УДК 004.4 **DOI: 10.15330/itee.2026.4.05**

Я.В. Чумаченко, канд. техн. наук, М.М. Паславський, канд. техн. наук

РОЗРОБКА ПРОЄКТУ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗУ ФОРМ КОЛИВАНЬ ДИСКІВ ГІДРОТУРБІН

Вступ

В наш час гідроенергетика займає важливу роль у формуванні енергетичного запасу України. Однією з проблем, що викликають деформацію в конструкціях гідротурбін є вібрації. В Україні були розроблені технології для контролю компонентів напруго-деформаційного стану конструкцій. Найбільш поширеними методами дослідження математичних моделей гідротурбіни є метод скінченних елементів, питанням застосування якого присвячено багато робіт. В таких дослідженнях основною є проблема дискретизації безперервних моделей. Зауважимо, що в даній роботі принциповим є використання симетрії як прийому, який приводить до спрощення системи. Іншими методами, що використовуються при дослідженні складних механічних систем, є, наприклад, методи усереднення, прискореної збіжності та асимптотичних розвинень, принцип додатковості [1].

Ефективність теоретичних досліджень значною мірою визначається математичною моделлю, що застосовується. Модель повинна не тільки відповідати об'єктові, що досліджується, але й забезпечувати можливість аналізу вихідної інформації доступними сучасними засобами. Задача пристосування моделей і методів до обробки на ЕОМ є нетривіальною. З одного боку, є актуальним питання про дискретизацію неперервних моделей, яка потребує удосконалення старих і створення нових чисельних методів. З іншого боку, важливим є розвиток методів роботи з моделями систем, яким властива велика кількість ступенів вільності із подальшою адаптацією таких методів до автоматичних засобів аналізу [2].

Математичні засоби дослідження неперервних моделей добре розвинуті, але аналіз поведінки таких моделей часто складний як математично, так і технічно. Найбільш розповсюджена складність математичного характеру — проблема переходу від „теоретичної" до „практичної" збіжності рядів, розв'язок задачі утримання саме тих членів ряду, які несуть вагому інформацію про розв'язок [3].

Створення програми (або комплексу математичних моделей і алгоритмів) для моделювання роботи гідротурбіни має велике значення й актуальність, тому що з її розробкою з'являються наступні можливості:

– розробка програмних комплексів для моделювання навантаження гідротурбіни, які дозволяють виявити дефекти конструкції шляхом знаходження власних коливань та власних форм коливань;

– перевірка нових моделей і наукових гіпотез, що використовують як основу базовий алгоритм;

– систематизація існуючих наукових знань і визначення напрямку подальших досліджень.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Проблема комп'ютерного моделювання та чисельного аналізу коливань дискових елементів із лопатками є критично важливою для забезпечення надійності гідротурбомашин. У сучасних наукових дослідженнях значна увага приділяється методам ідентифікації розладу параметрів та коливань дисків, а також моделюванню нелінійної динаміки з урахуванням конструкційного тертя. Велика частина фундаментальних праць спирається на врахування невизначеностей у коливаннях за допомогою методів зниженого порядку [4], що дозволяє ефективно досліджувати пасивне гасіння вібрацій за допомогою партикулярних демпферів [5].

Дослідження аеродинамічного демпфування та його впливу на резонансний відгук розладнаних циклічних систем показало необхідність залучення нових аналітичних методів [6]. Зокрема, використання апарату теорії груп для аналізу циклічно симетричних гідротурбінних конструкцій дозволяє кардинально спростити просторові рівняння руху [7]. Сучасні підходи до розширеного математичного моделювання та аналізу просторових мод коливань [8,9] спрямовані на вирішення чисельних проблем під час перехідних резонансних режимів, що виникають при пуску та зупинці гідротурбін [10].

Останні дослідження включають застосування глибокого навчання для моніторингу систем в умовах обертання та інтеграцію теорії представлення груп у класичний скінченно-елементний аналіз. Ключовою складовою сучасного інженерного програмного забезпечення стає швидкісна динамічна тривимірна візуалізація та анімація складних форм коливань роторів. В першу чергу, побудова саме дискретних моделей дозволяє уникнути обчислювальних труднощів неперервних середовищ та підвищити точність оцінки резонансної безпеки робочих коліс гідротурбін [11].

