

Є.Й. Ріпецький, Р.Й. Ріпецький, О.І. Непеляк

Аналіз напружено-деформованого стану металевої пластини на основі дискретних даних величин переміщень

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, evgeniyripetsky@gmail.com,
ripetskyi.roman@gmail.com

Розв'язана актуальна задача аналізу напружено-деформованого стану (НДС) зігнутої металевої пластини в умовах невизначеного діючого навантаження. Практичний аспект задачі полягає в можливості відтворення деформованої поверхні пластини – як суцільного поля за дискретними даними величин переміщень її характерних точок при згині.

Сформульовано проблематику у безпосередньому використанні просторової інтерполяції для отримання поверхні металевої пластини, реалізацію якої здійснено у програмному продукті Surfer. Відмічено, що методи просторової інтерполяції мають аналогію з методом кінцевих елементів (МКЕ) в частині відображення поверхонь з використанням сіток. Це стало підставою для порівнянь результатів моделювання поверхонь за МКЕ з методами інтерполяції в умовах grid-сітки. Основна відмінність інтерпольованої поверхні полягала у відсутності у неї сплайнових властивостей.

Новий підхід у розв'язку поставленої проблеми полягав у додатковому використанні поліноміальних сплайн-функцій другого та четвертого порядків, вирази яких отримують за початковими та граничними умовами деформованої пластини. За їх допомогою було отримано і нанесено на поверхню grid-сітки лінії плавної кривизни, які виступали у ролі каркасних ліній. З введенням каркасних ліній на grid-сітці відбулося поєднання початкових дискретних даних зі значеннями переміщень, які були розраховані за виразами поліноміальних сплайн-функцій. Значне збільшення кількості точкових даних дозволило методу просторової інтерполяції поширити сплайнові властивості і на міжкаркасний простір grid-сітки. В результаті було відтворено адекватну деформовану поверхню металевої пластини з наданням їй сплайнових властивостей – плавних радіусів кривизни.

Ключові слова: металева пластинка, напружено-деформований стан, метод кінцевих елементів, дискретні дані, просторова інтерполяція, поліноміальна сплайн-функція, grid-сітка.

Подано до редакції 04.02.2024; прийнято до друку 28.08.2024.

Вступ

Металеві плоскі пластини знайшли широке застосування в інженерних конструкціях, де потрібно сприйняти навантаження зі сторони сипучих матеріалів, рідких речовин та газоподібних сумішей. Пластини є тим конструктивним матеріалом, який використовується для виготовлення технічних баків, резервуарів, а також вертикальних стінок інженерних споруд [1].

Металеві пластини мають прямокутну форму стандартних розмірів. А суцільні стінки конструкцій

довільних розмірів формують з ряду пластин, використовуючи нероз'ємне з'єднання між сусідніми пластинами.

Під час експлуатації конструкцій її суцільні стінки під впливом навантажень зі сторони внутрішнього середовища зазнають деформації. Разом зі стінками деформуються й з'єднані між собою пластини. Переважаючим видом деформації металевих пластин є згин.

Тобто, металеві пластини постійно знаходяться в напружено-деформованому стані (НДС). Його проявом є лінійні переміщення точок поверхні пластини, особливо вони помітні на кутах

прямокутної пластини. Величини цих переміщень становить кілька міліметрів і можуть бути зафіксовані сучасними вимірювальними приладами [2].

Подібні виміри деформацій виконуються періодично під час експлуатації конструкції для контролю її технічного стану. В ході обстежень отримують набір дискретних даних у вигляді координат зміни положення обраних для спостереження точок. За їх значеннями визначають величини переміщень цих точок на поверхні конструкції. На підставі цих даних оцінюється технічний стан конструкції в цілому і робиться висновок про доцільність її подальшої експлуатації.

Слід зазначити, що даний висновок робиться за загальними показниками, такі як нахил вертикальної осі, зміна лінійних розмірів по окремим ярусам споруди. В той же час, наявні дані у вигляді переміщень певних точок конструкції цілком могли б бути використані для аналізу НДС окремо взятих пластин, з яких складаються стінки цілої конструкції.

Наявність результатів аналізу НДС металевієї пластини значно розширить достовірність висновків про технічний стан конструкції. Але перешкодою проведення такого аналізу є складність у відтворенні деформованої поверхні на основі дискретних даних величин переміщень.

Комплексний підхід до можливого розрахунку НДС металевієї пластини на основі дискретних даних полягатиме не тільки у створенні адекватної моделі, але й в реалізації методів її автоматизованого опрацювання за допомогою програмного середовища.

I. Проблема і методи досліджень

Традиційними методами розрахунку НДС металевих пластин є моделювання процесу під дією заданого зовнішнього навантаження. Процес моделювання передбачає відтворення всіх характерних параметрів пластини з врахуванням способів її кріплення, властивостями самого матеріалу та видом зовнішнього навантаження. Результати розрахунку реалізуються у вигляді діаграм з поверхніми дискретних величин переміщень та внутрішніх напружень пластини [3, 4, 5].

Середовищем моделювання НДС металевих пластин є ряд популярних програмних комплексів таких як SolidWorks, Ansys, Lira [6, 7, 8]. В їх алгоритмах закладені положення теорії пружності і розрахунок ведеться за методом кінцевих елементів.

Дані програми належить до систем твердотілого проектування і використовується переважно при розробках нових конструкцій. Міцність запроєктованої конструкції оцінюють за величинами максимальних переміщень і напружень, значення яких візуалізовано на діаграмах [9].

Не зважаючи на універсальність і високу точність отриманих результатів, програми такого типу складно використовувати на стадії експлуатації конструкцій. Це пояснюється тим, що процес моделювання НДС конструкції даними програмними засобами потребує в якості вхідної інформації дані про характер зовнішнього навантаження, зі значеннями їх величин

та розподілом. Лише при цих умовах можуть бути отримані параметри НДС, а саме величини внутрішніх напружень та переміщень.

У більшості випадках, особливо при застосуванні дистанційних методів, данні обстежень фіксують зміни в геометричних параметрах, залишаючи в той час невизначеним зовнішнє навантаження на конструкцію. Їх результатом є набір дискретних даних, масив яких складається з координат точок, розміщених на поверхні деформованого тіла та величин їх переміщень внаслідок деформації [2].

