq n$. Нехай $Q = Q_n + \cdots + Q_0$ — розклад Q на однорідні доданки. Візьмемо довільний набір попарно різних натуральних чисел $\overrightarrow{m} = (m_0, \ldots, m_n)$ і запишемо формулу (2) для Q. Маємо:

$$\begin{pmatrix} Q_n(u) \\ \vdots \\ Q_0 \end{pmatrix} = A(n, \overrightarrow{m}) \begin{pmatrix} Q(m_n u) \\ \vdots \\ Q(m_0 u) \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix} Q_n(F_{\lceil p \rceil}(x), \ldots, F_n(x)) \\ \vdots \\ Q_0 \end{pmatrix} =$$

$$A(n, \overrightarrow{m}) \begin{pmatrix} Q(m_n F_{\lceil p \rceil}(x), \ldots, m_n F_n(x)) \\ \vdots \\ Q(m_0 F_{\lceil p \rceil}(x), \ldots, m_0 F_n(x)) \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$P(x^{\bullet m_k}) = Q(m_k F_{\lceil p \rceil}(x), \ldots, m_k F_n(x)),$$

то, згідно з (2),

$$\begin{pmatrix} Q_n(F_{\lceil p \rceil}(x), \ldots, F_n(x)) \\ \vdots \\ Q_0 \end{pmatrix} = A(n, \overrightarrow{m}) \begin{pmatrix} P(x^{\bullet m_n}) \\ \vdots \\ P(x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Застосуємо операцію спряження до рівності (2) для випадку простору ℓ_p, отримаємо:

$$(P_n(x), \ldots, P_0(x)) = (P(b_n x), \ldots, P(b_0 x)) A^*(n, \overrightarrow{b}).$$

Очевидно, що для довільного $0 \le k \le n$ має місце наступна рівність:

$$(P_n(x^{\bullet m_k}), \ldots, P_0(x^{\bullet m_k})) = (P(b_n x^{\bullet m_k}), \ldots, P(b_0 x^{\bullet m_k})) A^*(n, \overrightarrow{b}),$$

або ж

$$\begin{pmatrix} P_n(x^{\bullet m_n}) & \cdots & P_0(x^{\bullet m_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_n(x^{\bullet m_0}) & \cdots & P_0(x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} P(b_n x^{\bullet m_n}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(b_n x^{\bullet m_0}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix} A^*(n, \overrightarrow{b}). \tag{4}$$

Очевидно, що якщо P — n-однорідний поліном, то Q_k — (n,k)-цілком однорідний поліном. В загальному випадку, нехай $P = \sum\limits_{i,j=0}^{n} Q(i,j)$ — розклад симетричного полінома P на цілком однорідні доданки, де $Q(i,j)$ — деякі (i,j)-цілком однорідні поліноми. Зауважимо, що $Q(i,j) = 0$ при $i < j$. Домножимо рівність (4) на матрицю $A(n, \overrightarrow{m})$ зліва і, комбінуючи (3) і (4), отримуємо наступну теорему.

Теорема 5. *Для довільного набору попарно різних дійсних чисел $\overrightarrow{b} = (b_0, \dots b_n)$ та попарно різних натуральних чисел $\overrightarrow{m} = (m_0, \dots, m_n)$ існують невироджені матриці $A(n, \overrightarrow{b})$ і $A(n, \overrightarrow{m})$ такі, що для довільного симетричного полінома P степеня n*

$$\begin{pmatrix} Q(n,n) & \cdots & Q(0,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q(n,0) & \cdots & Q(0,0) \end{pmatrix} =$$

$$A(n, \overrightarrow{m}) \begin{pmatrix} P(b_n x^{\bullet m_n}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(b_n x^{\bullet m_0}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix} A^*(n, \overrightarrow{b}).$$

2.2 Аналог поляризаційної формули для симетричних поліномів.

В даному підрозділі доведено аналог поляризаційної формули для симетричних поліномів. Нагадаємо, що поляризаційна формула є відомим класичним результатом (див., напр. [14], [15]), дозволяє відновити n-лінійну симетричну форму A за n-однорідним поліномом P і має вигляд:

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n P\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i x_j \right). \tag{5}$$

Припустимо, що P — симетричний поліном степеня $n \geq p$ на ℓ_p, $P(x) = Q(F_{\lceil p \rceil}(x), \dots, F_n(x))$ такий, що Q — n-однорідний поліном. Нехай $\widetilde{Q}$ — симетрична n-лінійна форма, що породжує n-однорідний поліном Q, тобто $Q(t) = \widetilde{Q}(\underbrace{t, \dots, t}_{n})$. Виведемо формулу, яка відновлює n-лінійну форму $\widetilde{Q}$ за поліномом P.

Для довільного номера k позначимо через $\alpha_{0,k}, \dots, \alpha_{k-1,k}$ комплексні корені k-ого степеня з 1. Тобто $\alpha_{m,k} = e^{2mi\pi/k}$. Наступна лема, мабуть, добре відома.