Попри значні досягнення, поза увагою дослідників часто залишалися такі аспекти як комплексна інтеграція складних групових алгоритмів у спеціалізовані пакети прикладних програм для наскрізного інженерного аналізу періодичних структур [12], оптимізація просторової геометрії вінця лопаток для зменшення чутливості до випадкового технологічного розладу частот [13]. Використання дискретних моделей замість континуальних [14] у поєднанні з груповим аналізом просторової симетрії [15] дозволяє автору розробити ефективний програмний комплекс, що вирішує зазначені проблеми відповідно до сучасного напряму

Основні задачі дослідження

Узагальнення й систематизація існуючої інформації про методи розрахунку форм коливань і наукових досліджень, присвячених моделюванню руху гідротурбіни. Розробка математичної моделі, що описує параметри вібрацій при навантаженні на гідротурбіну.

Створення програмного комплексу, що дозволяє проводити розрахунки по пропонованих моделях і алгоритмах. Аналіз впливу резонансних коливань на гідротурбіну за допомогою розробленого програмного пакету, розробка варіантів застосування програми для прогнозу поводження гідротурбіни при впливі на неї резонансних коливань.

Методологія та основний матеріал досліджень

Розглянемо задачу побудови моделі вузла гідротурбіни (диска з лопатками), що дозволяє аналізувати резонансні коливання такого вузла, допускає подальше ускладнення і дослідження з метою побудови вібраційного діагностичного критерію наявності пошкоджень.

Обґрунтовано застосування ідеї дискретного моделювання із залученням апарату теорії зображень груп як такого, який забезпечує простоту розв'язання задачі за допомогою сучасних обчислювальних засобів [15]. Досліджені форми коливань системи, які моделюють віяльні форми коливань диска, при котрих лопатки коливаються за першою згинальною формою. Проаналізовано точність моделі і встановлено, що для моделювання поведінки диска на різних частотах необхідна корекція параметрів моделі.

Дослідимо область, що представляє собою дискретну модель, представлену на Рис.1. В роботі розглядається абсолютно жорсткий диск радіуса R, на якому з кроком $2\pi/n$ насаджені

n абсолютно жорстких лопаток, з'єднаних пружно з диском. Нехай тепер осі, навколо яких повертаються лопатки щодо диска, утворять з віссю диска деякий кут α. Пов'яжемо з кожною лопаткою декартову систему координат $C_k X_k Y_k Z_k$ з початком у центрі мас C_kлопатки. Вісь $C_k Y_k$ цієї системи проходить при рівноважному положенні лопатки паралельно площині диска, вісь $C_k Z_k$ рівнобіжна осі обертання лопатки, уздовж якої проведена допоміжна вісь $A_k Z_k$. Усі лопатки однакові, мають маси m і компоненти тензора інерції щодо зазначеної системи координат $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$.

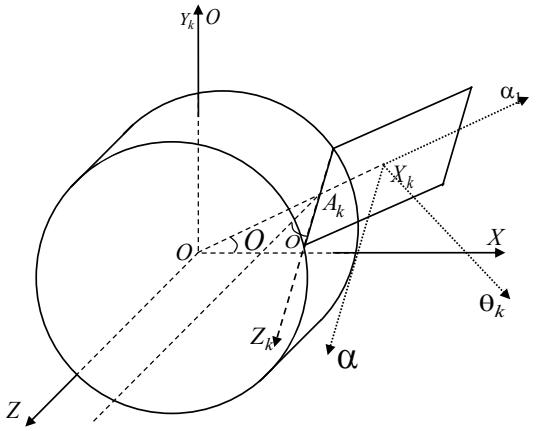


Рис. 1 Кріплення лопатки до диска в просторовому випадку.

Відстані від центрів ваги лопаток до осей обертання рівні a. Крутильні жорсткості пружин, що з'єднують лопатки з диском, дорівнюють c_i. Лопатки з'єднуються між собою лінійними пружинами жорсткістю c_0, причому відстань між точкою кріплення пружини до лопатки і диском дорівнює h.