Слід зауважити, що на цій стадії дослідження зовнішнє навантаження, яке діє на дане тіло і призвело до появи деформаційних процесів, залишаються поза увагою. В цьому випадку параметри НДС металевих конструкцій при згині оцінюють за характером деформаційних процесів, а саме радіусом кривизни поверхні, порівнюючи його з допустимим [10]. А це вимагає відповідної точності відтворення деформаційної поверхні зігнутої пластини.

Таким чином, якщо традиційний підхід визначення НДС пластини передбачає отримання її деформованої поверхні за відомим зовнішнім навантаженням, то в наших дослідженнях подібну поверхню потрібно отримати на підставі дискретних даних переміщень групи точок, розподілених на поверхні пластини.

Задачі такого змісту успішно вирішуються геоінформаційними системами (ГІС) на основі методів просторової інтерполяції. Реалізація подібних задач здійснюється в різноманітних ГІС-пакетах в автоматизованому режимі [11].

Однак, ГІС-пакети орієнтовані на моделювання поверхонь земних територій. Звідси весь наявний арсенал методів інтерполяції, на жаль, не враховує фізичні процеси деформації металевих пластин. Деформація металевих пластин, на відміну від земних поверхонь, підпорядкована зовсім іншим законам. Їх проявом є наявність сплайнових властивостей у деформованому стані. Тому безпосереднє використання інструментів інтерполяції для побудови деформованої поверхні пластини може привести до неправильних результатів. А це, в свою чергу, стає перешкодою для аналізу НДС пластини за дискретними даними у вигляді переміщень.

У зв'язку з тим, що автоматизовані методи розрахунку НДС пластини в такій постановці задачі ще не розроблені, то постає доцільним проведення досліджень що до можливості застосування існуючих програмних комплексів, які успішно використовуються в інших сферах.

Тут в першу чергу мова буде йти про програмні ГІС-пакети. Їх вибір повинен відповідати двом критеріям. Перший, можливістю відтворення суцільної поверхні розподіленої ознаки за дискретними даними у площині сітки. Другий, можливістю виконувати математичні операції для порівняння отриманих результатів з кожним кроком наближення до адекватної моделі.

Таким середовищем обрано програмний продукт Surfer, в якому просторова інтерполяція здійснюється в межах окресленої grid-сітки. Її результати присвоюються вузлам комірок grid-сітки з подальшою

візуалізацією у вигляді тривимірної поверхні [12]. Тут помітна пряма аналогія з відтворенням деформованої поверхні за МКЕ – у вигляді сітки з комітками, заповненими значеннями переміщень [6].

Перш ніж застосувати до металевих пластин існуючі алгоритми просторової інтерполяції на основі grid-сітки їх спочатку необхідно доповнити функціями надання сплайнових властивостей деформованій поверхні з дотриманням радіусів кривизни [10].

Мета статті. Реалізувати можливість здійснювати аналіз НДС металевих пластин за поверхнею, яка отримується методом просторової інтерполяції в умовах grid-сітки на основі дискретних даних величин переміщень і володіє сплайновими властивостями.

Досягнення поставленої мети передбачає послідовне вирішення двох задач. В обох задачах об'єктом дослідження є металева пластина розмірами 2,4 м × 3,6 м × 0,025 м, що з двох кінців утримується жорстким кріпленням (рис. 1).

Перша задача матиме тестовий характер і спрямована на отримання деформованої поверхні, яка виступатиме як поверхня-еталон. Тому її розв'язок ведеться при заданому навантаженні за МКЕ, результати якого є беззаперечні (рис. 1а). Друга задача матиме обернений випадок, коли є відомі деформації окремих точок пластини, а потрібно буде відтворити деформований стан пластини у вигляді поверхні (рис. 1б). Вона повинна бути наближена до поверхні-еталон.

II. Огляд існуючих підходів у визначенні напружено-деформованого стану металевих пластин

Точний аналіз НДС тонкої однорідної пластини, яка знаходиться під дією рівномірно-розподіленого навантаження, що діє нормально до її поверхні (рис. 1а), зводиться до тривимірної задачі теорії пружності [13]. Разом з тим, використання відомих гіпотез Кірхгофа дозволяє перейти від тривимірної задачі до двовимірної, що суттєво спрощує її розв'язок [14].

НДС плоских однорідних пластин в цій ситуації описується диференціальним рівнянням четвертого

порядку [13]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \quad (1)$$

Диференціальне рівняння (1) і відповідні йому граничні умови представляють собою математичне формулювання задачі, точний розв'язок якої в рамках теорії Кірхгофа є добре відомим [14, 15, 16]. Інтегруванням диференціального рівняння (1) отримують аналітичну залежність розподілу величин деформацій по поверхні пластини $w = w(x, y)$ під дією зовнішнього навантаження $q(x, y)$. На характер цього розподілу впливають конструктивні параметри самої пластини, такі як її розміри (L – довжина, b – ширина, t – товщина), жорсткість D , а також способи її кріплення, які враховуються у вигляді граничних умов.

У зв'язку з тим, що можливі різні способи кріплення пластини до основи, які призводять до зміни граничних умов, то при інтегруванні рівняння (1) будуть виникати особливі підходи його аналітичного розв'язку [14, 15, 16]. Ситуація ускладнюється ще й тим, що з введенням додаткових конструктивних елементів на пластині, такі як отвір чи прямокутний виріз пластини, виникає своя специфіка його аналітичного розв'язку [4, 8].

Забезпечити в цій ситуації однотипність розв'язку поставлених задач можливо з використанням чисельних методів, які й прийнято за основу.

Одним з найбільш поширених чисельним методом розв'язку задач НДС деформованого тіла є МКЕ. Його перевага полягає в універсальності та ефективності при проектуванні нових конструкцій. Основні положення методу, а саме прагнення подати тіло у вигляді суцільного середовища, викладені в монографії [17].

Реалізація алгоритму дискретного підходу розрахунку НДС плоских пластин передбачає розбиття цілої пластини на послідовні елементи у вигляді сітки. Утворені кінцеві елементи наділені своїми властивостями і взаємодіють із сусідніми такими ж елементами за детермінованими законами. В тривимірних моделях взаємодія йде через вісім вузлів, а у двовимірних через чотири.

