

УДК 373.5.016:51+519.1

РОМАН ЗАТОРСЬКИЙ, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики та інформатики і методики навчання, Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна

ORCID: ID: 0000-0001-7503-4932

roman.zatorskyi@cnu.edu.ua

НАТАЛІЯ КУЛЬЧИЦЬКА, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики і методики навчання, Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна

ORCID: ID: 0000-0001-9308-6840

nataliia.kulchytska@cnu.edu.ua

ІРИНА НИКИФОРЧИН, кандидат економічних наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики і методики навчання, Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна

ORCID: ID: 0000-0003-0210-3188

iryna.nykyforchyn@cnu.edu.ua

ВОЛОДИМИР ПИЛИПІВ, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики та інформатики і методики навчання, Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна

ORCID: ID: 0000-0003-0579-1211

volodymyr.pylypiv@cnu.edu.ua

ПРО ВСТАНОВЛЕННЯ БАЛАНСУ КОНТИНУАЛЬНОЇ ТА ДИСКРЕТНОЇ СКЛАДОВИХ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

ROMAN ZATORSKYI, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor, Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ukraine

NATALIIA KULCHYTSKA, PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ukraine

IRYNA NYKYFORCHYN, PhD in Economic Sciences, Associate Professor, Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ukraine

VOLODYMYR PYLYPIV, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor, Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ukraine

TOWARD A BALANCED REPRESENTATION OF CONTINUOUS AND DISCRETE MATHEMATICS IN THE SCHOOL CURRICULUM

У статті досліджено проблему балансу між континуальною (неперервною) та дискретною складовими шкільної математичної освіти. На основі аналізу українських і зарубіжних освітніх програм обґрунтовано необхідність посилення дискретної складової курсу математики. Запропоновано розглядати її через три наскрізні змістові лінії: теорію графів,

комбінаторику та алгоритми, дискретні процеси й кодування. Показано можливості їх поетапного впровадження у 5–11 класах для розвитку логічного, структурного та алгоритмічного мислення учнів, наведено приклади навчальних задач.

Ключові слова: дискретна математика; шкільний курс математики; теорія графів; комбінаторика; алгоритмічне мислення.

Summary. The article examines the problem of balancing the continuous

and discrete components of school mathematics education. Based on an analysis of Ukrainian and international educational curricula, the necessity of strengthening the discrete component of the mathematics curriculum is substantiated. It is proposed to consider this component through three cross-cutting content strands: graph theory, combinatorics, and algorithms, discrete processes, and coding. The paper demonstrates the possibilities of their gradual implementation in Grades

5–11 to foster students' logical, structural, and algorithmic thinking, and provides examples of instructional tasks.

Keywords: mathematics education, discrete mathematics, graph theory, combinatorics, algorithmic thinking.

Мета: теоретично обґрунтувати шляхи досягнення балансу між континуальною та дискретною складовими шкільної математичної освіти; визначити місце дискретної математики у структурі сучасного шкільного курсу математики та запропонувати модель поетапного впровадження наскрізних дискретних змістових ліній у навчання математики учнів 5–11 класів.

Постановка проблеми в загальному вигляді. Сучасна шкільна математична освіта потребує суттєвого змістового переосмислення. З одного боку, вона успадковує класичну традицію, у якій центральне місце посідають числа, алгебраїчні перетворення, функції, геометричні фігури, вимірювання та початки аналізу. З іншого боку, розвиток комп'ютерних технологій дедалі більше опирається на дискретні структури: алгоритми, графи, мережі, коди, логічні схеми, комбінаторні конфігурації та цифрові дані. Тому постає питання не про заміну класичної математичної освіти, а про встановлення розумного балансу між неперервною і дискретною лініями шкільної математики.

Аналіз досліджень і публікацій. В українській освітній системі вже закладено підстави для такого переосмислення. Державний стандарт базової середньої освіти визначає загальну структуру освітнього процесу, обов'язкові результати навчання та орієнтири оцінювання для освітніх галузей, зокрема математичної та інформаційної складових. (*Міністерство освіти і науки України, 2020*). Це важливо для нашої теми дослідження, оскільки дискретна математика не обмежується лише одним шкільним предметом: її елементи природно виникають і в математиці, і в інформатиці, і в задачах моделювання реальних ситуацій.

Типова освітня програма для 5–9 класів закладів загальної середньої

освіти, оновлена наказом МОН України від 9 серпня 2024 року № 1120, задає організаційну структуру навчання на рівні базової середньої освіти. (*Міністерство освіти і науки України, 2024*). Для цієї статті вона важлива не лише як документ розподілу навчального часу, а і як ланка між державним стандартом, навчальними програмами, підручниками та реальною практикою навчання. Концептуальні засади математичної освітньої галузі дають підстави для ширшого погляду на шкільну математику як на засіб розвитку мислення, моделювання й орієнтації в технологічному суспільстві. (*Міністерство освіти і науки України, 2025*). Якщо математична освіта має готувати учня до сучасного світу, то вона не може залишатися зорієнтованою переважно на неперервні моделі, функції та обчислення, а повинна послідовно формувати також дискретне структурне мислення.

Аналіз навчальних програм з математики для 5–9 класів показує, що дискретна складова в українській школі вже присутня, але найчастіше вона входить через теми, пов'язані з даними, статистикою, ймовірністю та початками комбінаторики. Наприклад, у програмі з математики авторства М. І. Бурди та Д. В. Васильєвої робота з даними поєднується зі статистикою, комбінаторикою та ймовірністю. (*Міністерство освіти і науки України, 2024*). У програмі інтегрованого курсу математики авторства О. С. Істєра комбінаторика подається як засіб розгляду можливих подій, перебору та підрахунку числа варіантів у прикладних задачах. (*Міністерство освіти і науки України, 2024*). Проте наявність окремих комбінаторних і ймовірно-статистичних тем ще не означає, що у шкільному курсі сформовано цілісну лінію дискретної математики. Попередній аналіз програм дозволяє висловити робоче припущення: дискретна математика здебільшого виконує службову роль – готує до вивчення ймовірності, статистики, роботи з даними або окремих прикладних задач, але не завжди постає як самостійна мова сучасної математики.