Рух диска розглядається відносно нерухомої декартової системи координат $OXYZ$. Площина XOY цієї системи збігається з площиною диска в його положенні рівноваги, а початок O — з центром диска в цьому положенні. Маса диска дорівнює M, момент інерції щодо осі OZ – J, моменти інерції щодо осей OX і OY – j. Відцентрові моменти інерції диска щодо обраної системи координат дорівнюють нулю. Диск має пружні зовнішні зв'язки з жорсткостями при переміщеннях уздовж осей OX і OY, рівними z; уздовж осі OZ – c_z; при повороті навколо осей OX і OY – c_{xy} і навколо осі OZ – c_φ.

У якості узагальнених координат, що задають положення системи в просторі, візьмемо координати x, y, z центра диска, кути повороту диска φ_x, φ_y, φ_z відносно нерухомих координатних осей і кути φ_k ($k = \overline{1,n}$) поворотів лопаток відносно диска, усього n+6 координат. Система рівнянь, що описує рух цієї моделі, має вигляд:

$$(M+mn)\ddot{x} + ma\cos\alpha \sum_{k=1}^{n} \sin\theta_k \ddot{\varphi}_k + cx = 0$$

$$(M+mn)\ddot{y} + ma\cos\alpha \sum_{k=1}^{n} \cos\theta_k \ddot{\varphi}_k + cy = 0$$

$$(M+mn)\ddot{z} + ma\sin\alpha \sum_{k=1}^{n} \ddot{\varphi}_k + c_z z = 0$$

$$\left\{j + \frac{n}{2}\left[m(R+a)^2 + J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy} + J_{zz}\sin^2\alpha - J_{xz}\sin 2\alpha\right]\right\}\ddot{\varphi}_x + \tag{1}$$

$$+[ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha]\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\ddot{\varphi}_k - J_{yz}\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k\ddot{\varphi}_k + c_{xy}\varphi_x = 0$$

$$\left\{J + \frac{n}{2}\left[m(R+a)^2 + J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\sin^2\alpha - J_{zz}\sin 2\alpha\right]\right\}\ddot{\varphi}_x -$$

$$-[ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha]\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k\ddot{\varphi}_k - J_{yz}\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\ddot{\varphi}_k + c_{xy}\varphi_y = 0$$

$$\{J + n[m(R+a)^2 + J_{xx}\sin^2\alpha + J_{zz}\cos^2\alpha + J_{xz}\sin 2\alpha]\}\ddot{\varphi}_z +$$

$$+[ma(R+a)\cos\alpha + J_{zz}\cos\alpha - J_{xz}\sin\alpha]\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k + c_{\varphi}\varphi_z = 0$$

На рисунку 2 показана архітектура системи і основні пункти роботи програми



Рис.2 Схема роботи програми

Програма має інтерфейс, який надає зручну можливість роботи із графічними даними, групує функції в меню, може змінювати параметри роботи системи. Згідно з вимогами, інтерфейс програми містить інструменти для зміни графічного представлення диску з лопатками. Можливе представлення в вигляді сіткової (рис. 3) та суцільної моделі (рис. 4).

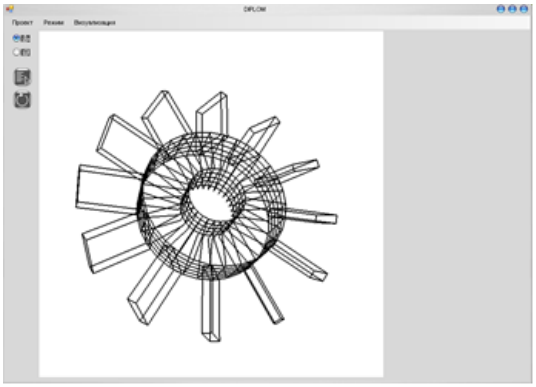


Рис.3 Сіткова модель

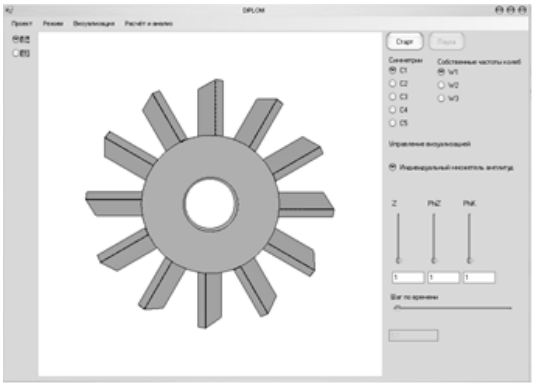


Рис. 4 Суцільна модель

Мінімальні вимоги до апаратного оточення і програмного забезпечення –процесор на базі Intel Pentium з мінімальною тактовою частотою не нижче 800 MHz та вище (або еквівалентний), вільною оперативною пам'яттю 512Mb, операційна система родини Windows NT, встановлена Microsoft.Net Framework 2.0, Tao Framework.