Не дивлячись на значну кількість прихильників 3D-моделювання [18], тонкі пластини, як правило, розраховують на 2D-моделях. Незначна втрата

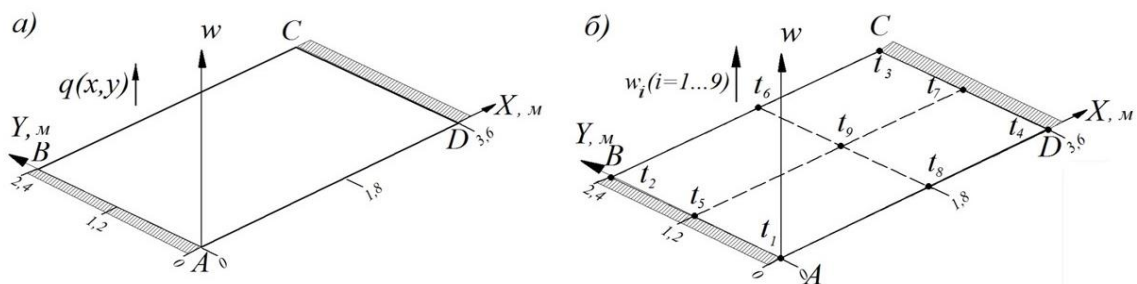


Рис. 1. Розрахункові схеми моделювання деформованої поверхні металевої пластини:

- а) перша задача – за відомим зовнішнім рівномірно-розподіленим навантаженням $q(x,y)$; б) друга задача – за відомими переміщеннями характерних точок w_i , що утворюють дискретний набір даних.

точності у зв'язку з переходом на плоску сітку компенсується можливістю застосувати більш прості програмні засоби, в тому числі MS Excel. Основною перевагою 2D-моделей слід вважати можливість доступу до двовимірних масивів з параметрами НДС пластини, що відкриває перспективи подальшого аналізу [4].

В умовах плоскої сітки появляється можливість розробляти і використовувати різноманітні алгоритми аналізу даних [19]. Прикладом таких алгоритмів є задача пошуку мінімуму потенціальної енергії деформації при визначенні НДС елементів конструкції [20].

У визначенні НДС пластин можна відмітити такі напрямки:

розрахунок пластин на різних опорах (з вільним та з жорстким кріпленням) [3];

вплив конструктивних змін пластини на її НДС з веденням квадратного отвору [4] або ослаблення її жорсткості наявністю додаткових отворів [8];

розрахунок пластини на еластичній основі [5].

З переходом на 2D-модель авторами [4], було паралельно розв'язано задачу зменшення кількості елементів сітки. Це призвело до збільшення відстані між вузлами. Тому для забезпечення суцільності поверхні було запропоновано простір між вузлами апроксимувати поліноміальними функціями.

На більшій області для відтворення поверхні було запропоновано здійснювати апроксимацію з використанням інтерполяційних поліномів. Ідеї інтерполяційних поліномів були сформульовані ще у минулому сторіччі [15], однак, їх реалізація змогла відбутися тільки з появою геоінформаційних систем (ГІС).

В ГІС технологіях отримали розвиток дискретні методи побудови поверхонь. Програмні ГІС-пакети (Surfer та ін.) використовують grid-сітку, комірки якої заповнюються спочатку вхідними даними, а далі методами просторової інтерполяції поширюється на весь простір. Такий підхід дозволяє подати інтерпольовані дані як модель території в тримірному просторі [11, 21]. Просторова інтерполяція використовується при створенні цифрових моделей рельєфу для дослідження процесів деформації земної поверхні під час осідань та зсувів [22].

В цьому плані цікавою є стаття [23], в якій автори наводять алгоритм моделювання деформації земної поверхні за зміною положення вузлових точок полігону.

Підходи, які запропоновані в ГІС, можуть бути цікавими для візуалізації деформованих поверхонь металевих пластин. Їх точне відтворення дозволило б визначати НДС пластини за дискретними даними переміщень окремих точок, виміри яких здійснюється при кожному обстеженні технічних споруд.

Однак, сформульовані вище проблеми вимагають проведення додаткових досліджень для створення методики визначення НДС пластин на основі grid-сітки. В ході досліджень необхідно буде встановити потрібну кількість вхідних точок виміру, їх раціональне розміщення по поверхні пластини, а також вирішити питання про надання сплайнових властивостей деформованій поверхні.

III. Проведення досліджень

3.1 Порівняльний аналіз поверхонь змодельованих за сіткою МКЕ та grid-сіткою

Порівнюючи приклади деформованих поверхонь металевих пластин за МКЕ [3, 4, 8] з поверхнями, що отримані засобами ГІС [21, 22], можна помітити певну схожість в частині візуалізації результатів. По-перше, наведені поверхні відображають деформацію у вигляді вертикальних переміщень. По-друге, середовищем отримання поверхонь в обох випадках є сітки на основі 2D-моделей і складаються із набору дискретних елементів.

Встановимо подібності та розбіжності між МКЕ та ГІС за способом візуалізації поверхонь з метою подальшого аналізу деформаційних процесів металевих пластин із застосуванням ГІС-пакетів. Такий підхід обумовлено тим, що розв'язок задачі здійснюється на основі дискретних даних переміщень в умовах невизначеного зовнішнього навантаження.

При порівнянні методів зацікавленість викликають результати інтерполяції ГІС в умовах grid-сітки, так як вони мають схожість з МКЕ у відображенні поверхонь як матричного еквівалента (рис. 2):

В обох методах МКЕ та ГІС на поверхню деформованого тіла наноситься однотипні сітки, їх комірки переважно правильної геометричної форми (рис. 2а, б).

В МКЕ комірки сітки отримали назву кінцевих елементів (КЕ) з вузлами позначеними як a , b , c , d (рис. 2а). В ГІС grid-сітка в загальному нагадує табличний процесор. Тільки вузли комірок мають координати свого розміщення по рядкам і стовбцям за зразком елемента матриці і прив'язані до просторових метричних координат (рис. 2б).

Аналіз деформаційних процесів в МКЕ розглядається на основі теорії, що описує рух суцільного середовища. В цьому випадку рівнянням суцільного середовища записується для вузлів кінцевих елементів моделі. Тому вузли кінцевого елемента КЕ (a , b , c , d) належать до пластини і переміщуються при деформації разом з нею, займаючи нове положення (a' , b' , c' , d'). В такому випадку сітка в МКЕ є деформованою (рис. 2а).