Цей висновок не слід розуміти як

критику окремих програм чи підручників, ідеться радше про історично сформований дисбаланс. Традиційна шкільна математика тривалий час розвивалася як підготовка до розуміння алгебри, геометрії, функціональних залежностей і початків математичного аналізу. Така традиція залишається цінною і необхідною. Однак розвиток цифрових технологій, комп'ютерних наук, криптографії, теорії мереж, обробки даних і штучного інтелекту вимагає від школи також інших умінь і навичок: учень має навчитися мислити не лише мовою континуальної математики, а й мовою скінченних станів, переходів, зв'язків, алгоритмів і кодів. Подібні тенденції переосмислення змісту математичної освіти та посилення ролі роботи з даними, алгоритмічного мислення і математичного моделювання відзначаються також у сучасних міжнародних аналітичних дослідженнях. (OECD, 2024).

Відповідно до Концепції профільної середньої освіти, Державного стандарту базової середньої освіти та Державного стандарту профільної середньої освіти (*Кабінет міністрів України, 2024*), навчання математики у 10–12 класах спрямоване на забезпечення наступності між базовою та профільною освітою, розвиток математичної компетентності та підготовку учнів до подальшої освіти і професійної діяльності.

У 10 класі (профільно-адаптаційний етап) здійснюватиметься систематизація та поглиблення знань з алгебри і геометрії, сформованих у базовій школі.

В 11 класі (профільний етап) значна увага приділятиметься елементам математичного аналізу, поглибленому вивченню стереометрії; розширюватимуться знання з теорії ймовірностей і математичної статистики. Учні набуватимуть досвіду математичного моделювання процесів і явищ, використовуючи сучасні цифрові інструменти.

У 12 класі (етап професійного самовизначення) навчання орієнтуватиметься на інтеграцію та практичне застосування набутих знань. Передбачається розв'язування комплексних задач прикладного змісту, по-

глиблення статистичних методів аналізу даних і математичного моделювання, що забезпечуватиметься вивченням окремих спецкурсів за вибором. Оскільки зміст окремих курсів 12 класу перебуває на етапі поетапного впровадження, детальний аналіз цього рівня навчання не є предметом даного дослідження. Тут, власне, можна запропонувати школярам для узагальнення і розширення знань спецкурс і дискретної математики.

Виклад основного матеріалу дослідження. У даній статті пропонується розглядати дискретну математику не як додатковий факультативний матеріал, а як сукупність кількох наскрізних змістових ліній, які можуть поступово розгортатися з 5 до 11 класу.

Першою такою лінією може бути теорія графів. У молодших класах вона природно входить через задачі на класифікацію, групування, "острови і місточки", дерева доріг, маршрути, родоводи, схеми знайомств. У середніх класах ці образи можуть перейти до понять вершини, ребра, шляху, циклу, дерева, зв'язності, ейлерового обходу. У старших класах графи можуть бути пов'язані з транспортними мережами, задачами оптимізації, найкоротшими маршрутами, основними деревами, планарними графами і графами многогранників.

Другою лінією є комбінаторика. Вона традиційно присутня у шкільному курсі як підготовка до розгляду теорії ймовірностей, але потребує чіткішого принципового подання. Доцільно виділити чотири основні правила комбінаторного підрахунку: правило суми, правило добутку, принцип рівності та принцип включення-виключення. Особливої уваги заслуговують два останні принципи. Принцип рівності представлений значно меншою мірою в українських підручниках (*Інститут модернізації змісту освіти, n.d.*), ніж правило суми та правило добутку. Проте саме він дозволяє природно пояснювати кількість підмножин множини, кількість двійкових кодів, кількість траєкторій на гратці та багато інших доступних для розуміння учнями задач.

Третьою лінією є алгоритми, дискретні процеси та кодування. Тут важ-

ливо не дублювати інформатику, а показати математичну природу алгоритмічного мислення. Алгоритм у математиці – це не лише комп'ютерна програма, а скінченний опис дії; дискретний процес – це зміна, що відбувається кроками; кодування – це встановлення відповідності між об'єктами і символами.

Порівняльний огляд західних та східноазійських шкільних програм з математики показує, що проблема балансу між континуальною та дискретною математикою не має універсального розв'язання. У більшості розглянутих систем традиційне ядро курсу й надалі утворюють числа, алгебра, функції, геометрія, вимірювання, статистика та ймовірність. Натомість дискретна математика входить до шкільної освіти не як самостійна друга гілка математичного знання, а через кілька окремих каналів: комбінаторику, множинно-логічну мову, елементи ймовірності, алгоритміку, інформатику, цифрову грамотність і роботу з даними (*Sandefur et al., 2022; Hart & Sandefur, 2018*).

Так, французька модель є показовою тим, що алгоритміка та програмування безпосередньо пов'язані з курсом математики. Це не означає, що французький курс шкільної математики перетворюється на курс дискретної математики, проте саме тут видно важливий методичний зсув: учень має не лише оперувати формулами та графіками, а й описувати процедури, послідовності дій, умови та повторення (*Ministere de l'Education nationale, n.d.*).

Ванглійській освітній системі дискретний компонент має іншу організацію. У власне математичній програмі значну роль відіграють статистика, ймовірність, простори елементарних подій, діаграми Венна та елементи роботи з множинами. Однак такі теми, як алгоритми, булева логіка, двійкове кодування, структури даних і порівняння ефективності процедур, переважно віднесено до інформатики (*Department for Education, n.d.*). Отже, в Англії дискретна математика не стільки інтегрується в єдиний курс математики, скільки розподіляється між матема-

тикою та інформатикою.

Німецька загальнонаціональна освітня програма має компетентнісний зміст. У ній змістові ідеї подано через числа й операції, величини й вимірювання, структури та функціональні зв'язки, геометрію та аналіз даних (*Kultusministerkonferenz, 2022*). Такий підхід добре фіксує значення статистико-ймовірнісного напрямку, але не виділяє теорію графів, алгоритми і кодування або комбінаторику як окрему провідну лінію шкільної математики.

Таким чином, західні освітні системи не ліквідували повністю дисбаланс між неперервною і дискретною математикою, але виробили кілька способів його зменшення: інтеграцію алгоритміки в математику, перенесення частини дискретного змісту до інформатики, посилення статистико-ймовірнісної лінії та розвиток роботи з даними. Це свідчить, що проблема дискретної складової не є локальною, а належить до загальних викликів сучасної шкільної математичної освіти.