Проєкт реалізований в середовищі Microsoft Visual Studio на мові програмування C#. Для реалізації 3D графіки була використана бібліотека OpenGL — (англ. Open Graphics Library — відкрита графічна бібліотека). Це специфікація, що визначає незалежний від мови програмування програмний інтерфейс для написання продуктів, які використовують 2D та 3D комп'ютерну графіку. Даний інтерфейс містить понад 250 функцій, що можуть використовуватися для малювання складних тривимірних сцен з простих примітивів.

На базовому рівні, OpenGL — це всього лише специфікація, тобто документ, який описує набір функцій і їх точну поведінку. На основі цих специфікацій виробники апаратного забезпечення створюють реалізації — бібліотеки функцій, які відповідають заявленій в OpenGL специфікації. Ці реалізації проектуються для того, щоб при нагоді використовувати можливості апаратного забезпечення. Коли апаратне прискорення не допускається, виконання функцій здійснюється за допомогою програмного забезпечення. Виробники повинні пройти спеціальні тести на відповідність, перш, ніж їхню реалізацію класифікуватимуть, як реалізацію OpenGL. Таким чином, розробникам програмного забезпечення необхідно всього лише навчитися використовувати описані у специфікації функції, і лишити їх реалізацію за розробниками апаратного забезпечення.

Основним принципом роботи OpenGL, є отримання наборів векторних графічних примітивів у вигляді точок, ліній та багатокутників з подальшою математичною обробкою отриманих даних і побудовою растрової картинки на екрані і / або в пам'яті. Векторні трансформації та растеризації виконуються графічним конвеєром (graphics pipeline), який по суті являє собою дискретний автомат. Абсолютна більшість команд OpenGL потрапляють в одну з двох груп: або вони додають графічні примітиви на вхід в конвеєр, або конфігурують конвеєр на різне виконання трансформацій.

Провівши обчислення для спрощення рівняння руху і застосувавши певні варіанти симетрії, ми отримали п’ять наступних випадків:

1. Осьова симетрія.

Рівняння руху (1) після спрощення за рахунок умов $\varphi_k = \Phi$, x=0, y=0, $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = 0$ приймуть вигляд:

$$\begin{gathered}(M+mn)\ddot{z} + mna\sin\alpha\,\ddot{\Phi} + c_z z = 0\\ \{J + n[m(R+a)^2 + J_{xx}\sin^2\alpha + J_{zz}\cos^2\alpha + J_{xz}\sin 2\alpha]\}\ddot{\varphi}_z + \\ +[ma(R+a)\cos\alpha + J_{zz}\cos\alpha + J_{xz}\sin\alpha]\ddot{\Phi} + c_\varphi\varphi_z = 0\\ \sin\alpha\ddot{z} + [ma(R+a)\cos\alpha + J_{zz}\cos\alpha + J_{xz}\sin\alpha]\ddot{\varphi}_z + (ma^2 + J_{zz})\ddot{\Phi} + c_1\Phi = 0\end{gathered} \tag{2}$$

Знаходячи розв’язок отриманої системи у вигляді $z = b_1\sin(\omega t + a)$, $\varphi_z = b_2\sin(\omega t + a)$, $\Phi = b_3\sin(\omega t + a)$ ми отримуємо задачу про власні числа та вектори квадратної матриці третього порядку, результатом розв’язання якої виступають квадрати власних частот ω^2 та власні форми коливань.

Аналіз отриманих форм коливань показує, що в цьому випадку вісесиметричні коливання вінця лопаток супроводжуються крутильними коливаннями диска і поступальним рухом диска уздовж осі OZ (рис. 5). Різні сполучення зазначених рухів дають три власні форми і три власні частоти коливань системи, що відповідають випадку осьової симетрії

2. Симетрія з одним вузловим діаметром вздовж осі y.