В умовах grid-сітки значення переміщень отримуються методами просторової інтерполяції і стають змістом її вузлів. А візуалізація інтерпольованих значень подає вертикальні переміщення w_i у вигляді поверхні $w = w(x, y)$. Аналіз деформованих процесів розглядається в умовах недеформованої сітки.

Таким чином, МКЕ базується на диференціальному рівнянні (1), яке для кожного елемента сітки переписують в алгебраїчній формі як взаємодія вузлів сітки. В той час в ГІС складні процеси деформацією поверхні землі, що відбуваються в її надрах, спробують пояснити на основі зміни положення характерних точок поверхні, які помічені маркерами [22, 23].

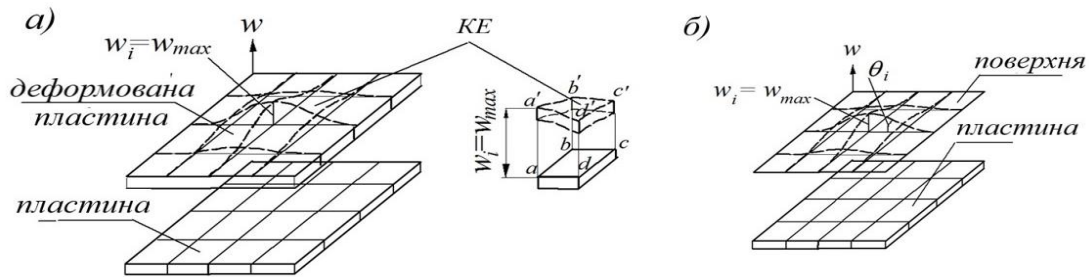


Рис. 2. Подання поверхонь деформації пластини в моделях: деформованої сітки МКЕ (а) та недеформованої grid-сітки ГІС (б).

3.2 Моделювання деформованого стану пластини за МКЕ (перша задача: отримання поверхні-еталон).

Моделювання НДС металевої пластини виконувалося як в рамках розв'язку плоскої задачі теорії пружності методом кінцевих елементів з використанням програмного комплексу Ansys [7], так і методами просторової інтерполяції програми Surfer [12]. Незважаючи на те, що поставлені дві задачі відрізнялися параметрами вхідних даних, їх кінцеві результати в обох випадках зводилися до моделей деформованих поверхонь пластини.

Призначення першої задачі полягало в отриманні еталонної поверхні деформованої пластини, за якою здійснювалася оцінка точності відтворення поверхонь на етапах розв'язку другої задачі.

Моделювання у програмному комплексі Ansys було розпочато з побудови плоскої кінцево-елементної моделі відповідно до геометричної розрахункової схеми (рис. 1а).

На розрахунковій схемі пластинка розглядається як тонке однорідне тіло прямокутної форми, що перебуває під дією рівномірно-розподіленого навантаження. Її фізико-механічні властивості такі як модуль пружності, коефіцієнт Пуансона, питома вага та ін. було взято з набору керування матеріалом бази даних Ansys.

Ключовим моментом при моделюванні НДС є призначення граничних умов. Граничні умови визначаються способами кріплення пластини. Виходячи з розрахункової схеми граничні умови наступні. Дві протилежні сторони ширини пластини мають жорстке кріплення, тому при формуванні граничних умов присвоєно нульові значення переміщенням і кутам повороту поверхні в точках кріплення пластини.

Досить важливим питанням при моделюванні НДС є дискретизація простору у вигляді сітки з кінцевих елементів. Принципи побудови сіток кінцевих елементів визначаються кривизною деформованої поверхні за принципом чим більші напруження, тим менше радіус кривизни, що потребує згущення сіток.

Відповідно до методики досліджень сітка кінцевих елементів, крім того, повинна бути ще й однотипною з сіткою grid-моделі, в межах якої відбувається процедура інтерполяції. Це забезпечить можливість обміну даних між двома програмами. Тому для розв'язку першої задачі була запроєктована сітка з кінцевими елементами квадратної форми зі

стороною 0,04 м. Таким чином, деформовану поверхню було покрито сіткою розміром 61 рядок \times 91 стовпець, що складало у загальній кількості 5551 кінцевих елементів. Такий розмір сітки буде використано і для моделювання поверхні методом інтерполяції.

Далі за алгоритмами МКЕ було розраховано значення переміщень у вузлах сітки. Після їх заповнення появилася можливість отримати 3D-поверхню деформації на просторі, обмеженого розмірами пластини.

Враховуюче те, що перша задача мала тестовий характер, тому отримана деформаційна поверхня за МКЕ потребувала свого подання для її співставлення з очікуваними результатами другої задачі. В цьому випадку порівняння результатів моделювання мало відбутися у єдиному програмному засобі.

Для цих цілей краще підходить програма Surfer зі своїми можливостями застосовувати матричні операції між різними поверхнями, які утворені сітками [12].

На базі кінцево-елементної моделі за отриманою поверхнею був сформований масив дискретних значень переміщень пластини у вигляді матриці розміром 61 \times 91. Отриманий масив було передано у програму Surfer, де він прийняв формат координатної матриці і був візуалізований у вигляді поверхні (рис. 3).

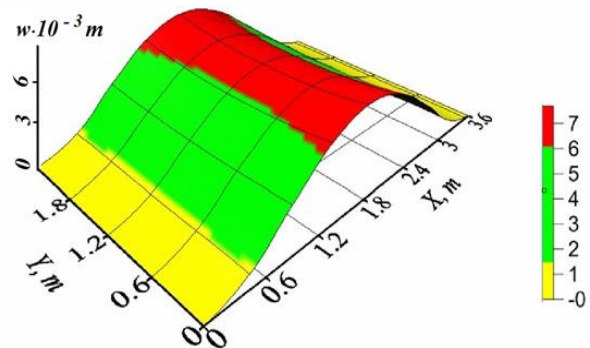


Рис. 3. Графік деформованої поверхні металічної пластини за результатами розв'язку першої задачі у форматі програми Surfer.

За графіком рис. 3 встановлено значення переміщень характерних точок. Максимальні значення $w = 7,70 \cdot 10^{-3}$ м зафіксовано в точках, що знаходяться на середині бічних сторін пластини ($X = 1,8$ м; $Y = 0$ і $X = 1,8$ м; $Y = 2,4$ м). В геометричному

центрі пластини ($X = 1,8$ м; $Y = 1,2$ м) переміщення дещо менше і становило $w = 6,72 \cdot 10^{-3}$ м.