Східноазійські освітні системи, насамперед Японія, Південна Корея та Китай, становлять окремий інтерес для аналізу балансу між континуальною і дискретною математикою. Вони традиційно відомі сильною шкільною математичною підготовкою, високою увагою до систематичного опрацювання базових понять, вправності в обчисленнях, алгебраїчній техніці та розв'язуванні задач. Водночас сучасний розвиток цих систем показує, що навіть за сильною класичної основи виникає потреба в посиленні тих компонентів математики, які пов'язані з даними, алгоритмами, статистикою, цифровими технологіями та штучним інтелектом.

Японська модель зберігає виразне класичне ядро: числа й алгебраїчні вирази, геометричні фігури, функції та використання даних. У сучасних матеріалах, пов'язаних з освітньою структурою, особливо наголошується на потребі посилення статистики, науки про дані, інформаційної грамотності та підготовки учнів до роботи в суспільстві, де штучний інтелект і дані стають універсальними інструментами (*TIMSS & PIRLS*

International Study Center, n.d.). Отже, японський досвід показує не різкий перехід від неперервної до дискретної математики, а поступове розширення традиційної математичної культури в бік даних і цифрових засотувань.

Південна Корея демонструє ще помітніше зближення шкільної математики з новими технологічними запитами. У національній рамці 2022 року серед шкільних математичних курсів старших класів фігурують не лише алгебра, геометрія, аналіз і ймовірність зі статистикою, а й математика для економіки, математика для штучного інтелекту, практична статистика та математичний проєкт (*Ministry of Education, Republic of Korea, 2022*). Для спеціалізованих шкіл передбачено окремий курс дискретної математики. Це важливо методично: дискретна математика тут не повністю розчиняється в інформатиці, а принаймні на поглибленому рівні визнається як власне математична галузь.

Китайська система за доступними англійськими матеріалами зберігає сильну орієнтацію на функції, алгебру, геометрію та математичне моделювання, але водночас включає множини як мову математики, елементарні алгоритми, статистику, ймовірність, комбінаторику, перестановки, комбінації та біном Ньютона (*Mathematics Curriculum Standards for Senior Secondary School, 2003*). Це означає, що частина дискретного змісту в Китаї присутня у старшій школі більш явно, ніж у багатьох програмах, де комбінаторика обмежується лише найпростішими задачами на підрахунок.

Разом з тим східноазійську традицію не варто ідеалізувати як повністю збалансовану щодо неперервної та дискретної математики. У ній дуже сильним залишається класичний каркас: функції, рівняння, геометрія, тригонометрія, аналіз, задачна техніка. Дискретна складова найчастіше посилюється через статистику, дані, AI-орієнтовані курси, інформатику та окремі поглиблені модулі. Теорія графів, булева алгебра, релейно-контактні схеми, кодування або криптографія не завжди виступають як ма-

сова шкільна математична лінія.

Отже, порівняння Сходу і Заходу дає підстави говорити не про просту географічну протилежність, а про два різні способи модернізації шкільної математики. Західні програми частіше вводять дискретний зміст через алгоритміку, обчислення, логіку та цифрове моделювання. Східноазійські програми, зберігаючи сильнішу класичну дисциплінарну основу, активніше підкреслюють статистику, дані, AI та прикладну цифрову грамотність. Для України цінними є обидва уроки: потрібно зберегти системність класичної математики, але водночас надати дискретній математиці не фрагментарний, а структурний статус у шкільному курсі.

Порівняння української, західноєвропейської та східноазійської освітніх традицій показує, що історичний дисбаланс між неперервною і дискретною математикою не є випадковим. Він зумовлений тим, що класична шкільна математика формувалася переважно як підготовка до алгебри, геометрії, функціонального аналізу елементарного рівня та математичного опису неперервних процесів. Однак сучасна наука і техніка дедалі більше опираються також на скінченні структури, алгоритми, графи, логічні схеми, кодування, дані, мережі та дискретні моделі. Тому завдання сучасної методики математики полягає не в заміні континуальної традиції дискретною, а у встановленні між ними змістовного балансу.

Такий баланс має бути побудований на трьох засадах. По-перше, учень повинен бачити неперервну і дискретну математику як дві взаємодоповнювальні мови опису світу. По-друге, дискретна математика може входити до курсу не лише через випадкові комбінаторні задачі, а і через такі поняття, як скінченна множина, граф, дерево, алгоритм, логічна операція, рекурсія, кодування, дискретна модель. По-третє, зв'язок з інформатикою має бути не зовнішнім, а змістовним: інформатика може показувати технологічну реалізацію дискретних структур, але математичні основи цих структур мають бути усвідомлені саме як частина математичної культури.

Методичні поради до впровадження у програму з математики загальноосвітніх шкіл трьох ліній дискретної математики

Теорія графів може бути введена у шкільний курс не окремою темою, а як поступова вертикальна лінія від 5 до 11 класу. Ця лінія має три етапи: передграфовий етап – класифікації, групи, зв'язки, дерева, схеми; ігровий графовий етап – маршрути, малювання одним розчерком, карти, розфарбування; модельний етап – транспортні мережі, оптимізація, граfi многогранників, планарність. Саме так природно і без руйнування традиційного курсу дискретна математика входить у шкільну програму з математики. Вона не замінює алгебру, геометрію чи аналіз, а доповнює їх тією мовою, якої потребує сучасний етап розвитку цивілізації: мовою структур, зв'язків, маршрутів, мереж і алгоритмів.

Упровадження елементів теорії графів у шкільний курс математики доцільно починати не з формального означення графа, а з ігрових задач на класифікацію, групування, з'єднання об'єктів за певною ознакою та пошук шляхів. У 5–6 класах основою можуть бути задачі про "острови і місточки", "дерева доріг", "родовідні дерева", "хто з ким товаришує". На цьому етапі учень ще не обов'язково повинен знати терміни "граф", "ступінь вершини", "цикл", але вже має набути досвіду роботи зі схемами, у яких об'єкти з'єднані відношеннями. У 7–8 класах ігрова форма може перейти до задач на маршрути, малювання фігур одним розчерком, ейлерові обходи, розфарбування карт, поділ учнів на команди без конфліктів. Саме тут доцільно ввести поняття вершини, ребра, степеня вершини, шляху, циклу, зв'язного графа. У 9–10 класах граfi можуть виступати як моделі практичних задач: карти місцевості, маршрути доставки, найкоротші шляхи, мінімальні мережі, електропостачання, прокладання інтернет-кабелів. Нарешті, в 11 класі граfi природно пов'язуються з геометрією многогранників, формулою Ейлера, планарністю та просторовим мисленням. Такий

підхід дозволяє не перевантажувати шкільний курс новою термінологією, але поступово формує в учнів дискретне структурне мислення. Теорія графів постає не як ізольований університетський розділ, а як природна мова опису зв'язків, маршрутів, мереж, класифікацій і просторових структур.