Спрощення рівняння руху (1) відбувається за рахунок умов: $\varphi_k = \Phi cos\theta$, x=0, z=0, $\varphi_z = 0$ і система набуває вигляду:

$$\begin{gathered}(M+mn)\ddot{y} + \frac{mn}{2}a\cos\alpha\ddot{\Phi} + cy = 0\\ \left\{j + \frac{n}{2}\left[m(R+a)^2 + J_{xx}\,cos^2\alpha + J_{yy} + J_{zz}sin^2\alpha - J_{xz}\sin 2\alpha\right]\right\}\ddot{\varphi}_y - \\ -[ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha]\frac{n}{2}\ddot{\Phi} + c_{xy}\varphi_y = 0\end{gathered} \tag{3}$$

$$ma\cos\alpha\ddot{y} - \frac{J_{yz}^2 + [ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha]^2}{ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha}\ddot{\varphi_y} + (ma^2 + J_{zz})\ddot{\Phi} + c_1\Phi = 0$$

$$\varphi_x = \frac{J_{yz}}{ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha}\varphi_y$$

В даному випадку коливання лопаток супроводжуються поступальним переміщенням диску вздовж вузлового діаметра — осі OY. Крім цього, відбувається обертання диска щодо осі, що лежить у площині диска. При $J_{yz} = 0$ ця вісь збігається з вузловим діаметром. Зазначені рухи лопаток і диска комбінуються по трьох власних формах коливань, узагальнені зображення яких представлено на рисунку 6. Цим трьом формам відповідають три власні частоти коливань.

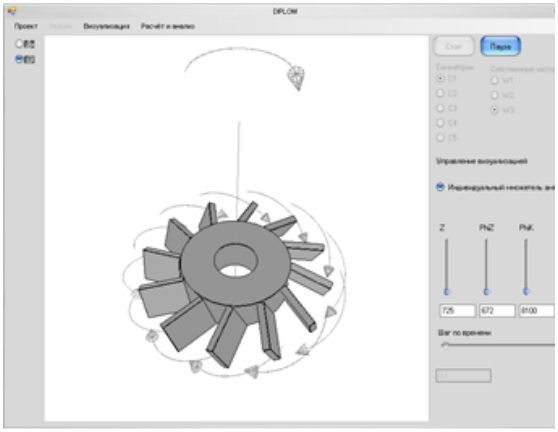


Рис.5 Вісесиметричні коливання

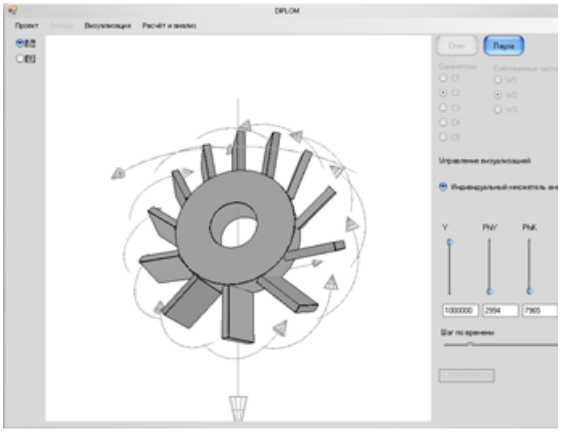


Рис.6 Коливання з одним вузловим діаметром вздовж осі y

3. Симетрія з одним вузловим діаметром вздовж осі x.

Для спрощення рівнянь руху приймаються такі умови: $\varphi_k = \Phi sin\theta_k$, y=0, z=0, $\varphi_z = 0$. Система (1) в цьому випадку має вигляд:

$$(M+mn)\ddot{x} + \frac{mn}{2}a\cos\alpha\ddot{\Phi} + cx = 0$$

$$\left\{j + \frac{n}{2}\left[m(R+a)^2 + J_{xx}cos^2\alpha + J_{yy} + J_{zz}sin^2\alpha - J_{xz}\sin 2\alpha\right]\right\}\ddot{\varphi_x} +$$

$$+[ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha]\frac{n}{2}\ddot{\Phi} + c_{xy}\varphi_x = 0$$

$$-ma\cos\alpha\ddot{x} + \frac{J_{yz}^2 + [ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha]^2}{ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha}\ddot{\varphi_x} + (ma^2 + J_{zz})\ddot{\Phi} \quad (4)$$

$$+ c_1\Phi = 0$$

$$\varphi_y = -\frac{J_{yz}}{ma(R+a)\sin\alpha + J_{zz}\sin\alpha - J_{xz}\cos\alpha}\varphi_x$$

Картина коливань у цьому випадку така ж, що і в другому випадку, відмінність тільки в повороті на 90^0 (рис. 7).