Таким чином, кінцевим результатом розв'язку першої задачі став масив значень величин деформації поверхні пластини на основі кінцево-елементної моделі, представлена у форматі програми Surfer як матричний еквівалент. Подібне представлення придатне для верифікації моделі просторової інтерполяції на етапі їх удосконалення.

Його результати дозволяють перейти до наступного етапу досліджень пов'язаного з розв'язком другої задачі. З отриманого масиву вибірково формуються необхідні вхідні дані дискретного характеру для розв'язку другої задачі, в якій вирішується питання відтворення поверхні деформованої пластини методами просторової інтерполяції.

3.3 Моделювання деформованої поверхні металевієї пластини в умовах grid-сітки (друга задача – розробка алгоритму).

Зміст другої задачі з визначення НДС металевієї пластини сформульовано наступним чином. Дослідити можливість отримати адекватну деформовану поверхню пластини за дискретними даними переміщень її конкретних точок.

Слід зазначити, що при розв'язку другої задачі не можливо скористатися диференціальним рівнянням (1) за кількома причинами:

функція розподілу зовнішнього навантаження $q(x, y)$, що діє перпендикулярно до поверхні пластини невизначена;

замість неперервного деформаційного поля переміщень $w = w(x, y)$ маємо лише обмежений набір дискретних даних про величини переміщень в кількох конкретних точках.

Тому шляхом розв'язку другої задачі обрано метод просторової інтерполяції, в ході якої повинна бути відтворена ідентична до МКЕ поверхня в умовах grid-сітки за початковими даними.

На початковому етапі дослідження побудова поверхні здійснювалась за дев'ятьма точками $t_1..t_9$. Вибір точок диктувалися умовами їх характерного розміщення на поверхні пластини та можливістю виміряти значення їх переміщень в експлуатаційних умовах на спорудах. Такими точками стали: чотири точки по вершинах прямокутної пластини ($t_1..t_4$), ще чотири точки на серединах сторін ($t_5..t_8$) і одна t_9 у геометричному центрі пластини (рис. 1б).

Перша спроба отримати поверхню деформованої пластини методами інтерполяції з використанням лише значень переміщень не змогла забезпечити її адекватність. Було з'ясовано, що основним її недоліком є поява на поверхні ребр перегину. Як наслідок, перші похідні в точках перегину мали розриви, що не дозволяло визначити радіус кривизни поверхні. Здійснювати аналіз НДС за такою моделлю було нереальним. Одночасно це проілюструвало невіршену проблематику отримання деформованої поверхні металевих пластин методом просторової інтерполяції в умовах grid-сітки.

В той час, розв'язок першої задачі за МКЕ показав, що деформована пластина при згині набуває

сплайнових властивостей з певним радіусом кривизни поверхні. А радіус кривизни, як відомо, є прямий аналог згинаючому моменту та внутрішнім напруженням в перерізах пластини [10].

Відсутність сплайнових властивостей пояснюється тією технологією, яку застосовують алгоритми інтерполяції для отримання цифрових моделей рельєфу (ЦМР). При побудові моделі земної поверхні участь беруть тільки координати обраних точок. При цьому можна досягнути хороших показників середньоквадратичного відхилення у ЦМР [24], але не отримати сплайнових властивостей.

Повертаючись до рівняння (1), можна зауважити що його розв'язок залежить від початкових та граничних умов. Ці умови сформульовано для кріплень пластини і задають переміщення та значення перших похідних, якими є кути нахилу поверхні.

Ідея відтворити сплайнові властивості пластини при розв'язку другої задачі полягала у додатковому застосуванні граничних умов, записаних для кутів нахилу поверхні у вигляді перших похідних (табл. 1). Однак, жодна з існуючих програм інтерполяції не використовує в якості вхідних даних значення перших похідних. А власне похідні краще ніж переміщення характеризують гнучкість функції поверхні.

Подальші дослідження проходили у напрямку пошуку можливостей надати сплайнові властивості існуючим методам інтерполяції на просторі grid-сітки в програмному продукті Surfer. Основний акцент був зроблений на застосування додатково поліноміальних сплайн-функцій, аналітичні вирази яких запропоновано було отримувати не тільки на основі дискретних даних переміщень, але з урахуванням граничних умов кріплення пластини (табл. 1). В граничних умовах для сторін AB і CD (рис. 1) будуть виступати значення перших похідних функції поверхні, геометричним змістом яких є значення кутів θ_i її нахилу. Кути нахилу в точках $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_7$ регламентуються видом опор пластини на сторонах AB і CD – як жорстке кріплення. Відомо, що для жорсткого кріплення кут повороту дорівнюють нулю $\theta_i = 0$ ($i = 1..5, 7$).

Поліноміальні сплайн-функції у вигляді графічних ліній здатні утворити попередній каркас, на який буде "натягнута" деформована поверхня методами просторової інтерполяції за зразком оболонки. Для цього було запропоновано поділити простір grid-сітки, що покриває поверхню пластини, на окремі зони, а лініями поділу виступатимуть каркасні лінії. Каркасна лінія – це лінія плавної кривизни, яка належить поверхні пластини і деформується разом із нею. Кожна каркасна лінія задається своєю поліноміальною сплайн-функцією вищого порядку.

Наведений принцип було реалізовано для покращення результатів інтерполяції в умовах grid-сітки програми Surfer. Надання сплайнових властивостей металевієї пластині при згині досягнуто запропонованим алгоритмом попередньою підготовкою вхідних даних для успішного протікання процесу інтерполяції.

Алгоритм підготовки даних включає в себе такі моменти:

Таблиця 1.

Початкові та граничні умови формування поліноміальних сплайн-функцій для каркасних ліній grid-сітки.