Наведемо орієнтовні задачі, які допоможуть впровадити у шкільну програму з математики першу вертикальну дискретну лінію.

5 клас: класифікації, групування, перші зв'язки

Задача 1. "Розсели фігури по будиночках". Учні дають набір фігур: трикутники, квадрати, прямокутники, круги, фігури різних кольорів і розмірів. Завдання полягає в тому, щоб розкласти фігури по "будиночках" так, щоб у кожному будиночку жили фігури з однією спільною ознакою. Можливими ознаками можуть бути: колір, форма, кількість сторін, наявність прямих кутів, симетричність.

Задачі такого змісту забезпечують підготовку до поняття розбиття множини на класи. Пізніше вершинами графа можуть стати самі фігури, а ребрами – спільні властивості між ними.

Задача 2. "Хто з ким товаришує?". Є 8 карток з тваринами: кіт, собака, вовк, лисиця, корова, кінь, тигр, лев. З'єднати лінією ті пари тварин, які мають спільну ознаку: домашні тварини, дикі тварини, хижаки, травоядні, тварини, які мають чотири лапи.

До цієї задачі можна поставити наступні питання до учнів: чи може одна тварина належати до кількох груп? Чи можуть дві тварини бути з'єднані з кількох причин? Яка тварина має найбільше "друзів"? Задача готує учнів до побудови першого неформального графа: об'єкти? це вершини, лінії між ними? зв'язки.

Задача 3. "Острівці і місточки". На аркуші намальовано кілька островів. Учні пропонують провести місточки між островами так, щоб з кожного острова можна було дістатися до кожного іншого. Запитання до класу: яку найменшу кількість місточків треба побудувати? Чи

можна побудувати місточки так, щоб не було зайвих? Що станеться, якщо один місточок зруйнується? Задача дає перше наближення до поняття зв'язності та дерева: найменша кількість ребер, яка зв'яже всі вершини, але не створює циклів.

6 клас: вершини, ребра, дерева, нециклічність

У 6 класі вже можна вводити поняття "вершина" і "ребро", але ще без формальної теорії. Найприроднішим об'єктом є дерево.

Задача 4. "Дерево доріг". На малянку є село, від якого виходять дороги до кількох хуторів. Деякі дороги розгалужуються. Позначте: місця розгалуження, кінцеві пункти, дороги між ними. Потім учитель вводить назви: місця розгалуження і кінцеві пункти – вершини, дороги між ними – ребра. Після цього ставить запитання: скільки вершин має дерево доріг, скільки ребер? Чи можна, рухаючись дорогами, повернутися в початкову вершину, не проходячи тією самою дорогою назад? У роботі над задачею учні спостерігають нециклічність: у дереві жодні дві гілки не змикаються.

Задача 5. "Знайди зайву дорогу". Дано кілька схем доріг. В одних схемах дороги утворюють дерево, в інших є замкнене кільце. Визначити, де є дерево, а де не дерево.

Запитання до учнів: у якій схемі є замкнений шлях? Яку дорогу треба забрати, щоб зникло кільце? Чи всі населені пункти після цього залишаться зв'язаними? Під час аналізу задачі формується інтуїція: дерево – це зв'язана схема без циклів.

7 клас: маршрути, цикли, ейлерові ігри

У 7 класі можна вводити ігри на проходження ребер. Тут природно з'являються ейлерові графи.

Задача 6. "Намалюй, не відриваючи олівця". Учні пропонують кілька фігур: трикутник; квадрат; квадрат з діагоналлю; будиночок; конверт; зірку; схему мостів. Далі пропонують намалювати кожну фігуру, не відриваючи олівця від паперу і не проходячи жодну лінію двічі. Запитання до класу: які фігури вдалося намалювати? У яких вершинах "сходиться" парна кількість ліній? У яких

вершинах "сходиться" непарна кількість ліній? Чи можна передбачити відповідь, не пробуваючи малювати?

Методичне значення задачі полягає в тому, що учні підходять до ейлерового критерію.

Задача 7. "Місто семи мостів". Можна подати спрощену версію задачі про кенігсберзькі мости. (Задача про кенігсберзькі мости – це класична історична головоломка, суть якої полягає в тому, щоб пройти всі 7 мостів старого Кенігсберга за один раз, не ступаючи на жоден міст двічі та повернувшись у початкову точку): у місті є острови й береги, з'єднані мостами. Мешканець хоче пройти всіма мостами рівно один раз. Побудувати схему, у якій острови й береги – це вершини, мости – ребра.

До задачі слід поставити запитання: чи важлива форма островів? Чи важлива довжина мостів? Що залишається головним? Чи можна пройти всі мости саме один раз? Вона є першим прикладом до математичного моделювання за допомогою графів.

8 клас: граф як модель зв'язків

У 8 класі можна вже вводити граф як математичний об'єкт: множина вершин і множина ребер. Але бажано зберігати ігрову форму.

Задача 8. "Хто з ким дружить?". У класі кожен учень записує групу учнів, хто з ким дружить. Після цього будує граф знайомств. Тоді вчитель ставить запитання: Хто має найбільше зв'язків? Чи є учень, через якого з'єднуються дві групи? Чи можна розбити клас на кілька груп так, щоб у кожній були взаємні знайомства? Чи існує ланцюжок знайомств між будь-якими двома учнями?

На цьому прикладі учні бачать, що графи моделюють соціальні зв'язки.

Задача 9. "Розфарбуй карту". Дано карту з кількох "областей". Сусідні області мають бути різного кольору. Потрібно розфарбувати карту найменшою кількістю кольорів.