Лема 2.1. *Для будь-якого натурального n*

$$\sum_{m=0}^{k-1} \alpha_{m,k}^n = \begin{cases} k & \text{якщо } n \equiv 0 \mod k, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Доведення. Оскільки $\alpha_{m,k}^n = \alpha_{m,k}^{n \bmod k}$, то достатньо довести лему для випадку $n < k$. З теореми Вієта випливає, що однорідні симетричні поліноми степеня $0 < n < k$ від коренів многочлена $x^k = 1$ дорівнюють нулю. Зокрема, $\sum_{m=0}^{k-1} \alpha_{m,k}^n = 0$ при $n < k$. □

Лема 2.2. *Для кожного натурального $n \geq \lceil p \rceil$ і скінченного набору векторів $x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n \in \ell_p$ існує елемент $\gamma_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n) \in \ell_p$ такий, що*

$$F_k(\gamma_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)) = F_k(x_k)$$

для довільного $\lceil p \rceil \leq k \leq n$.

Доведення. Позначимо

$$\beta_n(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n) := \mathop{\bullet}_{j=\lceil p\rceil}^{n} \mathop{\bullet}_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_{i,j}}{\sqrt[j]{j}} x_j.$$

Для довільного натурального k позначимо через $J(k)$ множину дільників числа k. Враховуючи лему 2.1 і властивість 3 симетричного зсуву, маємо:

$$F_k(\beta_n(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)) = \sum_{j\in J(k)} \frac{j}{j^{k/j}} F_k(x_j).$$

Зокрема, $F_{\lceil p\rceil}(\beta_n(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)) = F_{\lceil p\rceil}(x_{\lceil p\rceil})$. Припустимо, що для деякого $l < n$ ми знайшли елемент $\beta_n^l(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n) \in \ell_p$ такий, що

$$F_k(\beta_n^l(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)) = F_k(x_k)$$

при $k \le l$, і

$$F_k(\beta_n^l(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)) = \sum_{j\le k} c_j F_k(x_j)$$

при $l < k \le n$, де c_j — деякі константи і $c_k = 1$. Покладемо

$$\beta_n^{l+1}(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n) := \beta_n^l(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)\bullet$$
$$\bullet\Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p\rceil}^{l} \beta_n(\underbrace{0,\ldots,0}_{l},(-1)^{1/l+1}c_i x_i,0,\ldots,0)\Big).$$

Тоді

$$F_k(\beta_n^{l+1}(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)) = F_k(x_k)$$

при $k \le l+1$ і

$$F_k(\beta_n^{l+1}(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)) = \sum_{j\le k} c'_j F_k(x_j)$$

при $l+1 < k \le n$ для деяких констант c'_j і $c'_k = 1$. Залишилось покласти $\gamma_n(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n) = \beta_n^n(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)$, а $\gamma_n(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)$ — шуканий елемент. □

Наслідок 2.1. *Нехай P — симетричний поліном степеня $n \ge p$ на ℓ_p. Тоді*

$$P(\gamma_n(x_{\lceil p\rceil},\ldots,x_n)) = Q(F_{\lceil p\rceil}(x_{\lceil p\rceil}),\ldots,F_n(x_n)).$$

Нехай $e_1,\ldots,e_n$ — стандартний базис в n-вимірному просторі. Перепозначимо його для нашого випадку через $e_{\lceil p\rceil},\ldots,e_n$. Ми можемо записати

$$P(x) = Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x)) = Q\Big(\sum_{k=\lceil p\rceil}^{n} F_k(x)e_k\Big).$$

Теорема 6. *Нехай P — симетричний поліном на ℓ_p такий, що відповідний поліном Q — n-однорідний. Тоді n-лінійна симетрична форма $\widetilde{Q}$ має вигляд:*

$$\widetilde{Q}\Big(\sum_{k=\lceil p\rceil}^{n} F_k(x_{\lceil p\rceil})e_k,\ldots,\sum_{k=\lceil p\rceil}^{n} F_k(x_n)e_k\Big) =$$
$$= \frac{1}{2^n n!}\sum_{\varepsilon_i=\pm1} \varepsilon_{\lceil p\rceil}\ldots\varepsilon_n P\Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p\rceil}^{n} \gamma_n(\varepsilon_i x_i,\ldots,\varepsilon_i x_i)\Big).$$

Доведення. Згідно з наслідком 2.1,

$$P\Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p\rceil}^{n}\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\dots,\varepsilon_i x_i)\Big) =$$

$$Q\Big(F_{\lceil p\rceil}\Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p\rceil}^{n}\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\dots,\varepsilon_i x_i)\Big),\dots,F_n\Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p\rceil}^{n}\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\dots,\varepsilon_i x_i)\Big)\Big) =$$

$$Q\Big(\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}F_{\lceil p\rceil}(\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\dots,\varepsilon_i x_i)),\dots,\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}F_n(\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\dots,\varepsilon_i x_i))\Big) =$$

$$Q\Big(\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}F_{\lceil p\rceil}(\varepsilon_i x_i),\dots,\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}F_n(\varepsilon_i x_i)\Big) =$$

$$Q\Big(\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}\varepsilon_i\Big(F_{\lceil p\rceil}(x_i),\dots,F_n(x_i)\Big)\Big) = Q\Big(\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}\varepsilon_i\Big(\sum_{k=\lceil p\rceil}^{n}F_k(x_i)e_k\Big)\Big).$$

Далі, застосовуємо поляризаційну формулу (5), взявши замість P поліном Q, а замість x_i — вектор $\sum_{k=\lceil p\rceil}^{n}F_k(x_i)e_k$. □

2.3 Диференціювання в алгебрі симетричних поліномів.

Нагадаєм, що лінійний оператор D, визначений на алгебрі, називається диференціюванням, якщо для нього виконується правило Лейбніца, тобто $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ для довільних f і g з даної алгебри.