Позначення точки	Розміщення	Значення переміщень	Початкові і граничні умови
t_1	Сторона AB – жорстке кріплення	$x = 0; y = 0$	$w_1 = 0; \theta_1 = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0$
t_2		$x = 0; y = b$	$w_2 = 0; \theta_2 = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0$
t_5		$x = 0; y = \frac{b}{2}$	$w_5 = 0; \theta_5 = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0$
t_3	Сторона CD – жорстке кріплення	$x = l; y = b$	$w_3 = 0; \theta_3 = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0$
t_4		$x = 0; y = b$	$w_4 = 0; \theta_4 = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0$
t_7		$x = l; y = \frac{b}{2}$	$w_7 = 0; \theta_7 = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0$
t_6	Середина бічної сторона BC	$x = \frac{b}{2}; y = b$	$w_7 = 7,70 \cdot 10^{-3}$ м
t_8	Середина бічної сторона AD	$x = \frac{b}{2}; y = 0$	$w_8 = 7,70 \cdot 10^{-3}$ м
t_9	Геометричний центр пластини	$x = \frac{b}{2}; y = \frac{b}{2}$	$w_7 = 6,82 \cdot 10^{-3}$ м

1) розміщення початкових дискретних даних переміщень, отримання аналітичних виразів поліноміальних сплайн-функцій виду $w_i = w_i(x, y)$ та $w_j = w_j(x, y)$ за напрямком каркасних ліній поздовжніх ($i = 1..3$) та поперечних ($j = 1$);

2) розрахунок значень переміщень за виразами $w_i = w_i(x, y)$ та $w_j = w_j(x, y)$ по всій довжині каркасних ліній з кроком сітки;

3) заповнення отриманими значеннями тих комірок grid-сітки, що знаходяться на каркасних лініях.

В результаті до початкових дискретних даних долучаються розрахункові значення переміщень, які задіяні у процесі інтерполяції для формування поверхні згину.

На рис. 4 показано розміщення каркасних ліній на поверхні пластини. Загалом використано чотири каркасні лінії, які можна охарактеризувати як поздовжні та поперечні. Поздовжні каркасні лінії розміщуються в трьох площинах α, β, γ ($i = 1..3$), які перпендикулярні до поверхні пластини, і відповідно перетинають її по сторонах BC, AD та по поздовжній осі симетрії пластини. Крім того, пластини має поперечну деформацію. Її сплайнні властивості відтворюватиме поперечна каркасна лінія, яка розміщена в площині δ ($j = 1$), і співпадає з поперечною віссю симетрії пластини.

При використанні граничних і початкових умов таблиці 1 були отримані коефіцієнти поліноміальних сплайн-функцій. Їх вид та значення коефіцієнтів наведено в таблиці 2. В залежності від кількості граничних та початкових умов поліноміальних сплайн-функцій, що представлені виразами (2) і (3), є четвертого або другого порядку. Невідомі коефіцієнти поліномів (2) і (3), було знайдено з урахуванням як

значеннями переміщень, так і за значеннями похідних (табл. 1). Остаточні аналітичні вирази поліномів та їх коефіцієнти наведено в таблиці 2.

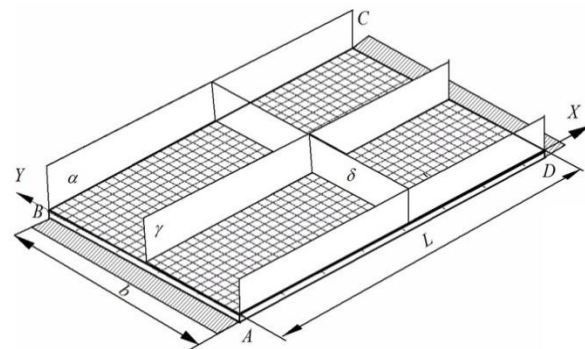


Рис. 4. Розміщення каркасних ліній на grid-сітці металевої пластини.

За виразами поліномів (2) і (3) з урахуванням коефіцієнтів (табл. 2) було розраховано значення переміщень з дискретним кроком grid-сітки по напрямку кожної каркасної лінії. Отримані дані заповнили всі комірки grid-сітки, розміщених на каркасних лініях. Після виконання цієї процедури відбулося поєднання початкових дискретних даних з розрахунковими значеннями переміщень за виразами (2) і (3).

Внесення каркасних ліній розділило пластину на окремі зони, утворюючи міжкаркасний простір. Значне збільшення кількості точкових даних дозволило методами просторової інтерполяції поширити сплайнні властивості і на міжкаркасний простір grid-сітки.

Таким чином, введення каркасних ліній змінило

Таблиця 2.

Значення коефіцієнтів поліноміальних сплайн-функцій на каркасних лініях					
Площини розміщення каркасних ліній	Вид поліноміальних сплайн-функцій поздовжніх каркасних ліній, ($i = 1..3$)				
	$w_i(x, y_i) = a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$ (2)				
	Значення коефіцієнтів				
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\alpha, (y = 0)$	$7.335 \cdot 10^{-3}$	-0.0528	0.0951	0	0
$\beta, (y = d/2)$	$6.497 \cdot 10^{-3}$	-0.047	0.0842	0	0
$\gamma, (y = d)$	$7.335 \cdot 10^{-3}$	-0.0528	0.0951	0	0
	Вид поліноміальної сплайн-функції поперечної каркасної лінії, ($j = 1$)				
	$w_j(x_j, y) = b_1y^2 + b_2y + b_3$ (3)				
		b_1	b_2	b_3	
$\delta, (x = L/2)$	$6.111 \cdot 10^{-3}$		-0.0146		0.077

характер інтерполяції в міжкаркасному просторі і дозволило надати зігнутій пластині сплайн-властивостей. В результаті було відтворено адекватну деформовану поверхню металевої пластини з наданням їй сплайн-властивостей – плавних радіусів кривизни. Враховуючи симетрію пластини та симетричність навантаження, а також для кращого візуального сприйняття на рис. 5 показана $1/4$ частина поверхні з видимим профілем у перерізі.

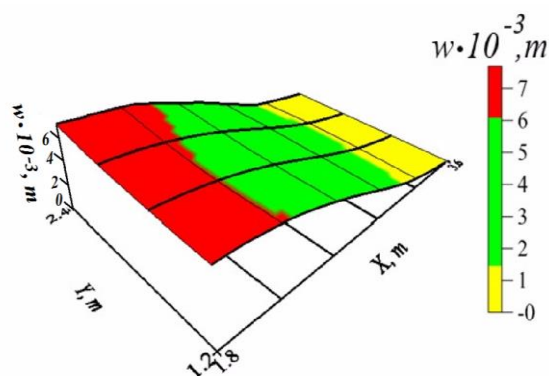


Рис. 5. Фрагмент деформованої поверхні металевої пластини, отриманої в умовах grid-сітки.