Запитання до класу: скільки кольорів достатньо; чи можна обійтися трьома; які області заважають зменшити кількість кольорів?

Задача дає природний місток до графів суміжності: області стають вершинами, спільна межа – ребром.

9 клас: маршрути, найкоротші шляхи, практичні задачі

У 9 класі можна вводити зважені графи, де ребра мають довжини, час або вартість.

Задача 10. "Карта місцевості". На схемі є кілька сіл, з'єднаних дорогами. Біля кожної дороги записано її довжину. Знайти найкоротший шлях від села А до села В.

Запитання до класу: чи завжди найкоротший шлях має найменшу кількість доріг; чи може шлях з більшою кількістю ребер бути коротшим; як систематично не загубити всі можливості?

Задача готує учнів до алгоритму Дейкстри, але без формального програмування.

Задача 11. "Розвезення товару". Є база і кілька магазинів. Між пунктами знаходяться дороги різної довжини. Водій має виїхати з бази, завезти товар у всі магазини і повернутися назад. Потрібно знайти економний маршрут.

Запитання до класу: чи завжди найкраще їхати спочатку до найближчого магазину; чи може "жадібний" вибір привести до поганого маршруту; як порівняти кілька маршрутів?

Задача методично підводить учнів до задачі комівояжера і до поняття алгоритмічної складності на інтуїтивному рівні.

10 клас: дерева, остови, мережі, оптимізація

У 10 класі можна переходити від окремих ігор до системної змістової лінії: граfi як математичні моделі мереж.

Задача 12. "Провести інтернет у села". Є кілька сіл. Між деякими парами можна прокласти кабель. Біля кожного можливого кабелю вказано вартість. Прокласти кабелі так, щоб усі села з'єдналися, а загальна вартість була якнайменша.

Питання до класу: чи потрібно будувати всі можливі кабелі; чи може в оптимальній схемі бути цикл; Якщо цикл є, чи можна забрати найдорожче ребро циклу?

Задача забезпечує пропедевтику до поняття мінімального остовного дерева.

Задача 13. "Місто без зайвих

доріг". Дано граф доріг. Треба залишити тільки ті дороги, які забезпечують зв'язок між усіма пунктами, але не створюють циклів.

Запитання до класу: скільки ребер буде в такому дереві, якщо є n вершин? Чи може бути кілька різних остовних дерев? Яке з них найдешевше?

Задача дає можливість повернутися до формули про співвідношення числа вершин і ребер дерева, але вже у зв'язку з оптимізацією.

Задача 14. "Мережа електропостачання". Є електростанція і кілька населених пунктів. Деякі лінії дешевші, але не надійні; інші дорожчі, але коротші. Запропонуйте схему мережі.

Запитання до класу: чи завжди найдешевша мережа найкраща; що станеться, якщо одне ребро пошкодиться; Чи треба інколи навмисно додавати цикл для надійності?

На прикладі задачі учні бачать, що дерево мінімізує витрати, але цикл може підвищувати надійність.

11 клас: граfi многогранників, планарність, елементи топологічного мислення

У 11 класі теорію графів можна природно пов'язати з геометрією, многогранниками, формулою Ейлера та просторовим мисленням.

Задача 15. "Многогранник як граф". Учні дають моделі або зображення тетраедра, куба, октаедра, додекаедра, ікосаедра, пропонується для кожного многогранника побудувати граф.

Питання до класу: скільки вершин має граф; скільки ребер; скільки граней має многогранник; чи можна намалювати цей граф на площині без перетину ребер?

На прикладі задачі учні бачать бієкцію між многогранником і його графом.

Задача 16. "Два будинки і три колодязі". Є два будинки і три колодязі. Треба провести доріжки від кожного будинку до кожного колодязя так, щоб доріжки не перетиналися. Скористайтесь графами.

Запитання до класу: чи можна це зробити на площині; якщо неможна, то чому; що зміниться, якщо дозволити міст або тунель?

Ця задача підводить учнів до по-

няття планарності та непланарності графів.

Проаналізуємо, якою має бути друга дискретна лінія - комбінаторика.

На відміну від теорії графів, яка природно входить у шкільний курс через ігри, схеми, карти, маршрути й візуальні моделі, комбінаторика часто сприймається учнями важче. Причина в тому, що комбінаторне мислення вимагає не лише обчислень, а й умінь правильно організувати множину випадків, не пропустити жодного варіанта і не порахувати один і той самий варіант кілька разів. Тому методично доцільно робити наголос не стільки на формальному вивченні перестановок, розміщень і комбінацій, скільки на поступовому засвоєнні основних комбінаторних принципів: правила суми, правила добутку, принципу рівності та принципу включення-виключення. Добре засвоєні та випробувані ці основні принципи комбінаторики, допоможуть у старших класах не тільки встановити формули для обчислення числа перестановок, розміщень, сполучень, але й дадуть міцну основу для розв'язання інших перелічувальних задач.

У молодших класах такі принципи можуть з'являтися в ігрових задачах: розкладання предметів за групами, вибір одного предмета з кількох неперетинних класів, складання комплектів одягу, вибір маршруту через кілька пунктів, підрахунок станів перемикачів, побудова траєкторій, робота на клітинковій дошці. Особливої уваги потребує принцип рівності, який рідко формулюється у шкільних підручниках як самостійний комбінаторний принцип. Водночас саме він лежить в основі багатьох красивих і доступних підрахунків: кількості підмножин множини, кількості двійкових кодів, кількості траєкторій на ґратці, кількості способів подати об'єкт в іншій, зручнішій для підрахунку формі.

Таким чином, шкільна комбінаторика має бути не лише підготовкою до теорії ймовірностей, а й шляхом до дискретного мислення. Учень повинен навчитися бачити за задачею множину варіантів, розбивати її на

частини, будувати взаємно однозначні відповідності, контролювати перетини класів і застосовувати логічний принцип включення-виключення.

Позаяк комбінаторика як вертикальна дискретна лінія у шкільній математиці певною мірою, присутня, то ми обмежуємось лише акцентами на використанні основних комбінаторних принципів та правил. Особливо маємо на увазі те, що майже не присутні у чинних підручниках.