Нехай $h \in \ell_p$, $m \in \mathbb{N}$, $\lceil p\rceil \le m \le n$ і P — симетричний поліном степеня $n \ge p$ на ℓ_p. Визначимо

$$D_m P(x)[h] := \lim_{\lambda\to 0}\frac{P\Big(x\bullet\Big(\mathop{\bullet}_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big)\Big)-P(x)}{\lambda^m}.$$

Теорема 7. *Оператор $D_mP(x)[h]$ є диференціюванням на алгебрі симетричних поліномів. Якщо $P(x) = Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\dots,F_n(x))$, то*

$$D_m P(x)[h] = \frac{\partial Q}{\partial u_m}\Big(F_{\lceil p\rceil}(x),\dots,F_n(x)\Big)F_m(h), \tag{6}$$

де $\frac{\partial Q}{\partial u_m}$ — диференціювання по u_m полінома $Q(u_{\lceil p\rceil},\dots,u_n)$.

Доведення. Оскільки відображення $P \mapsto Q$ є гомоморфізм алгебри симетричних поліномів, породжених $F_{\lceil p\rceil},\dots,F_n$, в алгебру поліномів від $n-\lceil p\rceil+1$ змінних, і $\frac{\partial Q}{\partial u_m}$ — оператор диференціювання на алгебрі поліномів від $n-\lceil p\rceil+1$ змінних, то достатньо перевірити формулу (6). Використовуючи властивості симетричного зсуву і означення D_m, маємо:

$D_mP(x)[h] =$

$$\lim_{\lambda\to 0}\Big[\frac{Q\Big(F_{\lceil p\rceil}\Big(x\bullet\Big(\mathop{\bullet}_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big)\Big),\dots,F_n\Big(x\bullet\Big(\mathop{\bullet}_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big)\Big)\Big)}{\lambda^m}-$$

$$\left.\frac{Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x))}{\lambda^m}\right] =$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{Q\Big(F_{\lceil p\rceil}(x)+\sum_{k=0}^{m-1}F_{\lceil p\rceil}\Big(\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big),\ldots,F_n(x)+}{}\right.$$

$$\left.\frac{\sum_{k=0}^{m-1}F_n\Big(\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big)\Big)}{\lambda^m} - \frac{Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x))}{\lambda^m}\right] =$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_{m-1}(x),F_m(x)+\mu_m\lambda^m F_m(h),\ldots,F_n(x)+}{}\right.$$

$$\left.\frac{\mu_n\lambda^n m^{\frac{m-n}{m}}F_n(h))}{\lambda^m} - \frac{Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x))}{\lambda^m}\right],$$

де $\mu_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k\equiv 0 \mod m,\\ 0 & \text{в протилежному випадку.}\end{cases}$

Якщо позначити $u_k = F_k(x)$, $a_k = F_k(h)$, $t = \lambda^m$, отримаємо:

$D_mP(x)[h] =$

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{Q(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_{m-1},u_m+\mu_m t a_m, u_{m+1}+\mu_{m+1}t^{r_{m+1}}a_{m+1},\ldots,u_n+}{}\right.$$

$$\left.\frac{\mu_n t^{r_n}a_n)}{t} - \frac{Q(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_n)}{t}\right],$$

де $r_{m+1},\ldots,r_n$ — деякі числа, більші за одиницю. Тому

$D_mP(x)[h] =$

$$\lim_{t\to 0}\frac{Q(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_{m-1},u_m+ta,u_{m+1},\ldots,u_n)}{t} - \frac{Q(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_n)}{t} =$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_m}(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_n)a = \frac{\partial Q}{\partial u_m}\Big(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x)\Big)F_m(h).$$

$\square$

3 Оператори симетризації. Множини максимальних ідеалів

В цьому розділі ми застосуємо деякі властивості симетричних та субсиметричних функцій, а також властивості оператора симетричного зсуву для дослідження спектру алгебри симетричних та субсиметричних цілих функцій обмеженого типу на просторі ℓ_p.

Введемо деякі необхідні нам поняття. Нехай X, Y — банахові алгебри. Відображення $F : X \to Y$ називається *гомоморфізмом* алгебри X в Y, якщо F — мультиплікативний лінійний оператор.

Нехай X — комутативна банахова алгебра. Підмножина $I \subset X$ називається *ідеалом*, якщо I є векторним підпростором X і $xy \in I$ для довільних $x \in X$, $y \in I$. Ідеал $I \neq X$

називається *власним ідеалом*. Власний ідеал, який не міститься в жодному більшому власному ідеалі, називається *максимальним ідеалом*.

Для банахової алгебри X через $M(X)$ будемо позначати множину всіх комплексних гомоморфізмів. Множина $M(X)$ називається *спектром* алгебри X. Комплексні гомоморфізми також називають мультиплікативними лінійними функціоналами або характерами алгебри X.

У випадку, коли X — комутативна банахова алгебра, існує взаємнооднозначна відповідність між множиною комплексних гомоморфізмів і множиною максимальних ідеалів алгебри X.

3.1 Звуження характерів алгебри $H_b(\ell_p)$ на $H_{bs}(\ell_p)$

Як і раніше, через $H_b(\ell_p)$ будемо позначати алгебру всіх цілих функцій обмеженого типу на ℓ_p зі спектром $M_b(\ell_p)$, через $H_{bs}(\ell_p)$ — алгебру всіх симетричних цілих функцій обмеженого типу на ℓ_p зі спектром $M_{bs}(\ell_p)$.