Як видно з графіку, контури поверхні набули плавних переходів, в місцях зацмлення пластини виконуються відповідні граничні умови, а на екстремальних значення переміщень усунені гострі перегиби.

Таким чином, врахування граничних умов рівняння (1) стосовно кріплення металевої пластини дозволило вирішити сформульовану задачу і отримати деформовану поверхню пластини за дискретними даними переміщень конкретних точок пластини. Важливим моментом стало застосування поліноміальних функцій (2) і (3), за допомогою яких поверхня набула сплайн-властивостей.

IV. Аналіз результатів досліджень

Результати досліджень подано у вигляді двох поверхонь, які отримані за моделями з принципово різними підходами (рис. 2 і рис. 5). Причому

поверхню, яку отримано за першою моделлю (рис. 2), будемо вважати як еталонну, так як вона є результатом розв'язку за МКЕ. Поверхня другої моделі (рис. 5) потребувала ряд технічних рішень, такі як введення каркасних ліній, отримання поліноміальних сплайн-функцій, використання методів просторової інтерполяції за запропонованим алгоритмом підготовки даних. Ефективність цих дій може бути підтверджена при встановленні адекватності отриманої поверхні в умовах grid-сітки.

За принципом аналогії здійснено порівняння двох поверхонь на базі програмного продукту Surfer. Так як дві поверхні були зведені до однотипної grid-сітки з розміром 61×91 , то для перевірки адекватного відтворення використовувалися матричні операції, за якими було отримано розподіл відхилень величин як за переміщеннями, так і за їх відносними похибками. Однотипність сітки дозволила крім того оцінити ще й плавність поверхні за радіусами кривизни у поздовжньому ρ_x та поперечному ρ_y напрямках.

На рис. 6. здійснено порівняння двох графіків деформації поверхонь в районі максимальних переміщень з відмітками числових значень, отриманих за МКЕ (рис. 6а) і методами просторової інтерполяції із застосуванням каркасних ліній (рис. 6б).

При порівнянні результатів (рис. 6) було визначено, що відносна похибка по центру пластини, де відбуваються максимальні переміщення, становила 5–9%, а з наближенням до жорсткого кріплення спостерігається її збільшення до 13%, що пояснюється невеликими абсолютними значеннями самих переміщень. Досягнуто співпадіння з кінцево-елементною моделлю за значеннями радіусів кривизни. За даними поверхні радіуси кривизни в точці геометричного центру становили: у поздовжньому напрямку $\rho_x = 11,9$ м, у поперечному $\rho_y = 81,8$ м. Причому у поздовжньому напрямку пластина зігнута випуклістю вгору, а у поперечному – вниз.

Таким чином, отримані показники точності свідчать про ефективність запропонованого методу аналізу НДС металевої пластини за дискретними даними величин переміщень.

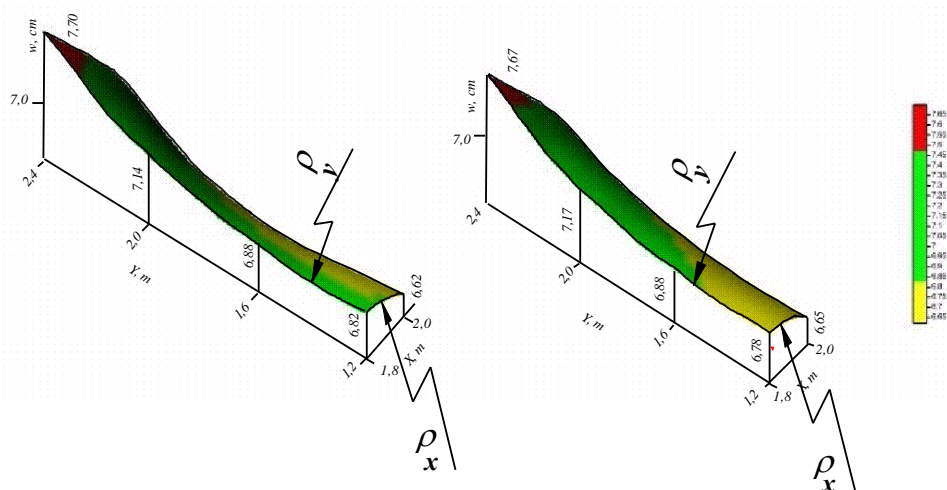


Рис. 6. Графіки деформації поверхонь в районі максимальних переміщень:
а) модель за МКЕ; б) умовах grid-сітки.

Висновки

Розв'язана актуальна задача аналізу НДС металевої пластини за дискретними даними величин переміщень в умовах невизначеного зовнішнього навантаження. Запропоновано алгоритм побудови деформованої поверхні металевої пластини у програмному продукті Surfer методами просторової інтерполяції на основі grid-сітки. Показано, що завдяки застосуванню поліноміальних сплайн-функцій і введенню каркасних ліній на grid-сітку призвело до зміни характеру інтерполяції і дозволило надати зігнутій пластині сплайнових властивостей. За відзначеною аналогією з МКЕ, підтверджено

адекватність відтворення поверхні і наведено значення радіусів кривизни: у поздовжньому напрямку пластина зігнута випуклістю вгору, а у поперечному – вниз.

Ріпецький Є.Й. – доктор технічних наук, професор кафедри геодезії та землеустрою, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
Ріпецький Р.Й. – кандидат технічних наук, доцент кафедри фізико-математичних наук, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
Непеляк О.І. – аспірант кафедри транспортування та зберігання енергоносіїв, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу.