Принцип рівності: порахуй по-іншому

Принцип рівності для школярів можна формулювати так:

Якщо об'єкти однієї множини можна пов'язати з об'єктами іншої множини так, що кожному об'єкту з першої множини відповідає рівно один об'єкт з другої, і навпаки, то кількість об'єктів у цих множинах однакова. Для молодших класів слово "бієкція" можна не вживати.

Задача 1. "Будинки і поштові скриньки". У кожного будинку на вулиці є рівно одна поштова скринька. На вулиці 24 поштові скриньки. Скільки будинків на вулиці? Ця задача переконує учнів, що не треба рахувати будинки окремо, якщо вже пораховано скриньки.

Задача 2. "Взяти або не взяти". Є три предмети: яблуко, груша, слива. Для кожного предмета можна зробити один з двох виборів: взяти або не взяти. Скільки різних наборів можна скласти?

Методичний сенс цієї задачі полягає в тому, що кожній підмножині відповідає послідовність з трьох відповідей "так" або "ні".

Задача 3. "Робот на клітинках". Робот стоїть у точці А. Йому треба дістатися до точки В, рухаючись тільки праворуч або вгору. Наприклад, треба зробити два кроки праворуч і два кроки угору. Скільки різних маршрутів має робот?

Методичний сенс задачі полягає у тому, що кожному маршруту відповідає слово з літер П (праворуч) і У (угору).

Принцип включення-виключення: не рахувати двічі.

У 7–8 класах достатньо двох множин.

Задача 4. "Любителі фруктів". У

групі 18 дітей. Яблука люблять 11 дітей, груші – 9 дітей, а і яблука, і груші люблять 4 дітей. Скільки дітей люблять хоча б один з цих фруктів?

Задача 5. "Книжки з малюнками і казками". У бібліотеці є 20 дитячих книжок. Серед них 12 книжок з малюнками, 9 казок, а 5 книжок є казками з малюнками. Скільки книжок є або казками, або книжками з малюнками?

У 9–11 класах можна дати задачу з трьома множинами.

Задача 6. У школі 30 учнів відвідують гуртки. Математичний гурток відвідують 14 учнів, шаховий – 12, робототехніку – 10. Математику і шахи відвідують 5, математику і робототехніку – 4, шахи і робототехніку – 3. Усі три гуртки відвідують 2 учні. Скільки учнів відвідують хоча б один з трьох гуртків?

У 9–11 класах можна прямо сформулювати чотири принципи та розглянути їх застосування для основних комбінаторних задач на множинах.

Розкриємо третю змістовну дискретну лінію у шкільному курсі математики: **алгоритми, дискретні процеси, кодування як шкільна лінія дискретної математики.**

Окрему наскрізну лінію шкільного курсу дискретної математики можуть утворювати алгоритми, дискретні процеси та кодування. Їх доцільно розглядати не як дублювання шкільної інформатики, а як власне математичну лінію, що формує в учнів уміння описувати дії, стани, переходи, правила та символічні подання інформації. Якщо неперервна математика традиційно навчає бачити зміну через функцію, графік, наближення, границю і похідну, то дискретна математика навчає бачити зміну як послідовність кроків.

У 5–6 класах ця лінія може розпочинатися з ігор на складання точних інструкцій, маршрутів, рецептів, команд для "робота". У 7 класі доцільно вводити прості дискретні процеси: подвоєння, послідовне додавання, числові ланцюжки, сходинки, процеси з повторенням одного й того самого правила. У 8 класі природно з'являється кодування: стани лампочок, перемикачів, прості шифри, подання малюнків нулями й одиниця-

ми. У 9 класі можна розглядати пошук, сортування, алгоритм Евкліда, порівняння різних способів виконання однієї задачі. У 10–11 класах ця лінія переходить до алгоритмів на графах, дерев рішень, найкоротших шляхів, мінімальних мереж, рекурсивних побудов і найпростіших ідей ефективного кодування. Такий підхід дозволяє показати учням, що алгоритм – це не лише комп'ютерна команда, а математична форма організованої дії; дискретний процес – не лише числова послідовність, а модель покрокової зміни; кодування – не лише технічний прийом інформатики, а спосіб встановлення відповідності між об'єктами і символами. Тому алгоритмічна лінія в математиці не повинна зводитися до програмування. Її завдання – сформувати в учнів здатність бачити скінченні стани, переходи між ними, правила породження нових об'єктів, структуру рішень, ефективність способів дії та можливість кодування інформації. Тому важливо поступово сформувати в учня уявлення, що алгоритм – це не просто "рецепт", а скінченна послідовність чітких кроків, перетворює вхідні дані в результат.

У 5 класі не треба вводити формальних означень. Досить показати, що правильно складена інструкція має бути точною, послідовною і зрозумілою.

Задача 1. "Навчи робота". Учитель каже: робот стоїть біля дверей класу. Йому треба дійти до дошки. Учні мають скласти інструкцію, наприклад: зроби 5 кроків уперед; поверни праворуч; зроби 3 кроки; зупинися.

Запитання до класу: що станеться, якщо пропустити один крок; що станеться, якщо команда не чітка; чи однаковий результат дадуть дві різні інструкції?

Методичний сенс задачі: учень бачить, що алгоритм потребує точності.

Задача 2. "Рецепт бутерброда". Учні пропонують записати рецепт приготування бутерброда. Потім учитель навмисно виконує інструкцію буквально. Якщо написано "поклади сир", але не сказано "на хліб", виникає комічна ситуація.

Методичний сенс задачі: це весела і корисна гра для розуміння того, що алгоритм має бути однозначним.

Задача 3. "Знайди число". Учень задумав число від 1 до 20. Клас може ставити запитання, на які відповідь лише "так" або "ні". Порівнюються дві стратегії: питати: "Це 1?", "Це 2?", "Це 3?"; питати: "Число більше 10?", "Більше 15?" тощо.

Методичний сенс задачі: це перший інтуїтивний вступ до ефективності алгоритма і двійкового пошуку.

У 6 класі можна вводити процеси, де новий стан утворюється з попереднього за певним правилом.

Задача 4. "Подвоєння клітин". У перший день є 1 клітина. Кожного дня кожна клітина ділиться на дві. Питання до класу: скільки клітин буде через 1, 2, 3, 4, 5 днів?

Методичний сенс: це природний вступ до степенів двійки, дискретного росту і кодування.