Оскільки $H_{bs}(\ell_p)$ є (замкненим) підпростором в $H_b(\ell_p)$, то звуження φ^s кожного характеру $\varphi \in M_b$ на простір $H_{bs}(\ell_p)$ є елементом множини M_{bs}. При цьому $\varphi^s = \psi^s$ для $\varphi, \psi \in M_b$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(f) = \psi(f)$ для всіх $f \in H_{bs}(\ell_p)$.

Нагадаємо, що у роботі [18] описано множину максимальних ідеалів $M_b(X)$ алгебри $H_b(X)$ для довільного банахового простору X наступним чином:

Теорема 8. *Існує послідовність спряжених банахових просторів $(E_k)_{k=1}^{\infty}$, $E_1 = X''$, і вкладень $\delta^{(k)} : E_k \to M_b(X)$ таких, що кожен характер $\varphi \in M_b(X)$ подається у вигляді*

$$\varphi = \mathop{\ast}_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k),$$

де $u_k \in E_k$.

Простори E_k мають таку властивість, що $\widehat{P}(u_k) := \delta^{(k)}(u_k)(P) = 0$ для всіх однорідних поліномів P, $0 < \deg P < k$, і кожен E_k можна зобразити як замкнений підпростір у другому спряженому до проективного тензорного добутку: $E_k \subset (X \otimes_{s,\pi} \ldots \otimes_{s,\pi} X)''$. Іншими словами, $M_b(X)$ можна подати як простір послідовностей $\{\{u_k\} : u_k \in E_k\}$.

Операція згортки "$\ast$" для елементів з $M_b(X)$ визначена формулою

$$(\varphi \ast \theta)(f) = \varphi(\theta(f(\cdot + x))), \tag{7}$$

де $f \in H_b(X)$.

Оскільки оператор зсуву $T_x : f \mapsto f(\cdot + x)$ не зберігає симетричності функції f, якщо $f \in H_{bs}(\ell_p)$, то формула (7) не є коректною для визначення згортки характерів алгебри симетричних аналітичних функцій $H_{bs}(\ell_p)$. Проте, для довільних $\varphi, \theta \in M_b$, $(\varphi \ast \theta)^s \in M_{bs}$.

Таким чином, якщо $\theta \in M_{bs}$ і існує характер $\varphi \in M_b$ такий, що $\theta = \varphi^s$, то θ можна подати у вигляді

$$\theta = \Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k) \Big)^s \tag{8}$$

для деяких $u_k \in E_k(\ell_p)$. Питання про те, чи кожен характер $\theta \in M_{bs}$ можна зобразити формулою (8), зводиться до питання про те, чи кожен характер $\theta \in M_{bs}$ можна продовжити до деякого характера $\varphi \in M_b$.

Твердження 3.1. *Припустимо, що існує неперервний гомоморфізм $\Phi : H_b(\ell_p) \to H_{bs}(\ell_p)$, який є проектором на $H_{bs}(\ell_p)$, тобто $\Phi(f) = f$ для довільної функції $f \in H_{bs}(\ell_p)$. Тоді кожен характер $\theta \in M_{bs}$ продовжується до деякого характеру $\varphi \in M_b$ за формулою*

$$\varphi(f) = \theta(\Phi(f)),$$

де $f \in H_b(\ell_p)$ і оператор продовження $\theta \mapsto \varphi$ є неперервним відображенням з M_{bs} в M_b.

Доведення. Оскільки θ і Φ — неперервні гомоморфізми, то $\varphi = \theta \circ \Phi$ — неперервний гомоморфізм з $H_b(\ell_p)$ в $\mathbb{C}$, тобто $\varphi \in M_b$.

Нехай θ_α — збіжна до θ_0 напрямленість в M_{bs}, тобто $\theta_\alpha(f) \to \theta_0(f)$ для довільної функції $f \in H_{bs}(\ell_p)$. Якщо $g \in H_b(\ell_p)$, то $\Phi(g) \in H_{bs}(\ell_p)$ і $\varphi_\alpha(g) = \theta_\alpha(\Phi(g)) \to \theta_0(\Phi(g)) = \varphi_0(g)$ для довільної функції $g \in H_b(\ell_p)$. Отже, оператор $\theta \mapsto \varphi = \theta \circ \Phi$ є неперервним відображенням. □

Зауважимо, що замість алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_p у твердженні 3.1 можна розглядати алгебру аналітичних функцій обмеженого типу на довільному банаховому просторі X, які є симетричними відносно дії деякої напівгрупи ізометричних операторів. Зокрема, твердження 3.1 буде правильним для алгебри субсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_p.

Маючи оператор симетричного зсуву $f \mapsto f(\cdot \bullet x)$, $f \in H_{bs}(\ell_p)$, який є гомоморфізмом алгебри $H_{bs}(\ell_p)$ в себе, ми можемо означити *симетричну згортку* елементів з M_{bs} наступним чином:

$$(\varphi \star \theta)(f) = \varphi(\theta(f(\cdot \bullet x))),$$

де $f \in H_{bs}(\ell_p)$, $\varphi, \theta \in M_{bs}$. Зауважимо, що в загальному випадку $\varphi \star \theta \neq \varphi \ast \theta$ на $H_{bs}(\ell_p)$, навіть якщо φ і θ — функціонали значень в точках ℓ_p.

Твердження 3.2. *Операція симетричної згортки є асоціативною, комутативною і*

$$(\varphi \star \psi)(F_k) = \varphi(F_k) + \psi(F_k) \tag{9}$$

для довільних $\varphi, \psi \in M_{bs}$ і $k \geq \lceil p \rceil$.