- [1] Іу.Л. Vynnykov, S.F. Pichuhin, O.O. Dovzhenko, A.O. Dmytrenko, P.P. Voskobiinyk, A.V. Yakovliev, Building constructions. Textbook (PoltNTU, Poltava, 2011).
- [2] K. Burak, V. Kovtun, M. Nychvyd, *Building 3D Surfaces of Land storage vertical Cylindrical Steel Tank using Bicubic Spline Interpolation*, Geodesy and Cartography, 45(2), 85 (2019); <https://doi.org/10.3846/gac.2019.6301>.
- [3] A.K. Nandi, H. Mishra, *Stress Calculation for Rectangular Plate using Simplified Analytical Method*. International Journal of Research Publications in Engineering and Technology [IJRPET], 3(4), 174 (2017); <https://repo.journalnx.com/index.php/nx/article/view/2698>.
- [4] M. Roknuzzaman, M.B. Hossain, M.R. Haque, T.U. Ahmed, *Analysis of Rectangular Plate with Opening by Finite Difference Method*. American Journal of Civil Engineering and Architecture, 3(5), 165 (2015); <https://doi.org/10.12691/ajcea-3-5-3>.
- [5] A.A. Komlev, S.A. Makeev, *The calculation of rectangular plates on elastic foundation the finite difference method*. Journal of Physics: Conference Series, 944, 1 (2018); <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012056>.
- [6] Matt Lombard. Mastering SolidWorks, 1248 (2018); <https://doi.org/10.1002/9781119516743>.
- [7] K.L Lawrence. Ansys Workbench Tutorial, v.10 (University of Texas at Arlington, Arlington, 2007)
- [8] M. Pidgurskyi; I. Pidgurskyi; M. Stashkiv; V. Ihnatieva; S. Danylchynko; D. Bykiv; O. Pidluzhnyi. *Peculiarities of Studying the Stress-Strain State of Structural Steel perforated beams using the Finite Element Method*. Scientific Journal of the Ternopil National Technical University 3 (111), 126 (2023); https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2023.03_126-138.
- [9] D.E. Weisberg *The Engineering Design Revolution: The People, Companies and Computer Systems that Changed Forever the Practice of Engineering* (Englewood, 2008).
- [10] C. Gonenli, H. Ozturk, O. Das, *Effects of the Radius of Curvature on Natural Frequency and Mode Shape*, International Journal of Scientific Research and Management, 7(12), 283 (2019). <https://orcid.org/0000-0001-9163-1569>.
- [11] O.O. Svitlychnyi, S.V. Plotnytskyi, *Fundamentals of geoinformatics: Textbook*. (VTD "Univ. kn.", Sumy, 2006).

- [12] Surfer. User's Guide: Contouring and 3D Surface Mapping for Scientists and Engineers. Golden Software, LLC. 1431 с.
- [13] P. Stephen, S. Timoshenko, S. Woinosky-Krieger, Theory of plates and shells (McGraw Hill, New York, 1959);
- [14] J.N Reddy, Theory and analysis of elastic plates (Taylor and Francis, Boca Raton, 2006); <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
- [15] Іу. P. Petrov, *Bending calculation of elastic rectangular plates by discrete method*, Trudy. Kharkov Aviation Institute, 18, 83 (1961); <http://dspace.library.khai.edu/xmlui/handle/123456789/584>.
- [16] L.A. Kolesnykov, *Bending equations of elastic plates when taking into account the refined curvature expression*, Bul. Kharkov Aviation Institute, 18, 39 (1961); <http://dspace.library.khai.edu/xmlui/handle/123456789/552>.
- [17] R.H. Gallagher, Finite element analysis: Fundamentals (Englewood Cliffs, N.J. 1975).
- [18] V. Akmadzic V. Raspudic M. Lozancic, XXII International Scientific Conference VSU'2022 (Bulgaria, Sofia, 2022). https://www.researchgate.net/publication/365202856_comparison_of_the_convergence_of_results_on_the_example_of_a_thin_plate.
- [19] Yi. Huaminga, C. Yanping, W. Yang, H. Yunqing, *A two-grid immersed Finite Element Method with the Crank-Nicolson time Scheme for semilinear parabolic InTeface Problems*, Applied Numerical Mathematics, 189, 1 (2023); <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2023.03.010>.
- [20] E. Ripetskyi, R. Ripetskyi, M. Pidgurskyi, I. Pidgurskyi, O. Korobkov, *Adaptation of Energy Methods to Automated Calculation of Mobile Machines Frame Constructions*. Physics and Chemistry of Solid State, 22(1), 284 (2020); <https://doi.org/10.15330/pcss.22.2.284-291>.
- [21] U. Litwin, J.M. Pijanowski, A. Szeptalin, M. Zygmunt, *Application of Surfer Software in Densification of Digital Terrain Model (Dtm) Grid with the use of Scattered Points*, Geomatics, Landmanagement and Landscape. 1, 51, (2013); <https://doi.org/10.15576/GLL/2013.1.51>.
- [22] O.Ya. Kravets, *The use of geoinformation technologies in the study of landslide processes*, Scientific bulletin of UNFU, 30 (2), 113 (2020); <https://doi.org/10.36930/40300220>.
- [23] L. Gao, Y. Song B. Zhao, *3D Visualization Monitoring and Early Warning of Surface Deformation in Subsidence Area Based on GIS. Complexity*, Hindawi, 2021, 1, (2021); <https://doi.org/10.1155/2021/6675241>.
- [24] O. Ivanchuk, O. Tumska. *Automated Construction of a Digital Model of the Micro Surface of an Object using a Stereo Pair of Digital SEM Images*, Geodesy, cartography and aerial photography, 90, 50-64 (2019).

E.Y. Ripetskyi, R.Y. Ripetskyi, O.I. Nepelyak

Analysis of stress-strain state of the metal plate based on discrete data of displacement values

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, evgenyripetsky@gmail.com, ripetskyi.roman@gmail.com

An actual problem of stress-strain analysis (SSS) of a bent metal plate under an uncertain acting load is solved.

A problem in the direct use of spatial interpolation for obtaining the surface of a metal plate, which is realized in the Surfer software product, is formed. It is noted that direct use of existing interpolation methods without considering physical-mechanical properties leads to results distortion. It was noted that spatial interpolation methods have analogy with the finite element method (FEM) in terms of surface display using meshes. This was the basis for comparing the results of surface modelling by FEM and grid-cell interpolation methods. The main difference of the interpolated surface was the absence of spline properties.

A new approach to solving the problem was the additional use of second and fourth-order polynomial spline functions, whose expressions are obtained from the initial and boundary conditions of the deformed plate. With its help, lines of smooth curvature, which acted as frame lines, were obtained and plotted on the grid-cell surface. The introduction of the frame lines on the grid-cell resulted in the combination of the initial discrete data with the displacement values calculated using the expressions of polynomial spline functions. A significant increase in the number of point data allowed the spatial interpolation method to extend the spline properties to the grid-cell interframe space as well. As a result, an adequate deformed surface of a metal plate was reproduced, giving it spline properties - smooth radii of curvature.

Keywords: metal plate, stress-strain state, finite element method, discrete data, spatial interpolation, polynomial spline function, grid-cell.