Задача 5. "Сходинок". На сходах можна кожного разу підніматися на 1 або на 2 сходинки. Питання до класу: скількома способами можна піднятися на 1, 2, 3, 4, 5 сходинок?

Методичний сенс: це дуже простий вступ до рекурентних процесів і чисел Фібоначчі.

У 7 класі можна вводити кодування через прості життєві приклади: світлофор, перемикачі, шифри, двійкові коди.

Задача 6. "Світло увімкнено або вимкнено". Є 3 лампочки. Кожна може бути в одному з двох станів: 0-вимкнено, 1-увімкнено. Скільки різних сигналів можна подати трьома лампочками?

Методичний сенс цієї задачі полягає у тому, що в ній поєднуються комбінаторика, кодування і двійкові стани.

Задача 7. "Секретний код". Кожній літері відповідає число: А = 1, Б = 2, В = 3... Учням пропонують закодувати коротке слово, наприклад "МАТИ", "МИР", "КЛАС". Додаткове завдання. Спробувати змінити код: кожне число замінити на число, більше на 3.

Методичний сенс: це пропедевтика до найпростіших шифрів зсуву.

У 8 класі можна переходити до

алгоритмів обробки даних.

Задача 8. "Знайди прізвище у списку". Є список з 32 прізвищ. Порівнюються два способи пошуку: переглядати від початку; щоразу ділити список навпіл.

Питання до класу: скільки кроків може знадобитися в першому способі, другому? Чому другий спосіб швидший?

Методичний сенс. Це інтуїтивний двійковий пошук.

Задача 9. "Вишикуй картки". Учням дають картки з числами: 7, 2, 9, 1, 5, 7, 2, 9, 1, 2, 9, 1, 5.

Завдання: відсортувати їх за зростанням. Потім пропонуються різні стратегії: щоразу знаходити найменше число; міняти сусідні картки місцями, якщо вони стоять неправильно; вставляти кожну нову картку в потрібне місце.

Методичний сенс. Це вступ до алгоритмів сортування без програмування.

9 клас: алгоритм Евкліда і дискретна математика чисел.

Задача 10. "Найбільший спільний дільник". Знайти НСД чисел 84 і 30.

Питання до класу: чому процес закінчується? Чому останній ненульовий остача є НСД? Чи цей спосіб швидший за розкладання на множники?

Методичний сенс. Учні бачать алгоритм, який працює для будь-яких двох натуральних чисел.

Задача 11. "Гра з камінцями". Є дві купки камінців: 84 і 30. За один хід можна з більшої купки забрати стільки камінців, скільки є в меншій. Повторювати, доки купки не стануть однаковими або одна не зникне.

Методичний сенс. Це ігрова форма алгоритму Евкліда.

Задача 12. "Коди з остачами". Учням пропонують поділити кілька чисел на 5 і записати лише остачі. Питання до класу: які числа мають однаковий код? Чи можна за остачею повністю відновити число? Для чого можуть бути корисні такі коди?

Методичний сенс. Це вступ до модульної арифметики, контрольних сум і кодування.

10 клас: алгоритми на графах і оптимізація

Тут лінія алгоритмів з'єднується з

попередньою лінією графів.

Задача 13. "Найкоротший шлях". Є карта з містами та відстанями між ними. Треба знайти найкоротший шлях від пункту А до пункту В.

Учням пропонується діяти так: записати відстань від А до самого А як 0; для сусідніх вершин записати відомі відстані; щоразу вибирати найближчу ще не опрацьовану вершину; уточнювати відстані до її сусідів.

Методичний сенс. Це неформальна підготовка до алгоритму Дейкстри.

Задача 14. "Жадібний вибір". Водій має розвезти товар по магазинах. Він щоразу їде до найближчого ще не відвіданого магазину. Питання: чи завжди цей спосіб найкращий? Побудуйте приклад, де він дає не найкоротший маршрут.

Методичний сенс. Учні бачать, що алгоритм може бути простим, але не оптимальним.

Задача 15. "Мінімальна мережа". Потрібно з'єднати кілька будинків кабелем мінімальної загальної довжини. Завдання: щоразу вибирати найкоротше ребро, яке не створює цикл.

Методичний сенс. Задача готує учнів до алгоритму Краскала для мінімального остового дерева.

У 11 класі можна перейти до глибших понять: рекурсивні процеси, дерева рішень, коди змінної довжини.

Задача 16. "Дерево запитань". Потрібно відгадати одну тварину з восьми: кіт, собака, корова, кінь, орел, горобець, акула, щука. Можна ставити запитання з відповідями "так" або "ні". Побудувати дерево запитань.

Наприклад: це живе у воді? Це птах? Це свійська тварина? Це хижак?

Методичний сенс. Учні бачать дерево рішень і зв'язок з кодуванням.

Задача 17. "Код для частих слів". Є повідомлення, у якому часто трапляються слова: так, ні, і, або, якщо. Ідея: словам, що зустрічаються у тексті, можна дати коротші коди, рідкісним – довші.

Питання: чому це може скоротити повідомлення; чи можна кодувати так, щоб код одного слова не був початком коду іншого; як дерево допомагає створити такий код?

Методичний сенс. Це підготовка до ідеї префіксних кодів і коду Гаффмана.

Задача 18. "Рекурсивна фігура". Побудувати фігуру за правилом: на першому кроці є один відрізок; на кожному наступному кроці кожен відрізок замінюється двома коротшими; повторити кілька разів.

Питання до класу: скільки відрізків буде після n кроків? Чи можна описати фігуру через правило самоподібності? Чим така побудова відрізняється від звичайної геометричної фігури?

Методичний сенс. Це вступ до рекурсії, дерев і дискретних ітераційних процесів.

Наведені задачі мають ілюстративний характер і призначені для демонстрації можливих шляхів інтеграції дискретних понять у чинний курс математики. Вони не претендують на вичерпне охоплення змісту відповідних ліній.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Проведене дослідження показало, що сучасний шкільний курс математики зберігає переважну орієнтацію на континуальну складову, тоді як дискретна математика представлена фрагментарно і здебільшого через окремі елементи комбінаторики, статистики та теорії ймовірностей. Аналіз українських, західноєвропейських і східноазійських освітніх програм, а також висновки міжнародних досліджень OECD засвідчили, що проблема забезпечення балансу між континуальною та дискретною математикою є загальносвітовою тенденцією розвитку математичної освіти (OECD, 2024). Встановлено, що найбільш перспективним підходом є не введення окремого шкільного курсу дискретної математики, а інтеграція її змісту через наскрізні змістові лінії.