Доведення. Перевіримо спочатку формулу (9). Маємо, що $(\varphi \star \psi)(F_k) = \varphi(\psi(F_k(y \bullet x))) = \varphi(\psi(F_k(y) + F_k(x))) = \varphi(\psi(F_k) + F_k(x)) = \psi(F_k) + \varphi(F_k)$. Очевидно, що з цієї формули випливає асоціативність і комутативність на F_k, $k \geq \lceil p \rceil$. Оскільки кожен симетричний поліном подається у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів F_k, $k \geq \lceil p \rceil$ і кожна функція з $H_{bs}(\ell_p)$ рівномірно наближається симетричними поліномами, то операція згортки є асоціативною і комутативною. □

Твердження 3.3. *Якщо існує гомоморфізм* Φ *(як у твердженні 3.1), то для довільних характерів* φ *і* $\theta \in M_{bs}(\ell_p)$ *існують характери* ψ *і* $\xi \in M_b(\ell_p)$ *такі, що* $\varphi(f) = \psi(f)$, $\theta(f) = \xi(f)$ *і*

$$(\varphi \star \theta)(f) = (\psi \circledast \xi)(f)$$

для всіх функцій $f \in H_{bs}(\ell_p)$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли φ і θ — функціонали значення в точках простору ℓ_p, тобто $\varphi(f) = f(x)$ і $\theta(f) = f(y)$ для деяких $x, y \in \ell_p$. Покладемо $x' = x \bullet 0 = (x_1, 0, x_2, 0, \dots)$ і $y' = 0 \bullet y = (0, y_1, 0, y_2, \dots)$. Очевидно, що $f(x) = f(x')$, $f(y) = f(y')$ для всіх $f \in H_{bs}(\ell_p)$ і $x' + y' = x' \bullet y'$. Отже, $\delta^{(x')} \circledast \delta^{(y')} = \delta^{(x')} \star \delta^{(y')}$. Покладемо $\psi = \delta^{(x')}$ і $\xi = \delta^{(y')}$. Зауважимо, що в цьому випадку твердження леми виконується без припущення про існування гомоморфізма Φ.

Розглянемо загальний випадок. Нехай φ, θ — довільні елементи з M_{bs}. В умовах леми існують продовження φ^0 і $\theta^0 \in M_b$. Згідно з [3], існують напрямленості (x_α) і (y_β) в ℓ_p такі, що $\varphi^0(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha)$ і $\theta^0(P) = \lim_\beta P(x_\beta)$ для довільного полінома $P \in \mathcal{P}(\ell_p)$. Покладемо $x'_\alpha = x_\alpha \bullet 0$ і $y'_\beta = 0 \bullet y_\beta$. Тоді $\psi(P) = \lim_\alpha P(x'_\alpha)$ і $\xi(P) = \lim_\beta P(x'_\beta)$.

Зауважимо, шо границі існують для всіх поліномів $P \in \mathcal{P}(\ell_p)$. Справді, нехай $T_+(x) := x \bullet 0$. Легко бачити, що T_+ — лінійний неперервний оператор на ℓ_p. Тому, для кожного полінома $P \in \mathcal{P}(\ell_p)$ відображення $Q = P \circ T_+$ також є поліномом з $\mathcal{P}(\ell_p)$. Оскільки φ визначено для всіх поліномів, то $\psi(P) = \varphi(Q)$. Очевидно, що якщо P — симетричний, то $\psi(P) = \varphi(P)$, аналогічно $\xi(P) = \theta(P)$ і $(\varphi \star \theta)(P) = (\psi \circledast \xi)(P)$. Оскільки це вірно для всіх симетричних поліномів, то ця рівність виконується для довільної функції $f \in H_{bs}(\ell_p)$. □

Існування гомоморфізму-проектора з $H_b(\ell_p)$ на $H_{bs}(\ell_p)$ та умови його неперервності досліджуються у наступних підрозділах.

3.2 Усереднююча симетризація

Для даної топологічної напівгрупи G позначимо через $\mathcal{B}(G)$ банахову алгебру всіх обмежених комплексних функцій на G і через $\mathcal{C}(G)$ підалгебру всіх неперервних функцій.

Через U позначимо C^*-підалгебру алгебри $\mathcal{B}(G)$. *Середнім значенням* U називається комплекснозначний лінійний функціонал φ на U, який є позитивним (тобто $\varphi(f) \geq 0$, коли $f \geq 0$ для $f \in \mathcal{B}(G)$) і $\varphi(1) = 1$. Середнє значення φ називається *інваріантним* (або *бі-інваріантним*), якщо воно є інваріантним відносно лівого і правого зсуву довільного елемента $g \in G$.

Топологічна напівгрупа G називається *аменабельною*, якщо існує інваріантне середнє $\mathcal{B}(G)$. Позначимо $\mathcal{G}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$, де $\mathcal{G}_n$ — група підстановок на множині $\{1, \dots, n\}$. Добре відомо (див. [4, ст. 89]), що $\mathcal{G}_0$ є аменабельною групою. Нехай λ — дискретна міра Хаара на $\mathcal{G}_0$, $\lambda(\sigma) = 1$ для довільного $\sigma \in \mathcal{G}_0$. Легко бачити, що для кожного $\sigma \in \mathcal{G}_0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(\sigma \mathcal{G}_n \triangle \mathcal{G}_n)}{\lambda \mathcal{G}_n} = 0,$$

де символ $\triangle$ позначає симетричну різницю множин. Тоді, згідно з [4, ст. 80, ст. 147], існує інваріантне середнє на $\mathcal{C}(\mathcal{G}_0)$, яке визначається наступним чином:

$$\varphi(g) = \lim_{\mathcal{U}} \lambda(\mathcal{G}_n)^{-1} \int_{\mathcal{G}_n} g(\sigma) d\lambda_\sigma = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} g(\sigma), \tag{10}$$

де $\mathcal{U}$ — деякий вільний ультрафільтр на множині натуральних чисел.