4. Симетрія з декількома вузловими діаметрами, один з яких розташований паралельно осі y.

Умови для спрощення системи (1) мають наступний вигляд: $\varphi_k = \Phi cosl\theta_k ... (l \geq 2)$, x=0, y=0, z=0, $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = 0$, $\varphi_z = 0$. В результаті приходимо до рівняння руху окремої лопатки: $(ma^2 + J_{ZZ})\ddot{\Phi} + c_1\Phi = 0$. У цьому варіанті диск є нерухомим за рахунок самоврівноважених коливань лопаток (рис. 8).

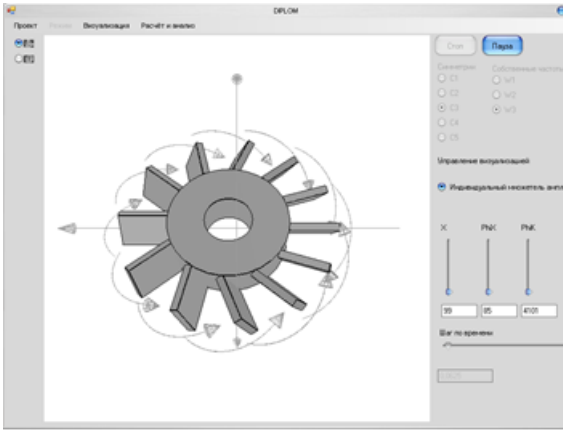


Рис. 7 Моделювання коливань з одним вузловим діаметром вздовж осі x

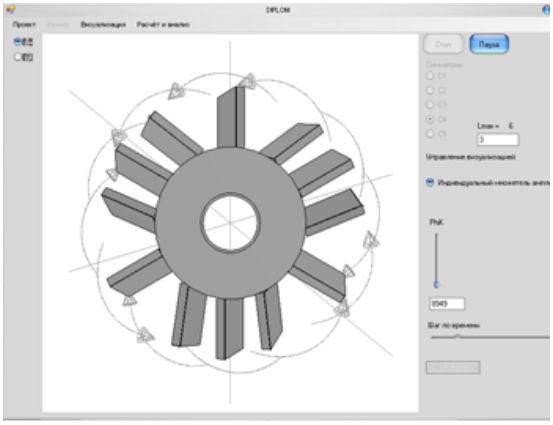


Рис.8 Коливання з 3-ма вузловими діаметрами, один з них розташований паралельно осі y

5. Симетрія з декількома вузловими діаметрами, один з яких розташований паралельно осі x.

Рівняння руху спрощуються за рахунок умов: $\varphi_k = \Phi sinl\theta_k ... (l \geq 2)$, x=0, y=0, z=0, $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = 0$, $\varphi_z = 0$. Знову отримуємо рівняння $(ma^2 + J_{ZZ})\ddot{\Phi} + c_1\Phi = 0$.

Аналогічно попередньому випадку, диск є нерухомим за рахунок самоврівноважених коливань лопаток, але в цьому випадку один з трьох вузлових діаметрів розташований вздовж осі x (рис. 9).

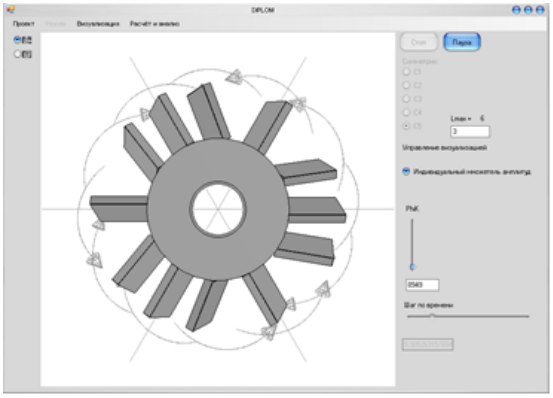


Рис. 9 Моделювання коливань з 3-ма вузловими діаметрами, один з яких розташований паралельно осі x.