У статті обґрунтовано доцільність формування трьох таких ліній: теорії графів, комбінаторики та алгоритмів, дискретних процесів і кодування. Показано можливості їх поетапного впровадження у 5–11 класах з поступовим переходом від наочно-ігрових моделей до абстрактніших математичних понять і прикладних задач.

Запропоновані підходи не порушують логіки традиційного шкільного курсу математики, а доповнюють його засобами формування структурного, алгоритмічного та дискретного мислення, необхідного для життя і професійної діяльності в умовах цифрового суспільства.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо в розробленні детальної методичної системи реалізації запропонованих змістових ліній у шкільному курсі математики, створенні відповідних навчально-методичних матеріалів і дидактичних засобів, а також у проведенні педагогічних експериментів щодо оцінювання впливу елементів дискретної математики на розвиток математичної компетентності, алгоритмічного мислення та навчальних досягнень учнів різних вікових груп. Особливий інтерес становить дослідження можливостей інтеграції дискретної математики з інформатикою, STEM-освітою та курсами, пов'язаними зі штучним інтелектом і наукою про дані.

ЛІТЕРАТУРА

Кабінет Міністрів України. (2020). Державний стандарт базової середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898.

URL <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrainska-shkola-2/derzhavniy-standart-bazovoi-serednoi-osviti>

Кабінет Міністрів України. (2024). Державний стандарт профільної середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України від 25 липня 2024 р. № 851.

URL <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-%D0%BF#Text>

Міністерство освіти і науки України. (2024). Типова освітня програма для 5-9 класів закладів загальної середньої освіти.

URL <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/2024/09.08.2024/typova-osvitnya-prohrama-dlya-5-9-klasiv-zzso-1120-vid-09082024.pdf>

Міністерство освіти і науки України. (2025). Концептуальні засади ма-

тематичної освітньої галузі.

URL <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/novyny-posylannia/konceptualni-zasadi-matematichnoyi-osvitnoyi-galuzi.pdf>

Інститут модернізації змісту освіти. (n.d.). Електронні версії підручників.

URL <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyi-pidruchnikov/>

Department for Education. (n.d.). National curriculum in England: Mathematics programmes of study. GOV.UK.

URL <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>

Hart, E. W., & Sandefur, J. (Eds.). (2018). Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research. Springer.

URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4>

Kultusministerkonferenz. (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik: Primarbereich und Sekundarstufe I.

URL <https://www.kmk.org/Mathematics-curriculum-standards-for-senior-secondary-school>. (2003).

URL <https://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/kinagym.pdf>

Ministère de l'éducation nationale. (n.d.). Programme de mathématiques pour le cycle 4.

URL <https://www.education.gouv.fr/>

Ministry of Education, Republic of Korea. (2022). The national framework for the elementary and secondary curriculum.

URL <https://koreaneducentreinuk.org/>

OECD. (2024). An evolution of mathematics curriculum: Where it was, where it stands and where it is going.

URL <https://doi.org/10.1787/0ffd89d0-en>

Sandefur, J., Lockwood, E., Hart, E., & Greefrath, G. (2022). Teaching and learning discrete mathematics. ZDM-Mathematics Education, 54, 1169-1175.

URL <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01399-7>

TIMSS & PIRLS International Study Center. (n.d.). Japan: The

mathematics curriculum in primary and lower secondary grades. TIMSS Encyclopedia.

URL <https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/countries/japan/the-mathematics-curriculum-in-primary-and-lower-secondary-grades/>

REFERENCES

Kabinet Ministriv Ukrainy. (2020). Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity (State Standard of Basic Secondary Education).

URL <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrainska-shkola-2/derzhavnyi-standart-bazovoi-serednoi-osviti>

Kabinet Ministriv Ukrainy. (2024). Derzhavnyi standart profilnoi serednoi osvity (State Standard of Profile Secondary Education).

URL <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-%D0%BF#Text>

Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy. (2024). Typova osvitnia prohrama dlia 5-9 klasiv zakladiv zahalnoi serednoi osvity (Model Educational Program for Grades 5-9 of General Secondary Education Institutions).

URL <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/2024/09.08.2024/typova-osvitnya-prohrama-dlya-5-9-klasiv-zzso-1120-vid-09082024.pdf>

Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy. (2025). Kontseptualni zasady matematychnoi osvitnoi haluzi (Conceptual Foundations of the Mathematics Educational Field).

URL <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/novyny-posylannia/kontseptualni-zasadi-matematichnoi-osvitnoi-galuzi.pdf>

Instytut modernizatsii zmistu osvity. (n.d.). Elektronni versii pidruchnykiv (Electronic versions of textbooks).

URL <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/electronni-versiyi-pidruchnikiv/>

Department for Education. (n.d.). National curriculum in England: Mathematics programmes of study. GOV.UK.

URL <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>

Hart, E. W., & Sandefur, J. (Eds.). (2018). Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research. Springer.

URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4>

Kultusministerkonferenz. (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik: Primarbereich und Sekundarstufe I.

URL <https://www.kmk.org/Mathematics-curriculum-standards>

for senior secondary school. (2003).

URL <https://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/kinagym.pdf>

Ministère de l'éducation nationale. (n.d.). Programme de mathématiques pour le cycle 4.

URL <https://www.education.gouv.fr/>

Ministry of Education, Republic of Korea. (2022). The national framework for the elementary and secondary curriculum.

URL <https://koreaneducentreinuk.org/>

OECD. (2024). An evolution of mathematics curriculum: Where it was, where it stands and where it is going. OECD Publishing.

URL <https://doi.org/10.1787/0ffd89d0-en>

Sandefur, J., Lockwood, E., Hart, E., & Greefrath, G. (2022). Teaching and learning discrete mathematics. ZDM - Mathematics Education, 54, 1169-1175.

URL <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01399-7>

TIMSS & PIRLS International Study Center. (n.d.). Japan: The mathematics curriculum in primary and lower secondary grades. TIMSS Encyclopedia.

URL <https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/countries/japan/the-mathematics-curriculum-in-primary-and-lower-secondary-grades/>