Нехай тепер G — підгрупа ізометричних операторів на банаховому просторі X і V — G-симетрична підмножина X (нагадаємо, що підмножина $V \subset X$ називається *G-симетричною*, якщо вона є інваріантною відносно дії групи G на X). Припускаємо, що G наділена топологією поточкової збіжності на X. Для даної підалгебри A обмежених функцій на V, $f \in A$ і $x \in V$ визначаємо функцію на G, $(f, x) \in \mathcal{B}(G)$ наступним чином: $(f, x)(\sigma) = f(\sigma(x))$. Якщо f є неперервною, то (f, x) — неперервна також.

Твердження 3.4. *Нехай φ — неперервне інваріантне середнє $U \subset \mathcal{B}(G)$ і A — рівномірна алгебра неперервних функцій на V, таких що $(f, x) \in U$ для кожного $f \in A$ і $x \in V$. Тоді існує неперервний оператор симетризації $\mathcal{S}_\varphi$, який відображає A в рівномірну алгебру обмежених G-симетричних функцій на X.*

Доведення. Покладемо

$$\mathcal{S}_\varphi(f) = \varphi(f, x).$$

Оскільки φ є інваріантним середнім U і $(f, x) \in U$, то

$$\mathcal{S}_\varphi(f)(\sigma x) = \varphi(f, \sigma(x)) = \varphi(f, \sigma_0(x)) = \mathcal{S}_\varphi(f)(x),$$

де σ_0 є тотожнім на G. Таким чином, $\mathcal{S}_\varphi(f)$ є симетричним. Очевидно, що якщо $\|x\| \le 1$, тоді $\|(f, x)\| \le \|f\|$ і множина $\{(f, x)\colon \|f\| \le 1 \text{ і } \|x\| \le 1\}$ є підмножиною $\{(f, x)\colon \|(f, x)\| \le 1\}$. Звідси

$$\|\mathcal{S}_\varphi\| = \sup_{\|f\|\le 1} \|\varphi(f, \cdot)\| = \sup_{\|x\|\le 1,\, \|f\|\le 1} |\varphi(f, x)| \le \sup_{\|(f,x)\|\le 1} |\varphi(f, x)| = \|\varphi\|.$$

$\square$

Наслідок 3.1. *Нехай V — $\mathcal{G}_0$-симетрична підмножина ℓ_p, $1 \le p < \infty$. Тоді існує неперервний лінійний оператор проекції $\mathcal{S}$ з алгебри $C_b(V)$ неперервних, обмежених на обмежених підмножинах функцій на V, в алгебру $\mathcal{B}_s(V)$ $\mathcal{G}_0$-симетричних обмежених функцій на V, такий що*

$$\mathcal{S}(f)(x) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} f(\sigma(x)) \tag{11}$$

і

$$\|\mathcal{S}(f)\|_V := \sup_{x\in V} |\mathcal{S}(f)(x)| \le \|f\|_V.$$

Доведення. Нехай φ — інваріантне середнє на $\mathcal{G}_0$, що визначається формулою (10). Покладемо $\mathcal{S} := \mathcal{S}_\varphi(f)$. За твердженням 3.4, $\mathcal{S}$ є неперервним лінійним відображенням з $C_b(V)$ в $\mathcal{B}_s(V)$. Оскільки $\mathcal{S}(f) = f$ для довільного $f \in \mathcal{B}_s(V)$, то $\mathcal{S}$ є проектором. Формула (11) безпосередньо випливає з (10).

Оскільки множина V є симетричною, то $\|f(\sigma(\cdot))\|_V = \|f\|_V$ для кожного $\sigma \in \mathcal{G}_0$. Тому для кожного n

$$\left\| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} f(\sigma(\cdot)) \right\|_V \leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \|f(\sigma(\cdot))\|_V = \|f\|_V.$$

$\square$

Твердження 3.5. *Нехай V є $\mathcal{G}_0$-симетричною множиною на просторі ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Якщо функція f — рівномірно неперервна на V, тоді $\mathcal{S}(f)$ є рівномірно неперервною на V. Якщо множина V є відкритою і f — аналітична на V, тоді $\mathcal{S}(f)$ — аналітична на V.*

Доведення. Нехай дано $\varepsilon > 0$ і нехай $\delta > 0$ є таким, що якщо $\|x - y\| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Оскільки з того, що $\|x - y\| < \delta$ випливає, що $\|\sigma(x) - \sigma(y)\| < \delta$, то звідси маємо:

$$\left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} f(\sigma(x)) - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} f(\sigma(y)) \right| < \varepsilon.$$

Відповідно, $|\mathcal{S}(f)(x) - \mathcal{S}(f)(y)| \leq \varepsilon$.