Розглянемо фізичний зміст результатів, отриманих у перших трьох випадках. Під поступальним рухом диска уздовж осі OZ у вісесиметричному випадку вважаємо те, що за рахунок нахилів осей обертання лопаток швидкості центрів мас лопаток мають складові уздовж цієї осі. Та ж причина пояснює обертання диска навколо вузлового діаметра у другому і третьому випадках. Тут половина лопаток, розташованих по одну сторону від вузлового діаметра, зміщуються в одному напрямку щодо площини диска, а інша половина лопаток — в іншому напрямку. У підсумку рух уздовж осі OZ в цілому самоврівноважено, але виникають переміщення уздовж цієї осі в протилежні сторони двох половин диска навколо вузлового діаметра. Якщо $J_{yz} \neq 0$, то виникає додаткове обертання диска щодо осі, перпендикулярної вузловому діаметру, що приводить до сумарного обертання відносно деякої похилої до цього діаметру осі. Випадок $J_{yz} \neq 0$ може виникнути, наприклад, через відхилення осей лопаток від осей C_kY_k. При цьому рух центрів мас лопаток відбувається поза площиною диска, що призводить не тільки до зсуву центру диску, як у плоскому випадку, але і до зазначеного повороту диска.

У випадках 4 і 5 коливання лопаток самоврівноважені, тому тут не виникають які-небудь нові, у порівнянні з плоским випадком, ефекти. Останні $n - 3$ частоти коливань дворазово вироджені.

Можна показати, що розглянуті випадки цілком охоплюють усі n+6 власних форм коливань системи.

Висновки

В ході виконання роботи було узагальнено існуючі дані про методи розрахунку власних форм коливань таких складних об’єктів, як гідротурбінний диск з лопатками, а саме: метод скінченних елементів, метод, що передбачає побудову дискретної моделі, а також різні експериментальні методики [11,12].

Для дослідження було обрано дискретне моделювання. Модель, за допомогою якої проводилось вивчення власних частот та форм коливань диска з лопатками, включає жорсткий диск, на якому з певним кроком насаджено n абсолютно жорстких лопаток, з'єднаних пружно з диском. Осі, навколо яких повертаються лопатки відносно диска, утворюють з віссю диска деякий кут α.

При розрахунку власних частот та форм коливань розглядались окремо певні випадки симетрії, наприклад, симетрія відносно центра, симетрія відносно вузлових діаметрів. Це дозволяє спрощувати відповідну систему рівнянь руху.

У підсумку створено програмний комплекс, який дозволяє для певного гідротурбінного диску з лопатками із заданими характеристиками, такими як кількість лопаток, їх маса та розміри, маса та розміри диска і т.і., проводити розрахунки з обчислення власних частот та форм коливань та візуалізувати коливання моделі за певною власною формою коливань.

Досліджено форми коливань гідротурбіни з ціллю виявлення резонансних форм коливань, які можуть бути небезпечними і спричинювати поламки гідротурбіни.

В результаті напрацювань було виявлено, що під час несамовріvноваженості коливань лопаток з’являються складові переміщень уздовж різних осей координат, що в процесі експлуатації гідротурбін призводить до виникнення реакцій в опорних підшипниках. При цьому власні частоти коливань диску з лопатками потрапляють у діапазон, що відповідає режимам розгону або гальмування гідротурбіни. При певних умовах, зокрема, при частому проходженні турбіною режимів розгону та гальмування в результаті виникнення на цих режимах великих реакцій в опорних підшипниках це може призводити до пошкодження турбіни. Оцінено можливості застосування програмного комплексу для підвищення ефективності існуючої технології й визначення перспективних напрямків удосконалювання процесу.

Список літератури:

1. Y. V. Chumachenko, "Development of computational algorithms for the study of wave processes in discrete media," Visnyk Khersonskoho Natsionalnoho Tekhnichnoho Universitetu, no. 4, pt. 3, pp. 294–300, 2025. doi: https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2025.4.3.34

2. Y.-J. Chiu, X.-Y. Li, Y.-C. Chen, S.-R. Jian, C.-H. Yang, and I.-H. Lin, “Three methods for studying coupled vibration in a multi flexible disk rotor system,” Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 31, No. 11, pp. 5219–5229, Nov. 2017, https://doi.org/10.1007/s12206-017-1015-2 .