Для доведення останнього твердження достатньо показати, що якщо P є n-однорідним поліномом, то і $\mathcal{S}(P)$ є n-однорідним поліномом. А це, в свою чергу, випливає з лінійності відображення $\sigma\colon x \mapsto \sigma(x)$ для довільного $\sigma \in \mathcal{G}_0$. $\square$

Наслідок 3.2. *Простір $H_{bs}(\ell_p)$ є доповнювальним замкненим підпростором в $H_b(\ell_p)$.*

Наступний приклад показує, що $\mathcal{S}$ не є гомоморфізмом.

Приклад 3.1. Нехай P і Q — два функціонали на ℓ_1, задані наступним чином:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i-1} \quad \text{і} \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i}.$$

Зауважимо, що

$$\mathcal{S}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\Big) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)} \Big) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)} \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Оскільки $(P + Q)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ і Q є композицією P та оператора зсуву, то ми отримуємо:

$$\mathcal{S}(P)(x) = \mathcal{S}(Q)(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Але

$$\mathcal{S}(P)\mathcal{S}(Q)(x) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i x_j \neq \mathcal{S}\Big(\sum_{i,j=1}^{\infty} x_{2i-1} x_{2j} \Big) = \mathcal{S}(PQ)(x),$$

оскільки $\mathcal{S}(P)\mathcal{S}(Q)(x)$ містить доданки $\frac{1}{4} x_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$, а $\mathcal{S}(PQ)(x)$ не містить їх.

3.3 Симетризуючий гомоморфізм для субсиметричних поліномів

В [10] Р. Гонзало, використовуючи техніку розсіюючої моделі (spriding model), побудувала гомоморфізм з простору всіх неперервних поліномів $\mathcal{P}(X)$ на довільному банаховому просторі X з субсиметричним базисом на простір неперервних субсиметричних поліномів $\mathcal{P}_{s_{b_s}}(X)$, який ми позначимо $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$.

Зокрема, нею доведено, що для заданого полінома P на ℓ_p існують нескінченна множина цілих індексів H і поліном P^* на ℓ_p, такі що:

$$P^*\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i e_i\Big) = \lim_{\substack{n_1 < \cdots < n_k \\ n_j \in H}} P\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i e_{n_i}\Big).$$

Зауважимо, що $\deg P^* \leq \deg P$.

Згідно з [8, ст. 122, 123], P^* можна описати наступним чином. Нехай $\mathcal{U}$ — вільний ультрафільтр на $\mathbb{N}$. Тоді

$$P^*\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i e_i\Big) = \lim_{\mathcal{U},1} \ldots \lim_{\mathcal{U},k} P\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i e_{n_i}\Big). \tag{12}$$

Формула (12) означає, що спочатку ми беремо границю по ультрафільтру $\mathcal{U}$ для індексу $k \rightsquigarrow n_k$ при базисному елементі e_k з координатою x_k. Цю границю позначаємо

$$\lim_{\mathcal{U},k} P(x_1 e_1 + \ldots + x_{k-1} e_{k-1} + x_n e_{n_k}).$$

Дана границя існує (оскільки P — обмежений). Далі ми беремо границю для індексу $k-1 \rightsquigarrow n_{k-1}$ при e_{k-1} і т. д.

Таким чином, P^* залежить тільки від P і ультрафільтра $\mathcal{U}$. Позначимо через $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ відображення $P \mapsto P^*$ для фіксованого вільного ультрафільтра $\mathcal{U}$. Легко бачити, що P^* є субсиметричним на ℓ_p. З (12) випливає, що $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ є гомоморфізм і що $\|P^*\| \leq \|P\|$.

Відзначимо, що в доведенні теореми 3.1 в [10] суттєвим є те, що відображення, яке поліному P ставить у відповідність поліном P^*, є гомоморфізмом.

Позначимо через $\mathfrak{G}$ напівгрупу, породжену ізометричними операторами β_i,

$$\beta_i \colon (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots).$$

Зауважимо, що функція — субсиметрична тоді і тільки тоді, коли вона є інваріантною відносно дії операторів β_i.

Наслідок 3.3. *Нехай V є $\mathfrak{G}$-симетричною областю ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Тоді гомоморфізм $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ може бути продовжений до неперевного гомоморфізму на довільній алгебрі $\mathcal{A}$ аналітичних функцій на V, де поліноми є щільними в її підалгебрі $\mathcal{A}_{s_{b_s}}$ субсиметричних функцій на V. Більше того, якщо функція f — неперервна на замиканні $\overline{V}$, то $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}(f)$ — неперервна на $\overline{V}$, і якщо функція f обмежена на деякій субсиметричній підмножині $V_0 \subset V$, то це ж справедливе для $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}(f)$.*

Будемо позначати це продовження тим самим символом $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$.

Наслідок 3.4. *Кожен характер* $\varphi \in M_{bs_{b_s}}(\ell_p)$ *продовжується до деякого характеру* $\psi \in M_b(\ell_p)$ *за формулою:*

$$\psi(f) = \varphi(\mathfrak{S}_{s_{b_s}}(f)),$$

де $f \in H_b(\ell_p)$.

3.4 Симетризуючий гомоморфізм для симетричних поліномів

Позначимо через $\mathcal{P}_n(\ell_1)$ ($\mathcal{P}_{s,n}(\ell_1)$, $\mathcal{P}_{s_{b_s},n}(\ell_1)$) алгебру (симетричних, субсиметричних) поліномів на ℓ_1, породжену всіма (симетричними, субсиметричними) поліномами степеня $\leq n$. Також позначення $H_{b,n}(\ell_1)$, $H_{bs,n}(\ell_1)$, $H_{s_{b_s},n}(\ell_1)$, $M_{b,n}(\ell_1)$ $M_{bs,n}(\ell_1)$ і $M_{s_{b_s},n}(\ell_1)$ мають відповідний сенс.

Приклад 3.2. Розглянемо випадок $n = 2$. Оскільки $H_{bs,2}(\ell_1) = H_{s_{b_s},2}(\ell_1)$, то звуження $\mathfrak{S}_{s_{b_s},2}$ простору $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ на простір $H_{b,2}(\ell_1)$ є проективним гомоморфізмом з $H_{b,2}(\ell_1)$ на $H_{bs,2}(\ell_1)$. Нехай $\Theta\colon H_{bs,2}(\ell_1) \to H_{bs,2}(\ell_1)$ — гомоморфізм, визначений на базисних функціях F_1, F_2 наступним чином: $\Theta(F_1) = F_2, \Theta(F_2) = F_1$. Згідно з [2], існує топологічний ізоморфізм між алгеброю $H_{bs,2}(\ell_1)$ і алгеброю цілих функцій двох змінних $H(\mathbb{C}^2)$, заданий так, що

$$H_{bs,2}(\ell_1) \ni u(F_1(x), F_2(x)) \leftrightarrow u(t_1, t_2) \in H(\mathbb{C}^2).$$

Очевидно, що Θ є неперервним. Тому $\Theta \circ \mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ — неперервний гомоморфізм з $H_{s,2}(\ell_1)$ в себе з наступною "патологічною" властивістю: $\Theta \circ \mathfrak{S}_{s_{b_s}}(F_1) = F_2$ і $\Theta \circ \mathfrak{S}_{s_{b_s}}(F_2) = F_1$.

Нагадаємо, що в роботі [5] виписано у явному вигляді алгебраїчний базис для простору субсиметричних поліномів на просторі ℓ_1 для випадку $n = 3$. Зауважимо, що в загальному випадку для довільного n в [11] доведено існування алгебраїчного базису у просторі субсиметричних поліномів на просторі ℓ_p, який містить алгебраїчний базис симетричних поліномів.

Таким чином, використовуючи результати, одержані в [11], та продовжуючи ідею з [5], отримуємо наступне твердження.

Твердження 3.6. *Існує неперервний гомоморфізм* $\mathfrak{S}_{s,n}$ *з* $\mathcal{P}_n(\ell_1)$ *на* $\mathcal{P}_{s,n}(\ell_1)$, *такий що* $\mathfrak{S}_{s,n}(P) = P$, *якщо* P *є симетричним.*

Наслідок 3.5. *Існує неперервне вкладення множини* $M_{bs,n}(\ell_1)$ *в* $M_{b,n}(\ell_1)$, *яке задається формулою:*

$$M_{bs,n}(\ell_1) \ni \varphi \mapsto \varphi \circ \mathfrak{S}_{s,n} \in M_{b,n}(\ell_1).$$

Література

1. Чернега І.В. *Оператор зсуву у просторі симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Мат. методи і фіз. мех. поля – 2006. – Т.49 №2. – С.52-57.

2. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Algebra of symmetric holomorphic functions on* ℓ_p, Bull. Lond. Math. Soc., **35** (2003), 55-64.

3. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math., **415** (1991), 51-93.

4. Berglund J.F, Junghenn H.D, Milnes P. Analysis on Semigroups, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, New York, Toronto, 1989.

5. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra*, Preprint.

6. Chernega I.V., Zagorodnyuk A.V. *Application of generalized Rademacher functions to investigation of algebras of symmetric analytic functions on* $L_p[0,1]$, Matematychni Studii, **21,** 1 (2004), 64-71.

7. Dineen S. *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, Mathematics Studies, vol. 57, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1981.

8. Dineen S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.

9. Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J. *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces*, Jour. London Math. Soc., **59** (1999), 681-697.

10. Gonzalo R., *Multilinear forms, subsymmetric polynomials, and spreading models on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 379-397.

11. Hájek P., *Polynomial algebras on classical Banach spaces*, Israel J. Math., **106** (1998), 209-220.

12. Kurosch A.G. Curso de Algebra Superior, Mir, Moscow, 1977.

13. Lindestrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I. Sequence Spaces, Springer-Verlag, New York, 1977.

14. Martin R.S., *Contributions to the theory of functionals*, Ph.D. thesis, University of California, 1932.

15. Mazur S., Orlicz W. *Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen I, II*, Studia Math., **5** (1935), 50-68, 179-189.

16. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.

17. Nemirovskii A.S., Semenov S.M. *On polynomial approximation of functions on Hilbert space*, Mat. USSR Sbornik, **21** (1973), 255-277.

18. Zagorodnyuk A. *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2559-2569.

Інститут прикладних проблем механіки та математики,
Львів, Україна.

Надійшло 25.11.2009

Chernega I.V. *Symmetric polynomials on Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 214–233.

A survey of general results about symmetric polynomials on Banach spaces and rearrangement-invariant function spaces and some new results in this area are given. Some applications to Banach algebras are represented.

Чернега И.В. *Симметрические полиномы на банаховых пространствах // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 214–233.

В работе сделан обзор основных результатов о симметрических полиномах на банаховых пространствах и перестановочно-инвариантных пространствах функций. Получены применения к банаховым алгебрам, а также доказаны некоторые новые результаты в этой области.