3. Z. Li, T. Zhao, H. Kou, H. Zhang, and H. Yuan, “Vibration characteristics of multi-stage blade-disk-shaft integrated structure with three-dimensional crack,” Journal of Vibration Engineering and Technologies, Vol. 9, No. 4, pp. 597–611, Jun. 2021, https://doi.org/10.1007/s42417-020-00251-0 .

4. K. Brinkmann, T. Hoffmann, L. Panning-von Scheidt, and H. Stüer, “Transient resonance passage of a mistuned bladed disk with and without underplatform dampers,” Int. J. Turbomach. Propuls. Power, vol. 8, no. 4, p. 38, Oct. 2023. doi: https://doi.org/10.3390/ijtpp8040038 .

5. N. Morin, Q. Dollon, J. Antoni, A. Tahan, C. Monette, and M. Gagnon, “Harmonic modal analysis of hydroelectric runner in steady-state conditions: A Bayesian approach,” Mech. Ind., vol. 25, p. 25, Oct. 2024. doi: https://doi.org/10.1051/meca/2024020 .

6. F. Zhi, F. Duan, M. Liu, G. Niu, J. Jiao, Z. Deng, J. Jiang, and X. Fu, “Error revising of blade tip-timing parameter identification caused by frequency sweep rate”. Measurement 2022, 201, doi: 10.1016/j.measurement.2022.111681 .

7. D. Wei, H. Li, P. Gao, Y. Chen, and C. Wang, “Mistuning identification and model updating approach for bladed disks based on blade tip timing,” J. Sound Vib., vol. 567, p. 117958, Dec. 2023. doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023.117958 .

8.Q. Dollon, A. Tahan, J. Antoni, M. Gagnon, C. Monette, “Toward a better understanding of synchronous vibrations in hydroelectric turbines”, J. Sound Vibrat. 544, 117372 (2023),doi: 10.1016/j.jsv.2022.117372

9. H. Weiwei, L. Zengwei, L. Zhuohao, Y. Xudong, and L. Xiaoning, “A low-frequency rotating electromagnetic vibration energy havester,” Sustainable Energy Technologies and Assessments, Vol. 82, p. 104492, Oct. 2025, https://doi.org/10.1016/j.seta.2025.104492 .

10. B. Dong and R. G. Parker, “Vibration of general symmetric systems using group theory,” J. Sound Vib., vol. 503, p. 116087, Jul. 2021. doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116087 .

11. W. Long and Y. Chen, “Reduced order modeling and mistuning identification method for rotating bladed disks under varying speeds,” J. Sound Vib., vol. 595, p. 118687, Jan. 2025. doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118687 .

12.M. Wang et al., “A hybrid triboelectric-piezoelectric-electromagnetic generator with the high output performance for vibration energy harvesting of high-speed railway vehicles,” Nano Energy, Vol. 132, p. 110417, Dec. 2024, https://doi.org/10.1016/j.nanoen.2024.110417 .

13.W. Q. Sun and Z. Q. Guo, “Mathematical modeling and nonlinear vibration analysis of a coupled hydro-generator shaft-foundation system,” Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., vol. 98, p. 105776, Jul. 2021. doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105776 .

14.B. B. Xu, X. Q. Luo, M. Egusquiza, W. Ye, J. Liu, and E. Egusquiza, “Nonlinear modal interaction analysis and vibration characteristics of a Francis hydro-turbine generator unit,” Renew. Energy, vol. 168, pp. 854–864, May 2021. doi: https://doi.org/10.1016/j.renene.2020.12.083

15. A. Sinha, “Vibration of a mistuned bladed disk under fluctuating rotor speed,” J. Sound Vib., vol. 625, p. 119600, Mar. 2026. doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2025.119600 .

Надійшла до редколегії 08.06.2026

Відомості про авторів:

Чумаченко Ярослав Віталійович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп’ютерних наук, Львівський національний лісотехнічний університет / Lviv National Forestry University, Україна; email: chumachenko@nltu.edu.ua; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0447-4874

Паславський Михайло Михайлович – кандидат технічних наук, асистент кафедри комп’ютерних наук, Львівський національний лісотехнічний університет / Lviv National Forestry University, Україна; email: mykhailo.paslavskyi@nltu.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/ 0000-0003-1635-4340